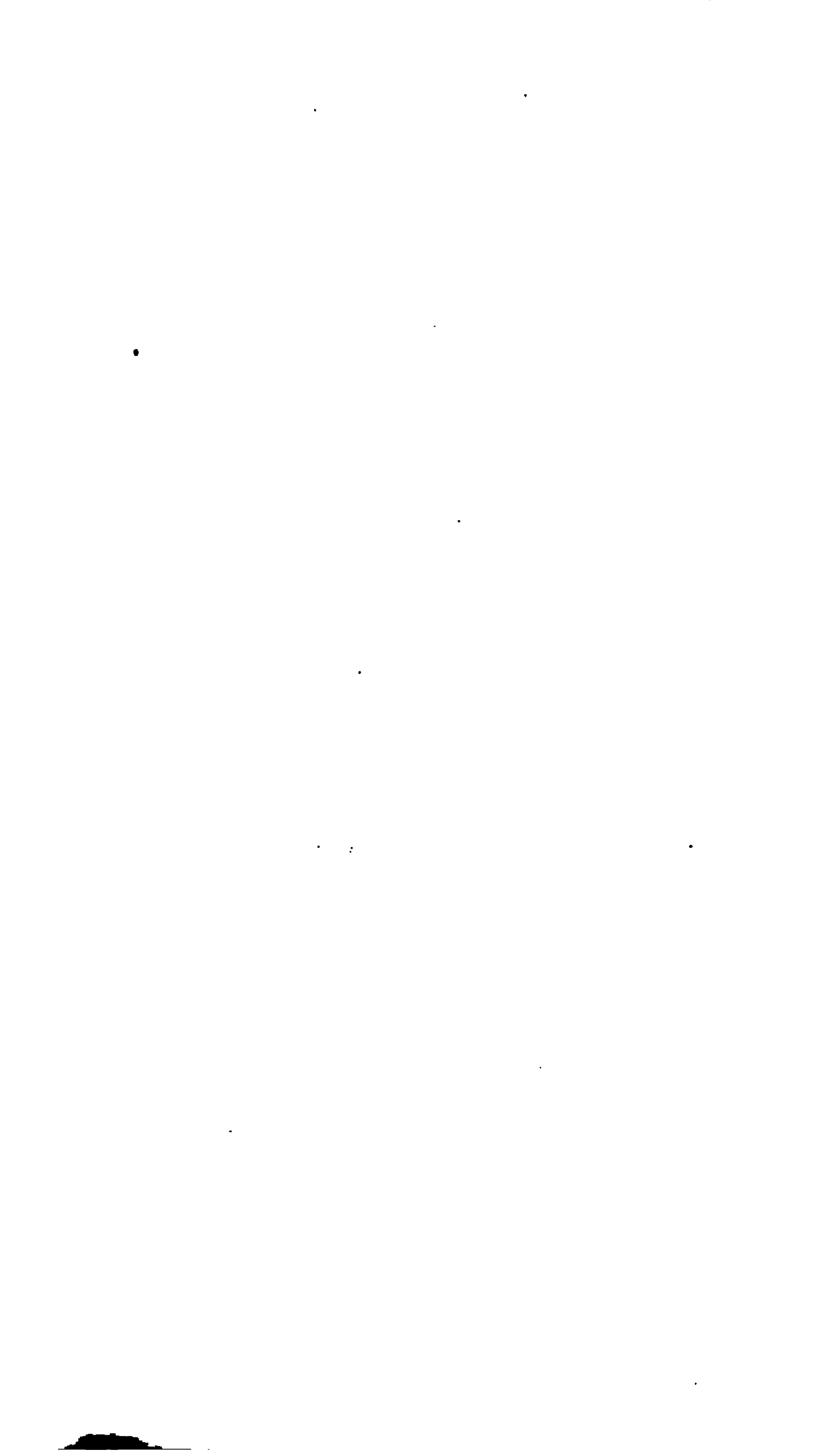

SIGILLVM ACADEMIAE HARVARDIANAE IN NOV ANG
CHRISTO ET ECCLESIAE
VE RI TAS



VERSLAGEN EN MEDEDEELINGEN

DER

KONINKLIJKE AKADEMIE

VAN

WETENSCHAPPEN.

VERSLAGEN EN MEDEDEELINGEN

DER

KONINKLIJKE AKADEMIE

VAN

WETENSCHAPPEN.

Afdeeling NATUURKUNDE.

TWEEDE REEKS.

VIJFTIENDE DEEL.



AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
1880.

GEDRUKT BIJ DE ROEVER-KRÖBER-BAKELS.

INHOUD

VAN HET

VIJFTIENDE DEEL

TWEEDE REEKS.



VERSLAGEN.

MEDEDEELINGEN.

BIJDRAGE

TOT DE

KENNIS DER AFKOMST VAN HET CURARE,

DOOR

A. W. M. VAN HASSELT.

MET EEN NASCHRIFT

VAN

C. A. J. A. OUDEMANS.

Van de beide typen der Oost-Indische pijl-vergiften — het oepas radja en het oepas antsjar — zijn de moederplanten (*Strychnos Tieuté* LESCH. en *Antiaris toxicaria* LESCH.), sedert BLUME, algemeen en goed bestemd.

Voor de tot heden onderzochte Afrikaansche pijl-vergiften bestaat, zoo al geene zekerheid, dan toch, volgens FRASER, groote waarschijnlijkheid, dat *Strophanthus Kombé* OLIV. daartoe het hoofdbestanddeel oplevert *).

Wat echter het oudste der tropische pijl-vergiften betreft, het *curare* der Indianen uit de binnenlanden van Zuid-Amerika, dáárover is, in de 2 à 300 jaren sinds men er in Europa kennis van droeg, zeker verreweg het meest geschreven, maar nog altijd het minst met zekerheid bekend.

Sedert ik, in 1856, mijn Hoofdstuk over *Venena sagittaria* schreef †), is aan de kennis omtrent den oorsprong van dit merkwaardig pijl-vergift slechts zeer weinig toegevoegd.

---

*) Zie dáárover mijne vroegere Bijdragen in de *Verslagen en Mededeelingen* der Kon. Akad. v. Wet., Afd Natuurkunde, 2de Reeks, Deel VI, VII en XI.

†) *Handleiding tot de Vergifleer*, Tweede druk, blz. 415.

Niettegenstaande mijne destijds met zorg gedane nasporingen, de vroegere mededeeling van J. MÜLLER *) en de latere van CL. BERNARD †), legde nog kortelings de beroemde Hoogduitsche toxicoloog TH. HÜSEMANN de apodictische verklaring af: „Dass wir ueber die Species, welcher das Curare seine Giftig„keit verdankt, noch ganz im unklaren sind" §).

Dit mag te sterker bevreemden, daar juist dit pijl-vergift, om zoo te zeggen, wereldvermaard is geworden, zoo door zijne aanwending in de geneeskunde, als vooral door de ongemeen veelvuldige toepassing, die er in de laatste 25 jaren van werd gemaakt voor de experimenteele physiologie.

Het curare was en is altijd nog bij eenige Indiaansche volksstammen uit Hollandsch, Fransch, Engelsch en z. g. Spaansch Guyana, alsmede uit het Noorden van Brazilië, in gebruik tot het vergiftigen hunner blaas- en boog-pijlen.

Ofschoon de collectieve benaming „curare" in Europa het burgerrecht in de wetenschap heeft verkregen, draagt het op de vindplaatsen nog verscheidene andere namen, die, naar de dialekten der indigenae of der reizigers, op verschillende wijzen worden uitgesproken of geschreven, als: curura, curaré, coerare, urari, uraré, oerali, woorara, wourari, wourali, enz. Er zouden drie hoofd-variëteiten van voorkomen, het Macoesie , het Sipo- **) en het Uva-curare, doch de onderscheidene kenmerken daarvan zijn niet met zekerheid op te geven en nog minder die van meer dan een half dozijn andere plaats- of stam-variëteiten. Zij verschillen echter onderling blijkbaar, meer of minder, in kleur, in wijze van bewaring en in krachten.

De kleur is bruinrood, of donkerbruin, of ook pekachtig zwart, althans in gedroogden toestand.

Bewaard worden zij, behalve aan pijlen of pijlspitsen gestreken, in halve kalebassen of flesch-komkommers en in aarden

---

*) *Encyklopädisches Wörterbuch der mediz. Wissenschaften*, von Busch, Band 36, S. 468, in articulo Woorara.

†) *Leçons sur les effects des substances toxiques*, etc., 1857, pag. 238.

§) *Handbuch der gesammten Arzneimittellehre*, 1875, S. 932.

**) Deze variëteit (of soort?) wordt ook, naar den volksstam, „tikunas" genaamd. Naar de stammen, landstreken en rivieren staan de curare-variëteiten nog onder vele andere namen te boek.

potjes, kruikjes of schaaltjes, zoodat in den handel voornamelijk twee soorten, „kalebas-" en „potjes"-curare worden onderscheiden.

Het krachtsverschil der beproefde curare-variëteiten zoude, volgens sommigen, van 1 : 6, volgens anderen, slechts van 1 : 3 uiteenloopen.

Ook de bereidingswijze, die in den regel geheim wordt gehouden, doch in het algemeen eene groote overeenkomst schijnt te bezitten, loopt, naar de berichten van enkele ooggetuigen *in loco*, zoowel wat het vermoedelijk hoofdbestanddeel, als vooral wat de vele *bijmengselen* betreft, eenigermate uiteen.

Over de laatsten — men gewaagt van 10 à 20 en meer ingrediënten — zal ik niet handelen, als niet behoorende tot mijn tegenwoordig onderwerp; alleen kan ik niet nalaten, bij één daarvan, het slangen-vergift namelijk, even stil te staan.

Hoewel het toevoegen van *venenum viperinum* niet bepaald algemeen schijnt, pleiten de mededeelingen van sommige reizigers voor de niet zeldzame aanwending hetzij der geheele koppen, hetzij slechts der gifthaken, of ook van uitgeperst vocht der giftklieren, inzonderheid van *Trigonocephalus*- en *Crotalus*-soorten, bij de bereiding van eenige variëteiten of soorten. Zoo beweerde WILDEBOER dit voor Hollandsch Guyana, GOUDOT voor Fransch, BANCROFT en WATERTON voor Engelsch Guyana en VON MARTIUS voor Brazilië.

In de Hoofdstukken mijner Handleiding, waar over „pijlvergiften" en over „gift-slangen" wordt gesproken, wees ik met een woord daarop, als een punt van nader onderzoek der vraag: of misschien, meer dan in de vele plantaardige ingrediënten, de hoofdkracht van het curare in de aanwezigheid van slangen-vergift kon gelegen zijn?

Deze kwestie werd toen niet gesteld op grond eener mij eerst later bekend geworden opgaaf, dat curare, bij verwarming, den eigenaardigen reuk der ratelslangen zoude ontwikkelen, maar eensdeels, dewijl het, even als venenum viperinum, in gedroogden toestand jaren lang zijne doodelijke kracht onverzwakt blijft behouden *), en anderdeels omdat het, ook hierin overeenkom-

*) Vele jaren geleden ontving ik door de goedheid van den Secretaris van het *Zeeuwsch Genootschap der Wetenschappen*, den Heer DE STOPPELAAR, onder

stig met het slangen-vergift, weinige of geene toxische werkdadigheid openbaart, althans in betrekkelijk geringe dosis bij het inbrengen in de maag, bij z.g. toediening *per os*. Doch het sterkst trok, voor dit vraagstuk, mijne aandacht, dat CHRISTISON voor het vergift van *Naja tripudians* MERR. en BRAINARD voor dat van *Crotalus horridus* DAUD., bij inoculatie-proeven op dieren, onafhankelijk van elkaâr, hadden waargenomen, dat daarbij verlamming van de beweegzenuwen (de later gebleken hoofdwerking van het curare) op den voorgrond scheen te treden. Deze, trouwens reeds lang te voren door anderen gedane, vraag werd sedert ook door CL. BERNARD en door PELIKAN, bijna gelijktijdig, opnieuw ter sprake gebracht. Hunne, mijns inziens, niet streng genoeg in vergelijkenden zin genomen dierproeven en reactiën hebben echter ten dezen opzichte tot een grootendeels ontkennend resultaat geleid.

Ook de Heer TH. HÜSEMANN — die mij de eer aandeed, in zijne vergiftleer *), mijne bewerking van het hoofdstuk der „Venena sagittaria", evenals die der meeste andere onderwerpen uit het Planten- en Dierenrijk, immers in substantie, in haar geheel over te nemen — roerde dit punt met een enkel woord aan, doch als eene vluchtige „Hypothese", die naar zijn gevoelen „völlig muss wegfallen".

Het verschafte mij, ik beken dit, wel eenige *Schadenfreude*, toen ik eenige jaren daarna, in 1867, in het *Supplement* op zijn Handboek, zijne nadere verklaring lezen mocht: in curare, door APPUHN, veelvuldig voor medisch en physiologisch gebruik geleverd, „selbst Schlangen-zähne gesehen zu haben"!, zonder daarbij thans mijne bovengenoemde „hypothese" te herdenken.

---

anderen, een bundeltje curare-blaaspijltjes, uit West-Indië afkomstig, ten geschenke voor mijne bemoeijingen in het determineren van eenige toxicologische zeldzaamheden uit de collectie van het Genootschap. Volgens gedane opgave, waren deze pijltjes daar aangekomen in 1802! Bij onderzoek bevond ik ze toen ('t was tusschen 1850 en 1860) nog zeer krachtig werkzaam. Dezer dagen verzocht ik den Heer BINNENDIJK, Officier van Gez. der 1e klasse te Amsterdam, deze pijltjes op nieuw te beproeven, waaraan deze terstond, met zijne mij bekende uitstekende zaakkennis en welwillendheid, heeft voldaan. Het bleek, dat ze nu nog altijd — dus na meer dan 77-*jarigen ouderdom* — onverzwakt de karakteristieke curare-werking hebben behouden.

*) *Handbuch der Toxicologie*, 1862, S. 522—529.

Tot versterking van deze, kan hier nog worden vermeld de waarneming van RICHARD SCHOMBURGK, dat Indianen dikwijls de gifthaken van door hen gedoode ratel- en driehoekskopslangen plegen uit te breken en mede te nemen, zonder zich over het daarmede beoogde doel te willen uitlaten. Nog zou, in haar voordeel, kunnen worden aangevoerd het bevreemdende der standvastige identiteit in werking van alle curare-variëteiten, in tegenstelling met de uiteenloopende en nog altijd onzekere planten, die het hoofdbeginsel daarvoor zouden opleveren. Wel wordt door sommige reis-beschrijvers van naam uitdrukkelijk verzekerd: dat bij de bereiding van pijlvergift, die zij bijwoonden, geen slangengift werd toegevoegd; maar kan zulks niet, bij de, vele uren, soms twee dagen, voortgezette bewerking, vroeger of later, buiten hun weten, in het geheim zijn geschied? Het zou voorzeker niet de eerste maal zijn geweest, dat Europeanen door inlanders werden verschalkt. Daartoe bestond vroeger reeds eene gereede aanleiding in hun geloof, dat de kracht van dit vergift, te gelijk met de opheffing van het geheim, zou verloren gaan, en later eene nog sterkere, in hunne vrees van, bij het bekend geraken der ware bereiding, het monopolie van het curare, als handelsartikel, te zullen verliezen.

Tot mijn leedwezen was ik zelf nimmer in de gelegenheid gesteld — welke moeite ik mij ook heb gegeven — om eene reeks naauwkeurige vergelijkende dierproeven te nemen met het vocht uit de giftklieren van *Trigonocephali* of *Crotali*. Dit zij alsnog aan toxicologen en physiologen aanbevolen.

Hoe dit zijn moge, vrij algemeen wordt de bijmenging van het besproken en tal van andere ingrediënten uit het dierenrijk als eene bijzaak aangemerkt, en het voornaamste bestanddeel van het curare, evenals bij de overige bekende pijlvergiften het geval is, aangenomen als van plantaardigen oorsprong te zijn.

In weerwil nogtans der onvermoeide pogingen van de reeds genoemde reizigers en natuuronderzoekers — bij wier namen mede aan die van BOUSSINGAULT, CASTELNAU, DE LA CONDAMINE, HEBERDEN, VON HUMBOLDT, PÖPPIG, RALEIGH, SPIX, YOUD mag worden herinnerd, is men, in onzen tijd, volstrekt nog niet zeker omtrent de ware moederplant van dit raadselachtig pijlvergift.

„De moederplant" zeg ik, want, afgaande op onze kennis van de onderzochte Aziatische en Afrikaansche pijlvergiften, zou hier insgelijks kunnen worden verondersteld, gelijk werkelijk door meerderen onnadenkend wordt gedaan, dat aan alle curare-variëteiten, in de hoofdzaak, één en dezelfde vergiftplant ten gronde ligt. Deze toch — op het opmerkingswaardige hiervan heb ik reeds gewezen — vertoonen alle, op kleine verschillen na, eene overeenkomstige physiologische werking. Even zeker als het oepas radja de tetanische *strychnine*-verschijnselen laat waarnemen, het oepas antsjar en het Afrikaansche pijlvergift, respectievelijk, de hartverlammende werking der *antiarine* (van MULDER) en der *strophanthine* (van FRASER) openbaren, zóó uiten zich al de onderscheidene specimina van het curare, uit welke oorden van Zuid-Amerika dan ook verkregen, zeer kenmerkend, door hun ongemeen krachtig paralyseerend vermogen, uitsluitend op de peripherische beweegzenuwen, zonder gelijktijdige opheffing der spierprikkelbaarheid, een vermogen, dat thans algemeen aan de, uit hen te bereiden, en insgelijks analoog werkende, *curarine* (van PREIJER) *) wordt toegeschreven.

Met de gevolgtrekking echter, om uit de physiologische werking tot de identiteit der moederplant te besluiten, behoort men, zonder het botanisch bewijs, zeer voorzichtig te zijn. Immers schijnt niet alleen het vergift van sommige tropische slangen, maar ook dat, hetgeen uit aethyl-, amyl- en methyl-verbindingen of derivaten van narcotine, atropine en andere planten-alcaloïden, kan worden verkregen, bijv. de *cotarnine* (van WÖHLER), in meerdere of mindere mate, analogie in werkingswijze met de curarine te vertoonen.

Ook mag nog minder uit het oog worden verloren, dat de werkzame beginselen van meerdere planten uit geheel verschillende orden dan die, waartoe, vroeger of later, „de moederplant" van het curare gezegd werd te behooren, evenzeer een curarine-achtig vermogen op de motorische zenuwen bezitten.

---

*) Is deze wel een waar *planten*-alcaloïde? Of hare formule ($C_8H_{15}N$) wel geheel vaststaat, zou ik, na de proeven van KOCH, betwijfelen. Het was, dunkt mij, eene niet ondankbare taak voor de scheikundigen, om eene vergelijking tusschen haar en de z. g. *echidnine* of *viperine* (van Lucien Buonaparte), eene mede stikstofhoudende extractiefstof uit slangen-vergift, te bewerkstelligen.

Als zoodanig ten minsten wijst HERMANN, ter loops, op enkele *Agaricus-*, *Anchusa-*(?), *Cynoglossum-*(?) en *Echium*(?)-soorten *) en HUSEMANN, echter mede niet dan in het voorbijgaan, op *Conium-*, en *Wrightia* (?) †).

Deze bedenkingen tot nadere en meer naauwkeurige vergelijkende proefnemingen in het midden latende, is het eene daadzaak, dat verschillende planten als „moederplanten" van het curare worden opgegeven. Bijna gelijkluidend evenwel en onder velerlei inlandsche volksnamen staan zij in het algemeen te boek als z.g. „lianen" of „bosch-touwen", slinger- of klimplanten alzoo, van welke dan veeltijds de schors der jonge takken, of ook de wortelbast, tot de bereiding worden gebezigd.

Onder de aangegeven „moederplanten" dan van dit pijl-vergift mag wel, niet dan zeer twijfelachtig, ook wat hare nomenclatuur aangaat, gewag worden gemaakt van het volgende drietal:

De *Cocculus Amazonum* MART., uit het Amazonen-dal.

De *Cocculus toxiferus* WEDDELL, uit Noord-Braziliё.

De *Echites suberecta* NEES, uit Guyana.

Over de laatstgenoemde, tot de Euapocyneae ENDL. behoorende, weet ik niet meer, dan dat zij *inter alias* „vermeld" wordt.

Voor de beide eersten, uit de orde der Menispermaceae ENDL., bestaat wel is waar eenig meer vermoeden, maar dewijl haar vergiftig beginsel, evenals dat der bekende kokkel-korrels, vermoedelijk in de *picrotoxine* moet worden gezocht, zou uit deze planten bereid curare waarschijnlijk eene geheel andere physiologische werking moeten openbaren §). De experimenteele toxicologie heeft daarover nog geene voldoende opheldering gegeven.

Eene hoogere waarschijnlijkheid dan aan de voorgaanden wordt toegekend aan een tweede drietal der veronderstelde curare-moederplanten, t. w. aan:

Rouhamon Guyanensis.

---

*) *Lehrbuch der experimentellen Toxicologie*, 1874, S. 310.

†) *Supplementband* op zijn *Handbuch*, S. 64. — Over de coniine zegt ook HERMANN, „dass es, ganz wie Curare, die peripherischen Endigungen der motorischen Nerven lähmt". S. 326.

§) Ik zeg „waarschijnlijk", omdat het zeer wel zijn kan, dat niet alle giftige Menispermaceae juist picrotoxine bevatten. Vergelijk hieromtrent het voor de Strychneae op te merken vermoedelijke onderscheid in werkzame bestanddeelen.

Strychnos toxifera.
Paullinia Cururu.

1°. *Rouhamon* (*Strychnos*) *Guyanensis* MART.) — Wat het van oudsher veelvuldig „noemen” dezer Strychnos-soort aanbelangt — ook onder andere benamingen, als *Lasiostoma cirrhosa* WILLD., als *Lasiostoma Curare* BONPLAND, ik meen insgelijks als *Toxiaria Americana* (?) — zoude zij zeker verdienen, ten dezen op den voorgrond te worden gesteld. Intusschen ontbreken bij de schrijvers, die ik er over kon raadplegen, de noodige botanische kenmerken. Veeltijds schijnen de plantkundigen in Europa slechts in het bezit gesteld te zijn geweest van enkele gedroogde planten-deelen; zelfs las ik van „bosjes takken, die van hunne bladeren ontdaan waren”. Door VON PAUW (?) zou aangeteekend zijn, dat hij aan bovenstaande „curare-liane” zware klawieren en eene peervormige vrucht, met drie schijf- of boonvormige zaden heeft waargenomen. Overigens is het deze plant, die in ons West-Indië tot bereiding van het „woorara” zoude dienen.

2°. *Strychnos toxifera* SCHOMB. — Voor deze soort bestaat eene wetenschappelijke aanwijzing, bij eene goede botanische diagnose, in de *Reisen in British Guyana*, in 1847 door RICHARD SCHOMBURGK uitgegeven. Hij is zelf ooggetuige geweest van het aandeel dezer plant in de bereiding van het curare, terwijl zij hem, door den Indiaanschen „giftkok”, als het hoofdingrediënt daartoe opleverende werd opgegeven.

Nogtans is zijne opgave, zoo ver mij bekend, in de laatste dertig jaren, niet nader bevestigd en bestaan, naar mijne meening, geene afdoende gronden, dat juist deze Strychnos-species de „ware” moederplant van het curare zou zijn. Immers vermeldt de beroemde reiziger zelf, dat, nevens haar, en onder meer plantaardige bijmengselen, nog twee Strychnos-soorten voorkwamen (*S. cogens* BENTH. en *S. Schomburgkii* KLOTZ). Later werd bovendien door CL. BERNARD en door JOBERT, ingevolge berichten van CASTELNAU over eene analoge curare-varieteit, van eene vierde species van Strychnos (*S. Castelnoeana* WEDD.) gewag gemaakt.

Vreemd is, in ieder geval, dat bijaldien men hier inderdaad met ware strychneae te doen heeft, daarin een geheel ander

werkzaam beginsel voorkomt, dan die welke in de overige, goed schei- en plantkundig onderzochte, Strychnos-soorten, bijv. de *S. nux vomica* LINN., de *S. St. Ignatii* BERG. en de *S. Tieuté* LESCH., worden aangetroffen, namelijk de welbekende strychnine en brucine, die beide, in toxicodynamischen zin, een hemelsbreed verschil met de curarine, uit de hier besproken moederplant, opleveren *).

3°. *Paullinia Cururu* LINN. — Aan deze, of althans eene aan haar naauwverwante Paullinia-soort, tot eene geheel andere orde dan de vorigen behoorende, t. w. tot die der Sapindaceae ENDL., werd in de laatste jaren de hoofdplaats voor het onderhavige vraagstuk toegekend. Reeds op den bijnaam afgaande, komt zij, vooral volgens KOSTELETZKI, hier bijzonder in aanmerking. Op het door hem aangewezen voetspoor, meende men, nu met voldoende zekerheid, den waren oorsprong van het curare te hebben ontdekt, althans van die variëteit, welke uit Para, in Guyana, wordt verkregen.

PREYER, namelijk, vond, in eene daarmede gevulde kalebas, eene vrucht, die door TULASNE werd herkend als van eene Paullinia (waarschijnlijk de Cururu) afkomstig te zijn. Deze gelukkige vondst verkreeg eene nog hoogere beteekenis, toen, bij proeven op kikvorschen, met een naar curare riekend extract dier vruchten, door hem en CL. BERNARD genomen, volkomene analogie in werking met die van dit pijlvergift scheen te zijn gebleken.

Uit het nieuwste werk over ons onderwerp — het bovenaangehaalde van HÜSEMANN over *Arzneimittellehre*, een tiental jaren later verschenen — blijkt niet, dat ook deze, overigens zoo hoogst gewichtige, ontdekking sedert door meerdere of nadere nauwkeurige proeven met Paullinia-vruchten of zaden is bevestigd geworden, hetgeen, wegens de weinig omschrevene, voorloopige mededeelingen, daarover in de *Comptes rendus* van 1865 gedaan, zeer wenschelijk ware geweest. Botanici, die in het bezit der genoemde plantendeelen mochten zijn, zullen zich, als

*) Bij dezen twijfel verdient de door PELIKAN gedane ontdekking niet onopgemerkt te blijven. De hier genoemde alcaloïden, hoezeer dynamisch volkomen tegenovergesteld, vertoonen onderling eene groote overeenkomst in chemische reactie.

nog voor de vergiftleer verdienstelijk kunnen maken, door eene hoeveelheid daarvan af te staan aan een of ander onzer physiologische of toxicologische (?) laboratoria. Op goede tegenproeven toch met de hier, als constituentia opgegeven, bladen, basten, wortels, vruchten, enz. komt, ter eindelijke beslissing, alles aan, en toekomende reizigers moeten er vóór alles op bedacht zijn, om te zorgen, steeds een tot proefneming voldoenden voorraad niet alleen der gekwalificeerde plantaardige ingrediënten, maar ook der overige planten-organen, mede te nemen. —

Bij den voor dit vraagstuk, men ziet het, nog steeds overgebleven twijfel, werd ik onlangs aangenaam verrast door eene belangrijke toezending uit West-Indië, die mij tot bovenstaande bijdrage de gewenschte aanleiding schonk.

In een vereerend schrijven d.d. 4 Mei l.l. van den Heer Gouverneur der Kolonie Suriname, Jhr. C. A. VAN SIJPESTEIJN, ingesloten, mocht ik van Zijne Exc. eene fraai uitgevoerde photographie, benevens een paar gedroogde bebladerde takjes, der „*Ourari- of Wourali-plant van Guyana*" ontvangen, welke ik het genoegen heb, ter bezichtiging aan te bieden. De Heer VAN SIJPESTEIJN bericht mij daarbij, dat hij deze voorwerpen ten geschenke had gekregen van den Off. v. Gez. der 1e klasse bij de Fransche Marine JULES CRÉVAUX, die vele nasporingen over het curare had gedaan, en nog deed, laatstelijk te Para *), bij Ste Marie de Béléni, werwaarts Z.E.G., met medewerking van Zijne Exc., van Paramaribo uit, eenen tocht langs de Oijapoek-rivier had ondernomen.

De Heer CRÉVAUX zelf had omtrent de door hem, *in bloei*, waargenomen plant geschreven: „qu'elle est la plus active de „la curare. Elle était déjà connue des naturalistes, mais elle „n'avait pu être classée, parcequ'on ne l'avait pas trouvée *en „fleurs*."

Ofschoon het mij wel voorkomt, dat deze specimina van eene of andere (misschien der opgenoemden) Strychnos-soort afkomstig zijn, durf ik mij dáárover volstrekt niet uitspreken. Gaarne gevolg gevende aan het verzoek van den zoo belangstellenden

---

*) In dezelfde landstreek dus, van waar PREYER zijn — Paullinia-vruchten bevattend — curare schijnt te hebben verkregen.

toezender, heb ik dezelve daartoe ter hand gesteld aan ons geacht medelid C. A. J. A. OUDEMANS, in de hoop en het vertrouwen, dat Z.HoogGel. hierdoor in staat mogt zijn, de onderhavige kwestie, van uit het botanisch standpunt, te kunnen toelichten.

NASCHRIFT.

De mij door ons medelid VAN HASSELT ter hand gestelde voorwerpen, waarvan in deze verhandeling gewaagd wordt, bestonden in eene photographie en een gedroogd bebladerd takje. Het laatste droeg noch bloem, noch knop.

Allereerst trof mij de weinige overeenkomst tusschen de gephotographeerde en de gedroogde bladeren, zoodat ik er dan ook niet aan twijfel, of de plantensoort, welke tot het vervaardigen der eersten heeft moeten dienen, was soortelijk onderscheiden van die, waarvan het gedroogde takje werd afgenomen.

De naam der plant, waartoe het gedroogde exemplaar gebracht zoude kunnen worden, heb ik niet kunnen vinden. De gephotographeerde afbeelding schijnt mij echter toe de meeste overeenkomst te hebben met *Strychnos Guyanensis* VON MARTIUS.

OVER DE CONTRACTIE VAN WORTELS.

DOOR

Dr. HUGO DE VRIES.

Sedert ENGELMANN's onderzoekingen is het algemeen bekend, dat de contractie van spieren op een eigenaardige werkzaamheid van bepaalde vormbestanddeelen, de zoogenoemde spierstaafjes, berust, waarbij deze uit de stof waarin zij liggen water opnemen, en zich daardoor verbreeden en verkorten. De opneming van water geschiedt door imbibitie; daarbij wordt de spiermassa stijver. Na de contractie verliezen de spierstaafjes het opgenomen water, worden langer en smaller, en de spier herneemt haar vroegeren vorm.

De tot nu toe bekende verschijnselen van contractie van planten-organen berusten op een geheel ander beginsel; daarbij toch verliezen de cellen water; vóóraf gespannen celwanden contraheeren zich elastisch en worden slapper. Zoo b. v. in de bladgewrichten van Mimosa en in de meeldraden der Cynareeën.

De onderzoekingen van ENGELMANN deden in mij den wensch ontstaan een tot nu toe nooit bestudeerd proces van contractie in het plantenrijk, n. l. de contractie der wortels, nader te leeren kennen, en na te gaan of dit wellicht een grootere overeenkomst met de samentrekking van dierlijke organen vertoont dan de overige contractieverschijnselen van plantendeelen.

In de volgende regels wensch ik de voornaamste uitkomsten van mijn onderzoek in het kort mede te deelen.

Vooreerst een enkel woord over het verschijnsel zelf, dat, naar het schijnt, minder algemeen bekend is dan het verdient.

Het is voor planten van groot belang om zoo stevig mogelijk in den grond bevestigd te zijn. Wanneer de grond in het voorjaar tijdens het kiemen der zaden zeer vochtig en daardoor zeer los is, en dan in den zomer uitdroogt en inkrimpt, zouden de wortels der jonge planten noodzakelijk boven den grond moeten komen. Dit gebeurt niet, integendeel, men ziet den wortelhals gewoonlijk in den zomer en in het najaar dieper in den grond verborgen dan in het voorjaar. De planten kruipen dus, als men het zoo noemen mag, den grond in, en dit kan natuurlijk slechts door een samentrekking der wortels geschieden. Zulk een samentrekking vindt dan ook werkelijk plaats; ik heb mij daarvan vroeger door rechtstreeksche metingen der wortels overtuigd. Zij bedroeg bij roode klaver en suikerbieten in 3—6 weken 10—15 pCt., soms zelfs 20—25 pCt. der lengte.

De buitenste schors wordt bij deze contractie passief samengedrukt en verkrijgt daardoor talrijke dwarsplooien, die men aan oudere wortels zeer dikwijls zien kan, en die als bewijs kunnen dienen, dat de wortel zich gecontraheerd heeft. Ik zag deze rimpels o. a. bij Hyacinthus orientalis, Narcissus, Allium Cepa, Iris pallida, Carum Carvi, Conium maculatum, Trifolium pratense, Dipsacus sylvestris, Althaea rosea, Rumex Acetosa, Eryngium maritimum. Men behoeft slechts niet al te jonge planten dezer soorten uit te trekken om vlak onder den wortelhals deze rimpels zeer duidelijk te zien.

In den zomer van 1878 en 1879 heb ik met contractiele wortels de volgende resultaten verkregen.

1°. Brengt men de afgesneden wortels in water, zoo verkorten zij zich. Deze verkorting is in de eerste uren vrij snel, en neemt dan in snelheid af, doch duurt meestal eenige dagen. Zij bedroeg b. v. bij:

Lappa tomentosa	in	3 dagen	. . . 7.9	pCt.
Dipsacus sylvestris	"	3 "	. . . 4.0	"
Carum Carvi	"	2 uur	. . . 1.4	"
" "	"	3 dagen	. . . 6.0	"

2°. Bij het liggen in water nemen de wortels in dikte toe; deze dikteverandering kan aan dunne schijfjes onder den mikro-

skoop reeds binnen eenige minuten gemeten worden. Bij 8-malige vergrooting vond ik haar o. a. bij:

Carum Carvi	8	pCt.
Beta vulgaris	6	"
Conium maculatum	8	"

3⁰. De wortels nemen in water aan volumen toe en worden daarbij stijver; het eerste vond ik door bepaling van de mate van verkorting en verbreeding van een zelfde weefselstuk en berekening der volumen-verandering.

4⁰. Isoleert men de verschillende weefsels van een contractielen wortel, zoo ondergaan zij in water dezelfde veranderingen als de geheele wortel. Deze veranderingen zijn echter in de jongere deelen krachtiger dan in de oudere. Ik vond de verkorting bij Cynarae Scolimus in 20 uur:

voor de schors	2	pCt.
voor het peripherische houtweefsel	7	"
voor het centrale houtweefsel	3	"

En de verbreeding bij dezelfde plant, in 1 uur, bij 22-malige vergrooting:

voor de schors	15	pCt.
voor het cambium	18	"
voor het centrale hout	9	"

5⁰. Oudere wortels verkorten zich in water niet meer.

6⁰. De parenchymcellen zijn de contractiele elementen; de overige cellen gedragen zich passief, en bieden bij de contractie een weerstand. In de wortels van kruidachtige planten is het parenchym op zoo sterke wijze ontwikkeld, dat men zich niet verwonderen kan, dat dit weefsel hier een bizondere physiologische rol te spelen heeft. Deze rol is nu klaarblijkelijk die der contractie. Zoowel in de schors als in het hout is het parenchym sterk ontwikkeld; beide contraheeren zich in water. Het gelukte mij ook onder den mikroskoop de verkorting en verbreeding bij wateropneming aan afzonderlijke parenchymcellen rechtstreeks waar te nemen.

De kurklaag der schors is passief; dit ziet men uit de boven beschreven dwarsplooien. Ook de houtvaten zijn passief; ook zij zijn door de contractie samengedrukt en heen en weergebogen, gelijk men op overlangsche sneden duidelijk zien kan. Ook de bastvezels en overige dikwandige elementen moeten als passief beschouwd worden. Bedenkt men dat het weefsel van wortels zoo uiterst arm aan houtvaten, houtvezels en bastvezels is, en een zoo dunne kurklaag bezit, dan ligt het voor de hand, hierin een zeer doelmatige adaptie te zien, wier doel het is, den weerstand bij de contractie zoo gering mogelijk te maken.

De vereeniging van actief zich contraheerende en passief gecontraheerde weefsels moet natuurlijk weefselspanningen ten gevolge hebben. In werkelijkheid bestaan deze dan ook, gelijk men uit de grootte-veranderingen der afzonderlijke weefsels bij het isoleeren ziet. Bij onvolledige isoleering krommen zich de deelen.

7°. De contractie door opneming van water is een verschijnsel van turgor; zij wordt opgeheven door alle middelen die den turgor vernietigen. Men ziet dit b. v. daaruit, dat wortels zich bij het verwelken verlengen, in plaats van zich, gelijk groeiende stengeldeelen, te verkorten. Men kan den turgor door dooden van het protoplasma, of door de inwerking van zoutoplossingen opheffen; in beide gevallen verlengen zich de wortels. In de dwarsrichting krimpen zij daarbij echter in.

8°. In de levende wortels zijn de celwanden door den turgor der cellen gespannen, en daardoor in de richting der as verkort. Men ziet dit, wanneer men de wortels niet, zooals sub 7, eerst water laat opnemen en dan den turgor vernietigt, maar ze terstond van dezen berooft. Zij verlengen en versmallen zich daarbij evenzeer, hoewel natuurlijk in mindere mate.

9°. Wortels, die het vermogen bezitten zich door opneming van water in korten tijd sterk te contraheeren, vertoonen in de natuur in lange tijden blijvende verkorting. Want juist die wortels, aan welker rimpels men de blijvende verkorting het duidelijkst ziet, contraheeren zich in water het sterkst. Met deze blijvende verkorting moet een blijvende toeneming in dikte gepaard gaan.

10°. Het valt niet te betwijfelen, dat in contractiele wortels de

turgor dezelfde rol speelt als in jonge groeiende stengeltoppen. De groeiende cellen worden door haren turgor uitgerekt en wel in overlangsche richting meer dan in de dwarsche; deze uitrekking bevordert haren groei. Evenzoo is het met de cellen der contractiele wortels gelegen; deze worden echter in de dwarsche richting het sterkst uitgerekt, en daarbij in overlangsche richting verkort. Het is duidelijk, dat de blijvende verandering bij de wortels, evenals bij de stengels, door groei veroorzaakt wordt. Dus is de contractie der wortels slechts een bizonder geval van groei.

11°. De contractie door toeneming van den turgor kan slechts door een groot verschil in rekbaarheid der celwanden in verschillende richtingen verklaard worden. Want de uitrekkende kracht is natuurlijk in alle richtingen dezelfde. Ongelijke rekbaarheid in verschillende richtingen is een zeer algemeen verschijnsel bij plantaardige celwanden; doch zoover mij bekend is, werd tot nu toe nog nooit een zoo groot verschil aangetroffen, dat door toeneming van den turgor een kleiner worden der cellen in eene richting werd veroorzaakt. Hiertoe toch moet het verschil in rekbaarheid zoo groot zijn, dat de contractie in ééne richting, die het natuurlijk gevolg is van de uitrekking in de richting loodrecht daarop, door een even groote uitrekkende kracht niet opgeheven kan worden. Dit geval vinden wij in de celwanden van het contractiele parenchym der wortels.

12°. De contractie der wortels verschilt van die der spieren voornamelijk daarin, dat zij haren zetel in parenchymcellen heeft, en door verhooging van de spanning tusschen den wand en den inhoud van dezen veroorzaakt wordt. Verder daarin, dat zij blijvende veranderingen door groei tengevolge heeft.

Beide verschijnselen komen daarin overeen, dat de contractiele elementen (contractiele cellen en spierstaafjes) zich door opneming van water verkorten, terwijl zij daarbij dikker en stijver worden.

RAPPORT

VAN DE HEEREN

C. H. D. BUYS BALLOT en F. J. STAMKART

OVER HET TWEEDE GEDEELTE DER VERHANDELING VAN DEN HEER

Dr. E. VAN RIJCKEVORSEL

OVER DE MAGNETISCHE OPNEMING VAN DEN INDISCHEN ARCHIPEL.

Uitgebracht in de Vergadering van 25 Oct. 1879.



Omtrent de door den Heer Dr. VAN RIJCKEVORSEL aan de Natuurkundige afdeeling van de Koninklijke Akademie van Wetenschappen in de Engelsche taal aangeboden verhandeling over de horizontale intensiteit van het aardmagnetisme in den Oost-Indischen Archipel, welke op de vergadering van 31 Mei in onze handen gesteld werd, hebben wij de eer het volgende te berichten.

Dit tweede gedeelte van de verhandeling van Dr. VAN RIJCKEVORSEL bevat eene reeks van waarnemingen van horizontale intensiteit van het aardmagnetismus, op 82 verschillende plaatsen gedaan. Niet minder dan 720 bepalingen hebben daartoe medegewerkt. De wijze van waarnemen is goed geweest; slingertijd en afwijking werden beurtelings waargenomen met herhaalde opteekening der temperatuur. Hieruit zijn telkens, volgens de formulen aan de Kew-Instructions ontleend, het magnetisch mo-

ment en de horizontale intensiteit van het aardmagnetisme berekend.

Volgens deze beknopte opgaaf is het een uitgebreide arbeid, onder groote moeielijkheden en met vele opofferingen met ijver en volharding volbracht, welke allezins waardeering verdient.

Dr VAN RIJCKEVORSEL deelt vooraf eenige opmerkingen mede omtrent het aantal waarnemingen op elke plaats en de uren van den dag, waarop hij waarnam; zoo ook omtrent het gebruikte instrument: den unifilar-magnetometer van de latere constructie, in 1873 vervaardigd met lichte naalden, die slechts aan twee of drie draden konden hangen. Eene korte beschrijving ware misschien niet ondoelmatig geweest.

De verdienstelijke waarnemer, wel bewust dat de waarnemingen, onder de omstandigheden waarin zij moesten gedaan worden, niet zoo nauwkeurig konden zijn of met zoovele zorgen genomen als dit in een vast observatorium had moeten geschieden, somt verscheidene bronnen van fouten op.

Aan plaatselijke storingen in enkele gedeelten van het vulcanisch en ijzerhoudend terrein wordt toegeschreven, dat op sommige stations, waar goed onderling overeenstemmende waarnemingen gedaan zijn, het resultaat niet goed strookte met den loop der isodynamen, zooals die op de kaart uit het geheel der waarnemingen getrokken zijn, terwijl de overeenstemming van het gemiddelde resultaat met de kaart soms beter gevonden werd bij stations, waar de afzonderlijke uitkomsten te wenschen schenen over te laten. Op sommige plaatsen, zooals Larantoeka en Krakatahoe, werd elken dag een ander resultaat gevonden.

De invloed van den wind, die eenige kleine onregelmatigheid in de slingeringen der hangende naald veroorzaakte, was, naar Dr. V. RIJCKEVORSEL zegt, „*of little importance,* te minder „daar doorgaans, op het uur der waarneming, 's morgens 7—9 „uren en in het algemeen, de wind zwak was." Het schijnt te kunnen worden toegestemd, dat een geringe storing door tocht van minder bedenkelijken invloed is gebleven op de waarneming van de horizontale intensiteit, dan op die van de inclinatie.

Dr. VAN RIJCKEVORSEL wijdt verder nog meer uit over de

oorzaken van kleine fouten, waaruit echter alleen dit besluit *voor ons* volgt, dat over het geheel de verkregen resultaten niet zóó nauwkeurig zijn, als zij onder gunstige omstandigheden — zooals in een magnetisch observatorium — zouden geweest zijn.

Zoo onder anderen was het op de stations niet wel doenlijk, de geheele proef ter bepaling van de torsie der draden te doen. Hij zorgde, dat de torsie zoo gering mogelijk bleef. Dit geschiedde gewoonlijk in den avond, wanneer geene andere waarnemingen te doen waren en werd van tijd tot tijd herhaald. De invloed der torsie is vooral bepaald gedurende de eerste dagen, als een nieuwe draad was aangelegd. Dan werd een gemiddelde van de eerste uitkomsten genomen, welke gemiddelde zoolang gebruikt werd, als de nieuwe draad diende. De correctiën, aan de nieuwe torsie toe te voegen, veranderden slechts tusschen 0.00010 en 0 00020.

Ongelukkig is evenwel nog eene oorzaak van fouten ontdekt na drie jaren arbeids, toen de verf van de tent, waaronder de waarnemingen geschiedden, losliet: te weten, dat in het midden van de pool of top van de tent twee ijzeren schroeven verborgen waren.

Dr. VAN RIJCKEVORSEL heeft het niet noodzakelijk geacht dit vroeger te vermelden, omdat de miswijzing waargenomen is in de open lucht, en omdat bij het bepalen van de inclinatie de afstand tusschen de schroeven en de inclinatie-naald steeds groot genoeg geweest is, om allen twijfel weg te nemen, dat de resultaten konden geleden hebben door invloed van die schroeven. Maar bij de waarneming van de horizontale intensiteit waren zij nader bij de doos en is het Dr. VAN RIJCKEVORSEL leed, dat hij nimmer tijd gevonden heeft, na die treurige ontdekking, eene lange reeks waarnemingen te doen (in aanmerking genomen de geringe hulpmiddelen die hij bezat), om uit te maken, hoever de invloed der schroeven zich heeft kunnen uitstrekken. Hij had altijd gehoopt deze waarneming nog te Batavia te kunnen doen, maar is door ongesteldheid en gebrek van tijd daarin verhinderd.

„Er zijn slechts een half dozijn gelegenheden geweest”, zegt Dr. V. RIJCKEVORSEL, „waarbij de tent niet gebruikt is: dus „kon er (bij de overigen) een constante fout bestaan, die even„wel zekerlijk zeer klein zal zijn”.

Het kan wezen, dat de fout, door de schroeven veroorzaakt, klein is, maar dat zij constant zoude geweest zijn, is niet wel aanneembaar bij de verschillende magnetische inductiën, maar vooral ook bij de verschillende betrekkelijke standen van schroeven en magneetnaald, zóó wat den onderlingen afstand betreft, als wat de richting aangaat dier afstandslijn in de ruimte. Dat de schroeven roestig en waarschijnlijk niet van hard staal waren, zooals Dr. VAN RIJCKEVORSEL zegt, schijnt weinig af te doen; ook niet dat de top of pool van de tent bij onderzoek geen invloed scheen te hebben op een gevoelig kompas.

Het ware doelmatig geweest, dat dit onderzoek naar den invloed der schroeven in extenso ware medegedeeld: voorts kon een schetsteekening van de tent met den magnetometer, zooals deze zoo gewoonlijk is geplaatst geweest, met de afmetingen der schroeven, wellicht nog tot opheldering bijdragen, — alleen om te kunnen schatten, hoe groot haar invloed heeft kunnen zijn.

Op vijf plaatsen is zoowel in als buiten de tent waargenomen, hetgeen de gelegenheid aanbiedt de resultaten te vergelijken.

Te Prigi in een huis	7.4225
in de tent	7.4049
Verschil — 0.0176.	
Te Martapoera in de galerij	8.2028
in de tent	8.2045
Verschil + 0.0017.	
Te Singkawang in de open lucht. . . .	8.2431
in de tent	8.3062
Verschil + 0.0131.	
Te Sintang onder een afdak	8.2435
in de tent	8.2423
Verschil — 0.0012.	
Te Sidjoendjoeng in de galerij.	8.1385
in de tent.	8.1342
Verschil — 0.0043.	

Indien deze verschillen voornamelijk aan de ijzeren schroeven

moeten geweten worden, dan blijkt hieruit, dat haar invloed niet constant is. Er kunnen echter ook andere oorzaken tot de gevonden verschillen bijgedragen hebben; hetgeen niet onwaarschijnlijk is, omdat ook op andere plaatsen verschillen tusschen de onderscheidene bepalingen gevonden worden, die ééne, soms twee eenheden in de tweede decimaal uiteenloopen.

De schrijver geeft de formulen van berekening volgens de Kew-Instructions en een voorbeeld van toepassing daarvan.

Alle uitkomsten worden, zooals zij gevonden werden, medegedeeld, uitgedrukt in Engelsche eenheden: voor elke plaats is het magnetisch moment berekend en de horizontale intensiteit. De waarnemingen hebben geregeld in den voormiddag plaats gehad tusschen 7 en 12 uren. Als gemiddelde tijd is 8u30′ aangenomen, en tot dit tijdstip zijn alle uitkomsten herleid door het bedrag eener gemiddelde variatie toe te passen.

Voor de waarde van dit bedrag der variatie, gemiddeld genomen, heeft Dr. v. RIJCKEVORSEL uit zijne waarnemingen een tafeltje afgeleid voor elk verschil in tijd met 8⁰30′, van 5 tot 5 minuten. Hij maakte daartoe gebruik van eene manier van interpolatie, die hij zelf erkent niet de beste wijze te zijn: zoodat hij ook terecht aan de getallen, bij het begin omstreeks 7 en bij het einde 12½u, weinig of geene waarde toekent.

Indien eene *uitdrukking* gevonden was voor de wet der variatie van de horizontale intensiteit tusschen 7½ en 11u 's morgens, dan zouden de getallen, geldende voor waarnemingen *vroeger* dan 7½ uren en die na 11 uren, met eenige meerdere waarschijnlijkheid kunnen aangewezen worden, en het geheele tafeltje iets meer afgerond zijn. Echter gelooven wij niet, dat dit een merkelijk verschil van uitkomst zoude opleveren.

Vervolgens zijn de intensiteiten tot het midden des jaars herleid en ook ten slotte tot het midden van 1876; waartoe gebruik gemaakt werd van de waarnemingen van Dr. BERGSMA te Batavia.

De geringste intensiteit werd waargenomen op de zuidelijke plaatsen, de grootste op de noordelijke, zonder dat met volkomen zekerheid de lijn voor het maximum kon bepaald worden, omdat Dr. VAN RIJCKEVORSEL nergens genoeg benoorden die lijn geweest is.

Ten slotte is aan het werk een kaart toegevoegd, waarop zoo goed mogelijk de isodynamen getrokken zijn.

Dr. v. RIJCKEVORSEL beschrijft, hoe hij te werk is gegaan om die isodynamische lijnen te bepalen. Het geheele terrein tusschen 95⁰ en 134⁰ lengte en 10⁰ N.Br. en 6⁰ Z.Br. is in vier dusgenoemde provinciën verdeeld. De gemiddelde lengte en gemiddelde breedte der plaatsen, in deze provinciën liggende, wordt de lengte en breedte van het zwaartepunt genoemd, waaraan dan ook de gemiddelde magnetische intensiteit zoude toekomen; het verschil (a) der intensiteit op eene andere plaats met deze gemiddelde intensiteit wordt gevonden door de toepassing der formule $a = bx + cy$, waarin x en y de verschillen zijn van hare lengte en breedte met die der gemiddelde plaats. Volgens hetgeen p. 15 der verhandeling (manuscript) gezegd wordt, is evenwel van de uitkomsten dezer berekening niet overal streng gebruik gemaakt, maar zijn, bij het teekenen der lijnen op eene geschikte wijze, kleine wijzigingen aangebracht.

Op de kaart zijn de lengtegraden even groot geteekend als de breedtegraden. Schoon het voor het doel wel voldoende is, omdat de Archipel nabij de linie is, zoude een Mercators-projectie de voorkeur verdiend hebben.

Nog moet opgemerkt worden, dat geen opgaven gedaan zijn, hoe de gang der chronometers gevonden is. Eenmaal, pag. 14 (m.s.), wordt van twee stations vermeld, dat de tijdmeters dáár in geen goeden toestand waren, zoodat de waarnemingen berekend zijn zonder eenige correctie voor den gang der tijdmeters.

Het werk van den Heer Dr. v. RIJCKEVORSEL is, zooals in het begin van dit verslag is gemeld, een zeer te waardeeren arbeid; slechts niet zoo goed als die onder andere omstandigheden had kunnen zijn.

Enkele duisterheden kunnen misschien nog opgehelderd worden, zooals omtrent den invloed der schroeven, den gang der chronometers, de wijze der torsiebepaling.

Deze inlichtingen zal de Heer Dr. v. RIJCKEVORSEL gewis wel genegen zijn nog zooveel mogelijk te verstrekken *), opdat

---

*) Terstond na van dezen wensch kennis genomen te hebben, heeft Dr. VAN RIJCKEVORSEL werkelijk nog menige inlichting gegeven. BUIJS BALLOT.

men beter tot eene waarschijnlijke schatting kunne geraken, hoeveel de uitkomsten daaronder geleden hebben. Alsdan zal eene plaatsing in de werken de Akademie nog temeer geregtvaardigd zijn.

De waarde van het werk, naar het ons voorkomt, is bepaaldelijk gelegen in de kolommen *m* en *x*, vooral van *x* die de magnetische intensiteit geeft zooals zij gevonden is.

Utrecht en *Amsterdam*.

ZIJDELINGSCHE AFLEIDING

VAN

WATER UIT EENE RIVIER OVER EEN DER DIJKEN.

DOOR

G. VAN DIESEN.

Toen in vroegere jaren dijkbreuken langs de rivieren meermalen voorvielen dan tegenwoordig, en die ongevallen, hoe ook te betreuren voor de landstreek, die er door getroffen werd, wel eens verlossing bragten voor eene andere aan dezelfde rivier gelegen streek, waarbij het water tot aan de lippen gekomen was, en welks dijk van oogenblik tot oogenblik met doorbraak dreigde, toen waarschijnlijk werd de gedachte geboren aan het vormen van eene zijdelingsche afleiding van water uit de rivier in tijd van nood, ten einde op kunstmatige wijze de verlossing aan te brengen, die de natuur ongeholpen had verschaft.

Het is, zooals u bekend is, niet gebleven bij de gedachte, maar velerlei plannen tot hare verwezenlijking werden gemaakt, zeer uiteenloopende zoowel in de plaats waar als in de wijze waarop men de afleiding wilde bewerkstelligen.

De meening, dat redding van de gevaren, die iederen winter dreigden, in dat hulpmiddel kon worden gevonden, won veld en verdrong van lieverlede andere denkbeelden en plannen van rivierverbetering. Den 15en Maart 1821, dus spoedig nadat, in 1820, voor de tweede maal in deze eeuw de Alblasserwaard door dijkbreuk was ingeloopen en onder water gezet, werd door den Koning eene commissie van negen leden benoemd, ten einde te onderzoeken waar en op welke wijze de afleiding meest doeltreffend zou zijn tot stand te brengen. Deze commissie, naar

haar mandaat genoemd de commissie tot onderzoek der beste rivierafleidingen, bragt den 13en September 1825 een uitvoerig en zeer belangrijk verslag uit, dat, in 1827, vergezeld van een tal van kaarten het licht zag.

In dat verslag vindt men eene naauwgezette overweging van de nadeelen van zijdelingsche afleiding, door middel van overlaten.

Met het oog op eene dergelijke wijze van afleiding, waarop den laatsten tijd met ernst de aandacht is gevestigd geworden, en waarop ik straks zal terugkomen, wensch ik de zoo even genoemde nadeelen kortelijk in herinnering te brengen, waarbij ik mij zal bepalen bij beschouwing van de rivier de Neder-Rijn en Lek, wier water de ten noorden gelegen grondeigenaren gaarne zuidwaarts afgeleid zonden zien.

Door *overlaat* heeft men te verstaan een gedeelte van een dijk, dat is ingerigt tot het doen overstroomen van het water, zoodra dit zekere hoogte heeft bereikt.

Over welke lengte de dijk tot overlaat moet worden ingerigt hangt af van de hoeveelheid water, die men er over wil laten loopen bij den aangenomen hoogen waterstand en van de hoogte van den vloer van den overlaat. Door vloer wordt bedoeld het bovenvlak van den dijk of den overlaat, waarover het water strijkt.

De inrigting is uitvoerig omschreven door den ontwerper, den Inspecteur-Generaal van den Waterstaat GOUDRIAAN, in het 7e deel, 1e stuk, der werken van de 1e klasse van het voormalige Koninklijke Nederlandsche Instituut.

Ik bepaal mij tot de bijvoeging dat de binnenglooijing van den overlaat tot eene zeer flaauwe helling moet worden aangeaard, ten einde het overstortende water geene uitholling aan den hiel des dijks te weeg brenge, waaruit doorbraak zou kunnen ontstaan. Eene glooijing onder 15 op 1 werd door den ontwerper voldoende geacht om den overlaat ook bij aanhoudenden overloop tegen ontgronding en doorbraak te waarborgen.

De bedoeling van GOUDRIAAN was, den overlaat te doen in werking treden, wanneer ijsgang of ijsbezetting den afvoer van water langs het rivierbed zoodanig belemmerde, dat de stijgende rivierstand de dijken met doorbraak dreigde. De afleiding over

den overlaat naar de zijde, waar het water het minste nadeel kon berokkenen, moest dan het groote nadeel van de aan de overzijde of wel benedenwaarts gelegen streek afwenden.

Met die bestemming voor oogen waren de overlaten ontworpen met den vloer op ongeveer 0,30 M. boven den hoogst bekenden waterstand bij open rivier. (De juiste hoogte was een Rijnlandsche voet, of 0,314 M.).

Het valt al dadelijk in het oog, dat eene op die hoogte geplaatste aftapping niet tot krachtig ontzet van de dijken langs de rivier kan bijdragen. Die dijken zouden dan toch, gedurende de meest volledige werking van den overlaat, het water moeten keeren tot eene hoogte niet alleen van 0,30 M. boven den hoogst bekenden waterstand, maar nog van zooveel meer als de hoogte van overloop over den overlaat ter plaatse er tegenover gelegen bedroeg. De dijken rivierafwaarts van den overlaat zouden bestand moeten zijn tegen een waterstand gelijk aan dien van de hoogte van den overlaat, dus van ongeveer 0,30 M. boven den hoogst bekenden waterstand bij open rivier. De dijken rivieropwaarts zouden een waterstand te keeren hebben ter hoogte gelijk aan dien bij het boveneind van den overlaat; het verhang in aanmerking nemende.

Is nu al eene gewenschte afleiding bij ijsgang op zeker riviervak te verkrijgen door aanleg van een overlaat naar het stelsel van GOUDRIAAN, dan geeft dus die overlaat geen ontzet aan de bovenwaarts gelegen dijken, slechts een gering ontzet aan de tegenover- en benedenwaarts gelegen dijken, en in het algemeen in het geheel geen ontzet voor een dier dijken bij een rivierstand die nog met 0.30 M. den hoogst bekenden overtreft.

Het door zoodanige afleiding geschonken voordeel mag dus wel als zeer beperkt worden beschouwd.

De commissie somt een negental redenen op waarom zij den aanleg van overlaten meent niet te moeten aanraden. Die redenen zijne bijna alle gelegen in overwegingen van finantiëelen aard, waarover men naar mijn inzien zou moeten heenstappen, indien door de uitvoering in redelijken zin een waarborg te verkrijgen was van behoud voor de streek, die men zoo noodig met groote opofferingen wenscht te vrijwaren tegen overstrooming. Dat onder die opofferingen ook zoude behooren de ver-

goeding voor het nadeel, dat het water en ijs zouden toebrengen aan de terreinen, waarhenen men het afleidde, spreekt van zelve.

Onder de geopperde bezwaren komen er twee voor, die het stelsel zelf betreffen, en ik dus in herinnering breng.

Men vreesde dat de overlaat, ondanks zware afmetingen en zeer flaauw hellende binnenglooijing, door het overstortende ijs vernield zou worden en dus zou doorbreken, en wees ook op het groote nadeel van de gestremde gemeenschap gedurende den overloop, een gemeenschap, waarvoor in zulke oogenblikken juist de dijk, die dan onbegaanbaar is, zou moeten dienen.

Ook deze beide nadeelen, hoe belangrijk ook, zou men zich behooren te getroosten, indien het beoogde doel, ontzetting van den bedreigden dijk, werd getroffen.

Dit laatste nu is mijns inziens zeer twijfelachtig, ook blijkens het reeds medegedeelde omtrent den hoogen waterstand, die nog gedurende de werking van den overlaat zou te verduren wezen.

Wel is het waar dat bij ijsbezetting ook belangrijk hooger waterstanden zich kunnen voordoen dan van 0,30 M. boven den hoogst bekenden bij open rivier. Men kan dit ontwaren bij vergelijking van de standen, aangeteekend in de kolommen 2 en 5 van het staatje, voorkomende in mijne Berekening van den afvoer, die langs Neder-Rijn en Lek mogelijk is. (*Verslagen en Mededeelingen* 2e Reeks, Deel IV, blz. 125). Een door de Commissie ook opgenoemd bezwaar is echter de mogelijkheid dat ijsmassa's zich op den vloer des overlaats neërzetten en ophoopen (zooals o. a. in 1855 op de dijken langs Neder-Rijn en Lek plaats had) en dat daardoor de afvoer van water wordt belet of belemmerd.

Aan het daar straks opgenoemde gebrek van een overlaat, dat hij aan den rivierstand bovenwaarts niet de gewenschte verlaging bezorgt, omdat de aanhoudend afstroomende rivier eerst bij den overlaat een deel van haar water kwijt raakt, werd bij het plan van GOUDRIAAN tegemoet gekomen, door dat hij zich niet tot een enkelen bepaalde maar een tiental wenschte aan te leggen in den zuidelijken dijk langs Neder-Rijn en Lek van Arnhem tot Ameide.

Bovendien achtte hij ook afleiding noodig over eene overlaat

bij de Grebbe naar de Geldersche vallei, en meende hij dat ook in aanmerking zou kunnen komen het water in de Lopiker- en Krimpenerwaarden „zonder behoorlijke verdeeling zachtelijk in te leiden" tot ontzet c. q. der dijken van de Vijfheerenlanden en den Alblasserwaard.

Wanneer men het stelsel van GOUDRIAAN consequent wil toepassen, dan is een zoo groot aantal overlaten noodig, omdat eene enkele afleiding van eene rivier bij ijsgang niet de zekerheid geeft, die men beoogt. Brengt men namelijk den overlaat aan het benedeneind van het riviervak dat men wil ontlasten, dan moet de rivier over de geheele lengte boven den overlaat de volle hoeveelheid water en ijs kunnen doorlaten. Brengt men hem aan het boveneind aan, dan is er mogelijkheid dat op de rivier benedenwaarts zich een ijsdam vormt, die het water doet rijzen zonder dat, — tengevolge van het verhang, — de bovenwaarts gelegen overlaat er eenige afleiding aan kan geven.

De Commissie schijnt aan het onvoldoende eener afleiding over eene beperkte lengte geen gewigt te hebben gehecht. Zij zou anders bij de verwerping van het stelsel van GOUDRIAAN niet berust hebben in de door haar in de plaats daarvan voorgestelde 12 waaijersluizen alleen in de nabijheid van Kuilenburg.

Van Beusichem tot Amerongen zou de Noorder Lekdijk bij het vastzitten van een ijsdam boven Beusichem niet ontzet zijn geworden door het openen dier sluizen.

De gebeurtenissen van den winter van 1855 hebben doen zien dat zijdelingsche afleiding van water op een punt der rivier niet verhoedt dat de dijk op eenig ander punt boven- of benedenwaarts doorbreekt, zelfs op geringen afstand. Nadat in den vroegen morgen te 4 of 5 uur van den 5en Maart 1855 een doorbraak was gevallen in den linker Rijndijk te Maurik, brak des namiddags van dienzelfden dag te $3^1/_2$ uur de dijk aan de Spees door, gelegen ongeveer 12 kilometer, langs de rivier gemeten, boven Maurik.

Een half uur later, te 4 uur, brak de Grebbedijk door, ongeveer 2 kilometer boven de Spees. Een uur later, te 5 uur, bezweek de dijk te Ingen, slechts 3,5 kilometer boven Maurik, waar toen reeds 12 uur lang het water door het gat in den dijk van 60 M. lengte naar binnen liep. Benedenwaarts in

de rivier nabij Kuilenburg zette zich op dien dag, des namiddags $12^3/_4$ uur, de ijsbezetting door den sterken aandrang van water in beweging, hetgeen ook des nachts plaats gegrepen maar niet lang geduurd had. Gedurende die ijsbewegingen liep het water op sommige plaatsen 0.25 M. over den Zuider-Lekdijk, die was opgekist, en over den Noorder-Lekdijk, die 0.39 M. hooger was dan de Kuilenburgsche, ging het met gang. (SLOET en FIJNJE, bl. 111).

Geeft zijdelingsche afleiding geene zekerheid voor den tegenoverliggenden dijk, dien men er door ontzetten wil, daarentegen kan zij door de stroomverlamming, die zij te weeg brengt, aanleiding geven tot het vastraken van de afdrijvende ijsschollen bij ijsgang en tot nederzetting van zand.

De ondervinding van de laatste jaren heeft ook geen reden gegeven zich er over te beklagen, dat de voorstellen tot zijdelingsche afleiding weinig gevolg hebben gehad, maar dat men de voorkeur heeft geschonken aan verbetering der rivierbedden zelve en aan dijkverzwaring.

Er is geen reden om den daartoe, ruim 25 jaar geleden, ingeslagen weg thans te gaan verlaten.

Niettemin is laatstelijk een oud denkbeeld, het houden der Zuider Rijn- en Lekdijken op eene hoogte lager dan die van de Noordelijke, weder aangeprezen ten behoeve van de landstreek, die door laatstgenoemde dijken wordt beschermd.

Het denkbeeld, oorspronkelijk van BOLSTRA, werd in 1754 door Gecommitteerden aan de Staten van Holland aanbevolen en in 1762 door verhooging van den Noorder-Lekdijk verwezenlijkt.

Eene ophooging daarna van de Zuider-Lekdijken schijnt het beoogde verschil in hoogte verbroken te hebben.

Afgraving van de Zuider-Lekdijken, waar die door den Inspecteur der rivieren C. L. BRUNINGS waren bevonden hooger te liggen dan de Noorder-Lekdijken, werd althans door het Comité centraal van den Waterstaat in 1809 aangeraden. Die afgraving zou volgens dat voorstel niet verder hebben moeten gaan dan tot zoodanige hoogte, dat de dijken het hoogste winterwater bij open rivier zouden hebben kunnen keeren.

De Commissie voor de rivierafleidingen was van oordeel, dat

de Noorder-Lekdijk belangrijk moest versterkt worden en dat voorts deze dijk 0,50 M. hooger moest liggen dan de Zuider-Lekdijk, die daartoe moest worden verlaagd „echter zoo min „mogelijk aanzienlijk over uitgestrekte vakken."

Bij eene voorgenomen verhooging van den Zuider-Lekdijk, behandeld in een rapport van de Inspecteurs van den Waterstaat van 26 September 1861, wordt door deze hoofdambtenaren gewaarschuwd tegen het overtreffen der hoogte van den Noorder-Lekdijk, waarop volgens dat voornemen kans was, tenzij het toen aanhangig plan van verhooging van den Noorder-Lekdijk wierd uitgevoerd.

Bij de uitvoering der verhoogingen is de gewenschte verhouding niet in acht genomen en alzoo bezit de Zuider-Lekdijk thans over verscheidene vakken grootere hoogte dan de Noorder-Lekdijk. Het verschil, doorgaande niet zeer groot, zou bij andere rivieren waarschijnlijk niet bijzonder de aandacht trekken, maar hier heeft het ongerustheid gebaard en aanleiding gegeven tot de vordering, dat de meermalen besproken overmaat aan de Noordzijde worde in het leven geroepen.

Noch bij dit voorstel, noch bij de vroegere voorstellen van dien aard wordt het denkbeeld verder uitgewerkt. Niet alleen zoekt men te vergeefs naar de absolute hoogte, die men dan aan de dijken zou willen geven, maar ook wordt niet gezegd hoe de overige afmetingen van den Zuider-Lekdijk zouden moeten zijn, noch of de bedoeling is overloop dan wel doorbraak te bevorderen bij den laag gehouden dijk.

Bij een hoogteverschil, van slechts 0,50 M. tusschen den Noorder- en Zuider-Lekdijk, zal laatstgenoemde dijk boven den hoogst bekenden waterstand bij open water verheven zijn; want tijdens ijsbeweging of ijsbezetting kan de rivier meer dan 0,50 M stijgen boven dien waterstand, en in zoodanig geval zal de Noorder-Lekdijk nog dienen te waken.

Laat men toe dat de 0,5 M. lagere Zuider-Lekdijk een flaauw binnenbeloop verkrijge, zoodat hij over zijne geheele lengte als overlaat kan dienen, dan roept men in het leven de bezwaren, die tegen de overlaten van GOUDRIAAN zijn aangevoerd. Bovendien wordt de Noorder Lekdijk niet ontheven van het gevaar, dat in 1876 dreigde; want bij den hoogsten waterstand bij open

rivier zal dan de Zuider Lekdijk niet overloopen. Aan eene krachtige verzwaring der zwakke gedeelten van den Noorder-Lekdijk mag men zich ook dan niet onttrekken.

Is de bedoeling dat de Zuider Rijn- en Lekdijk niet worde versterkt door eene flaauwe binnenglooijing, dan zullen bij overloop de doorbraken niet achterwege blijven met de daaraan verbonden nadeelen voor de rivier, herhaalde overstrooming van de streek bezuiden de Lek zonder de gewenschte zekerheid voor het land achter den Noorder-Lekdijk.

Doorbraak geeft, indien de rivier met ijs bezet is, geen waarborg voor het behoud van den tegenoverliggenden dijk. Dit is niet alleen in 1855 gebleken; GOUDRIAAN geeft daarvan in § 11 van zijne verhandeling over de zijdelingsche afleidingen voorbeelden, ontleend aan de voorvallen op de rivieren in de winters van 1784 en 1799, en het Collegie van den Lekdijk bovendams beroept zich, in zijn bezwaarschrift tegen de afleiding door 12 sluizen bij Kuilenburg, voorgesteld door de commissie van 1821, op de doorbraak van den Noorder-Lekdijk in 1726, 24 uur nadat het Zuider-Lekboord bezweken was. (Rapport der Commissie van 1828).

Doorbraak verwekt vermindering van stroomsnelheid in het rivierbed en kan dus nederzetting van zand tengevolge hebben, ten nadeele van de scheepvaart en van den waterafvoer.

Gedurende den tijd, waarin de doorbraak niet gesloten is, blijft de rivier, ofschoon reeds dalende, onnoodig er doorloopen zoolang zij niet tot het zomerbed is teruggekeerd en ook dan nog, indien de doorbraak in een schaardijk is gevallen.

Ik zwijg van de nadeelen, die herhaaldelijk zouden berokkend worden aan de streeken, die worden onder water gezet, al onderstel ik dat men tot vergoeding daarvoor, telkens of eens voor altijd de noodige opoffering zich zou getroosten ter wille van de afwending van den ramp eener doorbraak van den Noorder-Lekdijk. Die ramp zou bij een zamenloop van ongunstige omstandigheden zoo ontzettend zijn, dat men voor de zekerheid der afwending ongetwijfeld groote opoffering zou over hebben.

Ik meen evenwel, op grond van de onzekerheid, die ondanks die opofferingen zou blijven bestaan, te mogen beweeren, dat de aanzienlijke sommen, die aan de vergoeding van schade be-

zuiden de Lek zouden moeten worden te koste gelegd met meer nut zouden worden besteed aan verbetering van den Noorder-Lekdijk. Men zou die naar mijne meening in de eerste plaats moeten besteden aan versterking der dijkvakken, die niet door een uiterwaard van de rivier zijn gescheiden.

Een dijkbreuk is minder noodlottig ter plaatse waar een uiterwaard zich voor den dijk bevindt dan bij een schaardijk, omdat in het eerste geval de beringing gemakkelijker is, en de instrooming bij het dalen der rivier spoediger ophoudt.

Voortzetting der rivierverbetering moet naar mijn inzien verder de gelegenheid tot ijsbezetting en daarmede het gevaar van doorbraak verminderen. Daartoe moet de rivierverbetering niet beperkt blijven tot het bekribben van het zomerbed tot vorming van eene doorgaande geul, maar zich ook uitstrekken tot het vormen van een regelmatig winterbed van zooveel mogelijk gelijke breedte, door opruiming van beletselen, die tusschen de in 1867 vastgestelde normaallijnen op de uiterwaarden nog mogten aanwezig zijn, en tot het bevorderen daardoor van eene gelijkmatige snelheid van het water ook bij ijsgang, zoodat voor op elkander schuiving der ijsschollen weinig gevaar is.

Middelburg, 16 October 1879.

RAPPORT

OVER BLIKSEMAFLEIDERS OP RIJKSGEBOUWEN TE DELFT.

Uitgebracht in de Vergadering van 29 November 1879.

Aan de
Natuurkundige Afdeeling der
Koninklijke Akademie van Wetenschappen.

De Commissie, benoemd naar aanleiding van een schrijven van Z. Exc. den Minister van Oorlog, dd. 7 Juli 1879, betreffende den aanleg van bliksemafleiders op Rijksgebouwen te Delft, heeft de eer de conclusiën, waartoe zij omtrent deze zaak gekomen is, mede te deelen en aan het oordeel der Akademie te onderwerpen.

In het schrijven van den Minister werden der Akademie twee vragen gesteld: 1°. omtrent de eischen, die, ter beveiliging tegen bliksemgevaar voor het magazijn aan de Geer, aan de gemeente Delft zouden moeten gesteld worden, indien het haar vergund werd een torenuurwerk op dit magazijn aan de zuidzijde te plaatsen; 2°. omtrent het gevoelen der Akademie over het nut of de noodzaak om ook andere rijksgebouwen te Delft, met name aangewezen, van afleiders te voorzien.

De missive van Z. Exc. was vergezeld van een zestal schetsen voor de gebouwen, waarover het gevoelen werd gevraagd, en van een gedeelte der correspondentie, die, naar aanleiding van het onderwerp der eerste vraag, reeds gevoerd was tusschen het Departement van Oorlog en de gemeente Delft. Uit de bijgevoegde stukken bleek, dat de eerst-aanwezende ingenieur te 's Hage de meening was toegedaan, dat de gemeente Delft, ingeval het haar vergund werd het torentje te plaatsen, verplicht zou moeten worden om door 26 bliksemafleiders het gevaar weg te nemen, dat genoemd torentje zou doen ontstaan; terwijl de

gemeente Delft daarentegen meende, dat die eisch te hoog gesteld was. Ten einde omtrent de vragen, door den Minister gedaan, met meer zekerheid te kunnen oordeelen, heeft de Commissie zich naar Delft begeven en de gebouwen in oogenschouw genomen.

Wat de eerste vraag betreft, is de Commissie in de overtuiging bevestigd, die zij bij het lezen der stukken reeds had opgevat, dat het mogelijk moet geacht worden, dat het plaatsen van het torentje op het magazijn aan de Geer eenig meerder gevaar voor het inslaan van den bliksem zou kunnen teweeg brengen, en komt het haar dus billijk voor, dat door het aanbrengen van een afleider dat meerdere gevaar worde weggenomen. Maar geenszins kan zij deelen in de meening, dat het plaatsen van het houten torentje zulke ver strekkende gevolgen zou moeten hebben, dat eerst door 26 afleiders het welligt meerdere gevaar zou zijn weggenomen. Die eisch van 26 afleiders, alleen voor de rijksgebouwen aan de Geer, berust op de stelling, dat een goede bliksemafleider eer ten gevaar dan ter bescherming zou strekken voor die gedeelten van een gebouw, die niet binnen den beveiligingskring van den afleider gelegen zijn. Was die meening juist, dan zouden het houten torentje en de afleider, die er op geplaatst zou moeten worden, gevolgen hebben, die zelfs niet beperkt zouden mogen blijven binnen den kring der rijksgebouwen, maar zich in steeds wijdere kringen zouden doen gevoelen. De Commissie heeft het niet noodzakelijk geacht de gronden op te geven, waarom zij deze zienswijze verwerpt, te meer omdat de schrijver, naar wien de eerst-aanwezende ingenieur verwijst, Dr. W. HOLTZ: Theorie der Blitzableiter u. s. w., wel spreekt van een beveiligende werking van een afleider, maar niet van een gevaar aanbrengende. Dezelfde woorden toch: „Een goede afleider trekt den bliksem „aan, en moet hem aantrekken, wanneer hij hem zal beletten „andere deelen van het gebouw te treffen", dienen bij den aangehaalden schrijver niet om te betoogen, dat daardoor gevaar voor de overige deelen van het gebouw zal ontstaan, maar alleen om tot het denkbeeld van de beveiligings-ruimte te voeren. Een enkele afleider zal het geheele arsenaal niet beveiligen; maar,

niet beveiligen beteekent toch nog iets anders dan *in gevaar brengen*. De Commissie meent dus, dat door het aanbrengen van één afleider op het te plaatsen torentje ruimschoots het gevaar zal zijn weggenomen, dat door dit torentje zou kunnen ontstaan.

Alvorens over te gaan tot het mededeelen van de conclusiën, waartoe de Commissie gekomen is omtrent de tweede vraag, meent zij in korte bewoordingen de algemeene beginselen te moeten doen kennen, die haar bij het vormen van haar oordeel hebben geleid.

De beantwoording van de vraag, of een afleider voor een gebouw noodig is, is altijd moeielijk, omdat zooveel omstandigheden in aanmerking moeten genomen worden, die invloed kunnen uitoefenen, en die eerst, als men ze van een factor, haar betrekkelijk gewicht voorstellende, heeft kunnen voorzien, op behoorlijke wijze in rekening kunnen gebracht worden. Zoo komt in de eerste plaats de vraag: welke kans heeft dit gebouw voor het inslaan van den bliksem? Op die kans heeft natuurlijk o. a. de hoogte van het gebouw zelf, en de hoogte der omringende gebouwen invloed. In de tweede plaats komt de vraag: welke schade zal vermoedelijk aangebracht worden, als het onheil treft? Zal de schade zich waarschijnlijk bepalen tot een kleine vernieling, tot een begin van brand, die ligt in den voortgang kan worden gestuit; of is het te voorzien, dat, als de bliksem treft, het geheele gebouw zal worden vernield en zou dit, hetzij uit het oogpunt van kunst of wetenschap, een onherstelbaar verlies zijn? En bovenal, is er groot gevaar voor menschenlevens te voorzien?

Maar evenzeer moeten in het oog gehouden worden de nadeelen van het aanbrengen van een geleider, b. v. de kosten van aanleg, van onderhoud en herhaald onderzoek, en de gevaren, die een defecte geleider voor het gebouw te voorschijn roept.

Nu heeft de Commissie zich niet kunnen stellen op het ligtvaardig gekozen standpunt om in elk geval het aanbrengen van een geleider aan te raden. Eenige kans, dat een gebouw getroffen worde, is er zeker altijd, en blijft zelfs bestaan, als het gebouw van afleiders is voorzien. Maar als het gebouw geen

bijzondere kansen van gevaar aanbiedt, en als de nadeelen, bij het inslaan veroorzaakt, waarschijnlijk gering zullen zijn en dus ook het gevaar voor menschenlevens in dat gebouw niet grooter is dan in een gewone woning, heeft zij gemeend niet tot het plaatsen van een afleider te moeten raden. Bij bijna al de gebouwen, waarover het oordeel der Akademie is gevraagd, is dit het geval. Bovendien is bij die allen ook 's nachts een wacht aanwezig om een begin van brand te kunnen stuiten.

De gebouwen, waarover het oordeel is gevraagd, zijn:

a. De Constructie-werkplaatsen. Deze werkplaatsen bieden in het oog der Commissie niets aan, wat bijzondere kans tot inslaan zou kunnen geven en ook geen enkel bijzonder gevaar in geval van inslaan. Zij acht het dus niet noodzakelijk afleiders aan te brengen. Alleen heeft zij nog overwogen, of ook iets zou behooren gedaan te worden aan twee schoorsteenen, den een van ijzer, $21^1/_2$ meter en den ander van steen, $25^1/_2$ meter hoog. Ook hierbij heeft zij gemeend, dat niet anders dan een finantieele schade zou te wachten zijn, ingeval die steenen schoorsteen getroffen werd, als namelijk de stoomketels, die in de onmiddellijke nabijheid van den voet staan, met den grond in geleidend verband werden gebracht. Ook voor den ijzeren schoorsteen zou zij dit raadzaam achten. En die vermoedelijke finantieele schade heeft zij niet hoog genoeg aangeslagen om een afleider noodig te oordeelen.

b. Het Arsenaal aan de Geer. Ook voor dit gebouw keurt de Commissie, behalve den afleider op het torentje, geen afleiders noodzakelijk.

c. Het Magazijn bij de Paardenmarkt en de Pyrotechnische Werkplaats. Ook voor deze gebouwen is de Commissie tot hetzelfde besluit gekomen. De voorraad ontplofbare stof, in de pyrotechnische werkplaats voorhanden, is zeer beperkt.

d. De Patroonfabriek en IJzergieterij. Deze gebouwen liggen buiten Delft en zeer geïsoleerd; en staan dus reeds daardoor aan meer gevaar bloot. De Commissie meent dan ook hier een afleiding te moeten aanbevelen. Maar niet op alle deelen van dit uitgestrekte terrein. Zij acht afleiding noodig op de met betrekking tot de omgeving hooge portierswoning, bovenal

omdat het onmiddellijk daarbij staande gebouw, tot samenstelling van scherpe patronen dienende (15; het nummer, waarmede dit gebouw op de schets is aangeduid), bij niet behoorlijke afleiding van die woning door een zijdelings afspringende vonk zou kunnen getroffen worden. Zij raadt dus aan, op de portierswoning een afleider te plaatsen, voorzien van een spits, die hooger reikt dan de rechtopstaande vlaggestok, en de grondleiding te voeren naar de nabijzijnde vaart. Tegelijk acht zij het raadzaam, het gebouw (15) òf afzonderlijk te beveiligen, òf in de beveiliging van de portierswoning op te nemen, bijv. door over de nok een geleider te plaatsen, van een spits voorzien, en dien geleider links en rechts naar den grond te voeren en daar behoorlijk te doen eindigen.

Nog heeft tot ernstige overweging geleid de vraag, of niet ook het kruithuisje zou moeten beveiligd worden. Ofschoon bij dit slechts 4 meters hooge houten gebouwtje, bijna geheel door aarde bedekt en rondom door hoogere gebouwen omringd, de kans van treffen voor den bliksem uiterst gering is, staat daartegenover het gevaar, ingeval het inslaan plaats grijpt. Dit gevaar wordt echter zeer getemperd, doordat het huisje aan 3 zijden door aarden wallen is omgeven, en zoo geplaatst, dat de ontploffing zou moeten plaats grijpen volgens een richting, waarin de schade het geringst moet zijn. Ofschoon er in den aanvang verschil van meening over dit punt bij de Commissie bestond, is toch de slotsom der overweging geweest, dat de beveiliging niet noodzakelijk wordt geacht. Daar bij deze gebouwen ook een paar hooge schoorsteenen voorkomen, zou ter beveiliging van de stokers een dergelijke voorzorg kunnen worden genomen als in de constructie-werkplaatsen is aangeraden.

e. Voor het magazijn op het Koningsveld acht de Commissie geen afleiding noodig.

De Commissie, meenende hiermede aan haar mandaat te hebben voldaan, heeft de eer zich te teekenen:

November 1879.

Leiden. P. L. RIJKE.
Delft. J. BOSSCHA.
Amsterdam. J. D. VAN DER WAALS.

DE DUBBELLADING EENER CENTROBARISCHE MASSAVERDEELING.

DOOR

C. H. C. GRINWIS.

1. Het is eene zeer bekende waarheid, dat wanneer eene massa gelijkmatig over een bolppervlak verbreid is, de aantrekkende werking dier lading op massa's buiten den bol volmaakt dezelfde is, als ware dc gansche lading in het middenpunt geconcentreerd; zoodat men omgekeerd, de in eenig punt O aanwezige massa over een willekeurig boloppervlak, dat O tot middenpunt heeft vervangen kan, zonder dat de werking naar buiten veranderd wordt.

Zoodra men echter dit eenvoudig geval even verlaat, wanneer de gegeven massa zich in eenig inwendig punt C bevindt, dat niet met het middenpunt van den bol zamenvalt of wanneer de massa in het middenpunt van eenig ander omwentelings-oppervlak geplaatst is, geeft de vraag naar de equivalente oppervlakte-lading bezwaren.

De moeilijkheid wordt nog grooter, wanneer het gegeven massapunt ergens binnen een willekeurig oppervlak gelegen is. De bepaling der dichtheid dier equivalente centrobarische lading (dus genoemd, daár de resultante harer werking steeds naar het aanvankelijk gegeven punt gericht is) wordt zóó bezwaarlijk, dat eene oplossing in eindigen vorm in bijna alle, ja zelfs in zeer eenvoudige gevallen, wat oppervlak en plaats van het punt betreft, onbekend is.

Uit de algemeene uitdrukking voor de oplossing van dit vraagstuk blijkt, dat men zich de equivalente oppervlakte-lading behoort voor te stellen als bestaande: 1^0. uit de in het punt aanwezige massa, in eene enkele lading volgens eenvoudige wet

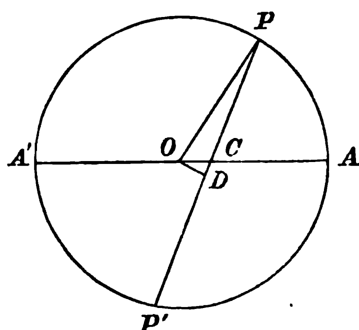
over het oppervlak verbreid, 2°. uit eene dubbellading over datzelfde oppervlak, die, uit twee zeer naburige ladingen van onderling gelijke grootte, doch tegengesteld teeken, met andere woorden, uit eene zeer bijzondere nullading bestaat, daar zij evenveel positieve als negatieve materie bevat.

De dubbellading, die blijkbaar door eene equivalente enkele nullading kan worden vervangen, is, wegens de groote bezwaren aan hare bepaling verbonden, weinig bekend.

In het volgende stellen wij ons voor langs indirecten weg de beteekenis dier dubbellading voor een eenvoudig geval van massaverdeeling op te sporen, waarbij de aan het massapunt equivalente lading bekend is.

2. Wij bedoelen de excentrische verdeeling over een bolоppervlak *).

Fig 1.



Om het punt O (Fig. 1) is, met A als straal, een bolоppervlak beschreven en in eenig punt C binnen dit oppervlak bevindt zich, op een afstand f van O, eene massa m. De dichtheid der equivalente lading in eenig willekeurig element P van het oppervlak is voor dit geval, als bij uitzondering, bekend. Die dichtheid is omgekeerd evenredig aan de derde macht van den afstand PC van het element tot het gegeven massapunt. William thomson gaf voor deze stelling een fraai meetkundig betoog †); c. neumann leverde hiervoor een ander bewijs, door middel van eene zeer vernuftige toepassing der formulen van green §); een derde bewijs, dat korter schijnt dan beide, moge hier volgen.

---

*) Aanvankelijk was ook eene uitvoerige behandeling der verdeeling over de omwentelings-ellipsoïde opgenomen, wanneer de massa in het centrum geplaatst is. Het is echter beter dit geval achterwege te laten, totdat een minder onvolledig onderzoek voor dit oppervlak volgen kan.

†) Thomson, *Reprint*, zie ook thomson u. tait, *Handb. d. theor. Physik.* No. 474.

§) Neumann, *Untersuchungen über das log. u. Newtonsche Potential.* S. 64—65.

Men heeft in het algemeen voor de dichtheid eener lading op een bolopperlak in eenig element, waar de potentiaal dier lading $\overline{V}$ is, als a de straal des bols en n de richting der uitwendige normaal aanduidt *),

$$\varrho = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\overline{V}}{a} + 2\frac{d\overline{V}}{dn}\right);$$

voor ons geval wordt $\overline{V}$ de potentiaal der in C aanwezige lading in het element P, dus

$$= \frac{m}{CP} = \frac{m}{p};$$

dan volgt

$$\frac{d\overline{V}}{dn} = -\frac{m}{p^2}\cdot\frac{dp}{dn} = -\frac{m}{p^2}\cos\nu$$

als ν de hoek tusschen voerstraal en normaal.

Is nu $P'C = p'$, dan zal $p + p' = 2a\cos\nu$ en daar $pp' = a^2 - f^2$, wordt

$$\varrho = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{m}{ap} - \frac{m}{p^2}\cdot\frac{p+p'}{a}\right) = \frac{m}{4\pi a}\cdot\frac{a^2 - f^2}{p^3}\ldots (\alpha).$$

Voor het geval dat C in O, dus $f = 0$, volgt de constante dichtheid $\varrho = \dfrac{m}{4\pi a^2}$ †).

Nu geven de formulen van GREEN voor de potentiaal eener binnen een gesloten oppervlak S gelegen massa in een uitwendig punt, dat zich op een afstand r van het oppervlak ds bevindt,

$$V_u = \frac{1}{4\pi}\int\left(V\frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{r}\frac{dV}{dn}\right)ds.\ldots (I).$$

---

*) GRINWIS, *Wrijvings electriciteit*, bl. 119. Vergel. ook BEER, *Elektrostatik*. S. 53.

†) Eene fraaie toepassing dezer formule op de verdeeling van magnetisme over een bolopperlak door BOUTY, vindt men *Journal de Physique* II, p. 301—303.

waarin weder n de richting der uitwendige normaal aanduidt, de integratie over het geheele oppervlak s uitgestrekt.

Schrijven wij deze vergelijking onder den vorm

$$V_s = \int \frac{-\frac{1}{4\pi}\frac{dV}{dn}}{r}\, ds + \int \frac{V}{4\pi}\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\right) ds \;. \;. \;. \;(I_a).$$

zoo blijkt, dat de potentiaal dier massa gelijk is aan de potentiaal van *twee* ladingen over het oppervlak; 1°. de lading met de dichtheid $-\frac{1}{4\pi}\frac{d\overline{V}}{dn}$, 2°. eene dubbellading *) met het moment $\frac{\overline{V}}{4\pi}$.

De massa m kan dus in hare werking op eenig punt van het oppervlak en daar buiten door die beide ladingen vervangen worden.

Het is zeker een hoogst merkwaardig feit, dat, terwijl de dubbelladingen tweemaal in de physica voorkomen, eens als electrische dubbelladingen bij de aanraking van heterogene metalen †), nog eens in de electrodynamica als magnetische dubbellading, daar, zooals wij weten, een gesloten electrische stroom, door eene magnetische dubbellading van het door den stroom begrensd oppervlak kan vervangen worden, zich ook hier het begrip van *negatieve* materie opdringt. Wij krijgen toch in dit geval met eene *derde* dubbellading en wel van positieve en negatieve *massa's* te doen, die zich dus in 't algemeen bij de aantrekking van ponderabele materie evengoed als bij electrische en magnetische werkingen voordoet.

Kan dit tot gewichtige gevolgtrekkingen aanleiding geven en er misschien toe leiden het raadselachtige der *twee* soorten van electriciteit en van magnetisme te verklaren, wij staan echter voor de omstandigheid, dat die dubbellading voor eene rechtstreeksche bepaling ten eenenmale ongeschikt is, zoo dat van de

---

*) Neumann l. c. S. 118—120.

†) Helmholtz, *Pog. Ann.* Bd. 89.

eigenaardige, wezenlijke beteekenis der dubbellading van ponderabele massa's, zelfs na de uitmuntende onderzoekingen van NEUMANN *), zooals reeds aangemerkt werd, weinig bekend is.

De omstandigheid evenwel, dat men (zie boven) de excentrische verdeeling eener massa over een bolppervlak kent, terwijl, zooals wij zien zullen, de dichtheid der lading, die bij de eerste integraal van I_a behoort, zich zonder bezwaar laat berekenen, stelt ons in staat, bij den bol althans de dichtheid der aan die dubbellading equivalente enkele nullading te bepalen. De vergelijking I_a leert toch, dat deze dichtheid het verschil is der totale door de formule (α) gegevene en van de dichtheid $-\frac{1}{4\pi}\frac{d\overline{V}}{dn}$.

Wat deze laatste dichtheid betreft, daar $\overline{V} = \frac{m}{p}$, wordt zij

$$\rho_1 = -\frac{1}{4\pi}\frac{d\overline{V}}{dn} = \frac{m}{4\pi}\cdot\frac{\cos\nu}{p^2}\,\ldots\ldots\ldots(1)$$

Zoo dus $d\sigma$ de kegelopening is, die C tot top en den omtrek van het oppervlakte-element ds tot richtlijn heeft, wordt de hoeveelheid materie, die zich bij de verdeeling door de eerste integraal aangewezen, op het element ds bevindt,

$$-\frac{1}{4\pi}\frac{d\overline{V}}{dn}ds = \frac{m}{4\pi}d\sigma\,\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

m. a. w. terwijl het punt C, waar zich de massa m bevindt, de gemeenschappelijke top van alle elementaire kegels is, blijkt dus dat de verdeeling, waarvan (1) de dichtheid aangeeft, die is, waarbij de vroeger in C aanwezige materie gelijkmatig, als rondom een *centrum*, naar alle richtingen is uitgebreid; het totale bedrag dier lading is dan ook ingevolge (2), over het boloppervlak integrerende, dat de eenheid tot straal heeft:

$$\int\frac{m}{4\pi}d\sigma = m.$$

*) NEUMANN, l. c. Capitel 4 u, 5.

en dit geldt algemeen bij de verdeeling over ieder oppervlak. Wij zullen deze verdeeling de *centrale verdeeling* der materie noemen.

Ingevolge I_a moet nu bij die lading, ten einde de totale, aan de inwendige massa equivalente lading te verkrijgen, de dubbellading gevoegd worden, wier potentiaal door

$$\int \frac{V}{4\pi} \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn} ds$$

wordt aangeduid.

Die dubbellading is eene *nullading*, zij bevat evenveel positieve als negatieve materie; hare werking in uitwendige punten is echter niet nul. Wel zou dit het geval zijn, als het zoogenaamde *moment* der lading

$$\mu = \frac{V}{4\pi} = \frac{m}{4\pi} \cdot \frac{1}{p} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

een constante grootheid was, zooals in het geval dat de gegeven massa in O geplaatst ware. Dan gaat

$$\int \mu \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn} ds$$

in de bekende integraal van GAUSS *) over

$$\mu \int \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn} ds = \mu \int \frac{\cos\nu}{r^2} ds;$$

deze is, naar gelang het een uitwendig punt, een punt aan het oppervlak of een inwendig punt geldt,

$$= 0, \qquad -2\pi\mu, \qquad -4\pi\mu$$

*) GAUSS, Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorum Art. 6.

(de tweede waarde is, bij de onderstelling eener continue kromming van het oppervlak, in het punt, waar de integraal genomen wordt).

Eene dubbellading met constant moment heeft dus buiten het oppervlak standvastige potentiaalwaarden; die lading vertoont naar buiten geen werking. Wel is er werking in ons geval, daar het moment, blijkens (3), voor de verschillende oppervlakte-elementen andere waarden heeft.

3. Ten einde de dichtheid ϱ_0 der enkele nullading te bepalen, die met deze dubbellading equivalent is, geeft I. als ϱ de dichtheid der totale lading (α)

$$\varrho = \varrho_1 + \varrho_0$$

dus

$$\varrho_0 = \varrho - \varrho_1 = \frac{4\pi}{m} \cdot \frac{a^2 - f^2}{a p^3} - \frac{m}{4\pi} \frac{\cos\nu}{p^2}$$

of

$$\varrho_0 = \frac{m}{4\pi} \cdot \frac{1}{p^2} \left(\frac{a^2 - f^2}{a p} - \cos\nu \right)$$

Is nu $\angle POA = \varphi$, zoo volgt terstond, daar $a - f\cos\varphi = p\cos\nu$

$$\varrho_0 = \frac{m}{4\pi a} \cdot \frac{1}{p^3} \left(a^2 - f^2 - a(a - f\cos\varphi) \right)$$

zoodat

$$\varrho_0 = \frac{m}{4\pi p^2} \cdot \frac{f}{a} \cdot \frac{a\cos\varphi - f}{p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Wij kunnen nog opmerken, dat als $\angle PCA = \psi$, OD loodrecht op PC getrokken en $CD = g$ genoemd wordt,

$$\varrho_0 = \frac{m}{4\pi p^2} \cdot \frac{f\cos\psi}{a} = \frac{m}{4\pi p^2} \cdot \frac{g}{a}; \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

de dichtheid der nullading is dus evenredig aan g en omgekeerd evenredig aan de *tweede macht* van den afstand tot het centrum C.

De figuur geeft echter terstond

$$p' - p = 2g$$
$$p' + p = 2a\cos\nu$$

(5) wordt dan

$$\varrho_a = \frac{m}{4\pi}\left(\frac{p'-p}{p'+p}\right)\frac{\cos\nu}{p^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Wij krijgen dus voor de hoeveelheid materie, die *de aan de dubbellading equivalente nullading* in eenig element ds bevat,

$$\varrho_0 \, ds = \frac{m}{4\pi}\left(\frac{p'-p}{p'+p}\right)\frac{\cos\nu}{p^2}\, ds \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

$$= \frac{m}{4\pi}\left(\frac{p'-p}{p'+p}\right) d\sigma \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

als $d\sigma$ de opening van den elementairen kegel met O tot top en den omtrek ds tot richtlijn.

Voor de totale dichtheid volgt (zie (1)).

$$\varrho = \varrho_1 + \varrho_0 = \frac{m}{4\pi}\left(1 + \frac{p'-p}{p'+p}\right) \cdot \frac{\cos\nu}{p^2}$$

$$= \frac{m}{4\pi} \cdot \frac{2p'}{p'+p} \cdot \frac{\cos\nu}{p^2};$$

of daar weder $p' + p = 2a\cos\nu$ en $pp' = a^2 - f^2$

$$\varrho = \frac{m}{4\pi a} \cdot \frac{a^2 - f^2}{p^3}$$

als boven.

Vergelijking (8) wijst op eene hoeveelheid materie

$$= \frac{m}{4\pi}\left(\frac{p'-p}{p'+p}\right) d\sigma,$$

die de elementaire kegel op $d\sigma$ bevat. Met den tegenovergestelden kegel bij P' correspondeert de hoeveelheid

$$\frac{m}{4\pi}\left(\frac{p-p'}{p+p'}\right) d\sigma,$$

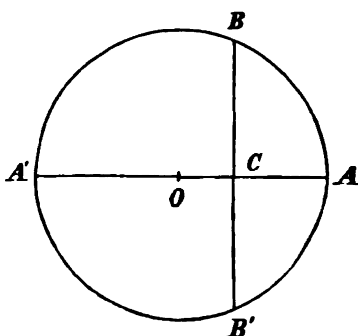
zoodat de nullading bij den bol, voor de beide elementen *van*

iederen dubbelkegel eene *gezamenlijke lading nul* aanwijst; in het deel naar den kleinsten voerstraal (p), bevindt zich eene *positieve*, in dat naar den grootsten voerstraal (p') eene gelijke *negatieve* hoeveelheid.

De absolute grootte dier hoeveelheden is evenredig aan het verschil der beide voerstralen, omgekeerd evenredig aan hunne som.

Deze laatste grootheid verdwijnt dus in den elementairen dubbelkegel, die op de elementen B en B' staat (Fig. 2), is het grootste voor den elementairen kegel op A en A'; m. a. w. de dichtheid der nullading zal voor het segment BAB' *positief*, voor het segment $BA'B$ *negatief* zijn.

Fig 2.



De dichtheid is in B en B' nul, de dichtheden in A en A' zijn maxima en wel is, zie (6)

in A $$\varrho_0 = \frac{m}{4\pi(a-f)^2} \cdot \frac{f}{a},$$

in A' $$\varrho_0 = \frac{m}{4\pi(a+f)^2} \cdot \frac{f}{a}.$$

Voor het positieve deel der nullading hebben wij, daar dit over het segment BAB' verbreid is,

$$Q_0 = 2\pi a^2 \int_0^{\varphi'} \varrho_0 \sin\varphi \, d\varphi, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

waarin ϱ_0 door (4) gegeven wordt en de bovenste grens φ' der integratie bepaald is door de vergelijking

$$f = a\cos\varphi';$$

zoodat

$$Q_0 = \frac{maf}{2}\int_0^{\varphi'} \frac{a \cos\varphi - f}{p^3} \sin\varphi \, d\varphi$$

$$= \frac{maf}{2}\int_0^{\varphi'} (f - a\cos\varphi) \; d\,.\cos\varphi$$

terwijl

$$p = \sqrt{(a^2 + f^2 - 2\,af\cos\varphi)}.$$

Nu is

$$\int \frac{d\,.\cos\varphi}{p^3} = -\frac{1}{2\,af}\int \frac{d(a^2 + f^2 - 2\,af\cos\varphi)}{\sqrt{(a^2 + f^2 - 2\,af\cos\varphi)}}$$

$$= \frac{1}{af}\,.\,\frac{1}{\sqrt{(a^2 + f^2 - 2\,af\cos\varphi)}}$$

en

$$\int \frac{\cos\varphi\,.\,d\cos\varphi}{p^3} = -\frac{1}{2\,af}\int \frac{\cos\varphi\,.\,dX}{X^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{af}\int \cos\varphi\,.\,d\left(\frac{1}{\sqrt{X}}\right)$$

$$= \frac{1}{af}\left\{\frac{\cos\varphi}{\sqrt{X}} + \int\frac{\sin\varphi\, d\varphi}{\sqrt{X}}\right\}.$$

En daar

$$\int\frac{\sin\varphi\, d\varphi}{X} = -\int\frac{d\,.\cos\varphi}{\sqrt{(a^2 + f^2 - 2\,af\cos\varphi)}}$$

$$= \frac{1}{2\,af}\int\frac{a\,X}{X^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{(a^2 + f^2 - 2\,af\cos\varphi)}}{af},$$

volgt

$$\int\frac{a\cos\varphi\,.\,d\cos\varphi}{p^3} = \frac{1}{f}\left\{\frac{\cos\varphi}{\sqrt{X}} + \frac{\sqrt{X}}{af}\right\}$$

$$= \frac{1}{af^2}\left\{\frac{af\cos\varphi + X}{\sqrt{X}}\right\};$$

zoodat

$$Q_0 = \frac{maf}{2}\left\{\frac{1}{a\sqrt{X}} - \frac{1}{af^2}\cdot\frac{af\cos\varphi + X}{\sqrt{X}}\right\}$$

$$= \frac{m}{2f\sqrt{X}}\left\{f^2 - af\cos\varphi - f^2 - a^2 + 2af\cos\varphi\right\}$$

$$= \frac{m}{2f\sqrt{X}}\left\{af\cos\varphi - a^2\right\} = \frac{ma}{2f}\left(\frac{f\cos\varphi - a}{\sqrt{(a^2+f^2-2af\cos\varphi)}}\right)_0^{\varphi'} . (10)$$

$$Q_0 = \frac{ma}{2f}\left\{\frac{\frac{f^2}{a} - a}{\sqrt{(a^2+f^2-2f^2)}} - \frac{f-a}{\sqrt{(a^2+f^2-2af)}}\right\}$$

$$= \frac{m}{2f}\left\{\frac{f^2-a^2}{\sqrt{(a^2-f^2)}} + a\right\}$$

$$Q_0 = \frac{m}{2}\left(\frac{a - \sqrt{(a^2-f^2)}}{f}\right) \ldots\ldots\ldots (11)$$

zoodat op segment BAB' de hoeveelheid

$$Q'_0 = -\frac{m}{2}\left(\frac{a - \sqrt{(a^2-f^2)}}{f}\right)$$

verbreid is.

Wanneer het punt C tot O en dus f tot nul nadert, zal ook, wegens (11),

$$Q_0 = \frac{mf}{2}\left\{\frac{1}{2a} - \frac{1}{8}\frac{f^2}{a^3} + \frac{1}{16}\frac{f^4}{a^5} + \text{enz.}\right\}$$

afnemen. De nullading verdwijnt als C in O, zooals te wachten was.

In resumé blijkt derhalve, dat de lading, die een in C excentrisch geplaatst massa-punt m vervangen zal, gelijk is aan de *centrale* verdeeling der massa in C, vermeerderd met de nullading, die

$$\varrho_0 = \frac{m}{4\pi p^2}\cdot\frac{f}{a}\cdot\frac{a\cos\varphi - f}{p}$$

tot dichtheid heeft, die dus in het gedeelte BAB' eene positieve, in $BA'B'$ eene daaraan gelijke negatieve lading vertegenwoordigt.

Doch wij kunnen ook het vreemde begrip van *negatieve massa* verwijderen, door op te merken, dat, ingevolge bovenstaande ontwikkeling, de verdeeling correspondeert met een *transport van materie* en wel van

$$\frac{m}{4\pi}\left(\frac{p'-p}{p'+p}\right) d\sigma,$$

voor elken elementairen dubbelkegel, die $d\sigma$ tot opening heeft.

De geheele centrobarische verdeeling bij den bol komt dan hierop neder: nadat de massa m, van uit het punt C als centrum, gelijkmatig naar alle richtingen is verbreid, zoodat zich in elken elementairen kegel $d\sigma$ om dit punt eene hoeveelheid

$$\frac{m}{4\pi} d\sigma$$

bevindt, wordt uit het langste der twee deelen van iederen dubbelkegel eene massa

$$\frac{m}{4\pi}\left(\frac{p'-p}{p'+p}\right) d\sigma$$

naar den overstaanden kortsten kegel overgebracht (men zou zich kunnen voorstellen, dat een deel der in het langste deel van den dubbelkegel uitgestraalde materie werd gereflecteerd en zóó naar het kortste deel verplaatst); de totale massa in elken dubbelkegel blijft onveranderd gelijk

$$\frac{m}{2\pi} d\sigma,$$

zoodat,

in het kortste deel (p) de hoeveelheid $\frac{m}{2\pi} \cdot \frac{p'}{p'+p} d\sigma$

(12)

in het langste deel (v') de hoeveelheid $\frac{m}{2\pi} \cdot \frac{p}{p'+p} d\sigma$

aanwezig is, die respectievelijk over de basis ds van het eerste en ds' van het tweede kegeldeel verbreid, elementen der centrobarische equivalente lading vormen.

Is het hier behandelde geval onvoldoende om de beteekenis eener dubbellading in het algemeen te verklaren, het eigenaardige der equivalente enkele nullading treedt reeds eenigzins aan het licht.

Wij vinden dit in de *zeer bijzondere* (schijnbaar hoogst eenvoudige) verdeeling der positieve en negatieve massa over de beide bolvormige segmenten, niet minder in het zonderling verdwijnen dier nullading wanneer het massapunt tot het middenpunt van den bol nadert.

Dit laatste staat blijkbaar in verband met de omstandigheid, dat de dubbellading, vroeger met veranderlijk moment, nu in eene overgaat, waarbij het moment constant blijft, welke laatste, zooals wij zagen, naar buiten zonder werking is.

Utrecht, November 1879.

OVER DE BEWEGINGEN DER RANKEN VAN SICYOS.

DOOR

HUGO DE VRIES.

Groeiende plantendeelen kunnen zich, gelijk bekend is, onder den invloed van verschillende krachten buigen. Deze krachten zijn ten deele inwendige, en berusten dan meestal op een verschillende organisatie van verschillende zijden van het orgaan; ten deele zijn zij uitwendige, in welk geval zij als prikkels werken, die in de plant voorhandene spankrachten in levende kracht omzetten. Als zulke prikkels kent men vooral de zwaartekracht, het licht, en de aanraking met vaste lichamen. De eerste veroorzaakt de geotropische, de tweede de heliotropische, de laatste de eigenlijke prikkelbewegingen. De door inwendige krachten veroorzaakte buigingen dragen den naam van nutatiën, en worden bij bilaterale organen in epinastische en hyponastische onderscheiden.

Al deze bewegingen zijn verschijnselen van groei, gelijk het eerste voor de geotropische en heliotropische door SACHS in zijn *Handbuch der Experimental-physiologie* bewezen werd. Deze geleerde toonde aan, dat niet, gelijk men toenmaals meende, een eenvoudige verandering der weefselspanning de oorzaak der kromming is, maar dat daarbij steeds de convex wordende zijde sterker in de lengte groeit dan de tegenoverliggende. Uitgaande van deze waarnemingen, beschouwde hij ook de overige, hierboven genoemde bewegingen, zoover ze in groeiende organen plaats vinden, als door verschillende groeisnelheid aan de verschillende zijden veroorzaakt.

Later stelde SACHS zijne bekende theorie omtrent den groei

van plantencellen op, volgens welke de snelheid, waarmede nieuwe moleculen celstof tusschen de reeds bestaande afgezet worden, in de eerste plaats afhangt van de uitrekking, die de celwand door den inhoud ondervindt. De inhoud neemt door osmose water uit zijne omgeving op en zet zich daardoor uit; tengevolge hiervan wordt de celwand uitgerekt en gespannen. Deze spanning tusschen wand en inhoud draagt den naam van turgor. De belangrijkheid van dezen turgor voor den groei blijkt o. a. uit zijn algemeen voorkomen in groeiende organen en cellen en uit het feit, dat snelgroeiende plantendeelen in den regel een aanzienlijker turgoruitrekking vertoonen dan langzaam groeiende.

Uit deze theorie mocht met waarschijnlijkheid het vermoeden afgeleid worden, dat ook bij de groeikrommingen de turgor een belangrijke rol zou spelen. Reeds vroeger had DUTROCHET de meening geuit, dat de osmotische spanning der cellen een der voornaamste factoren der bedoelde verschijnselen was, maar zijne beschouwingen waren door verschillende omstandigheden langzamerhand op den achtergrond geraakt.

Een vernieuwd onderzoek omtrent de rol van den turgor bij de groeikrommingen was dus noodzakelijk, vooral ook, omdat uit de theorie van SACHS geenszins met zekerheid kon worden afgeleid, of de uitwendige krommingsoorzaken rechtstreeks, dan wel indirect, door bemiddeling van den turgor, op den groei inwerken *).

Voor zulk een onderzoek ontbrak echter eene methode, daar het niet mogelijk was, het aandeel van den turgor en dat van den groei aan eene kromming experimenteel van elkander te onderscheiden. Vandaar dat men trachtte langs omwegen, door vergelijking met andere bewegingsverschijnselen, het doel te bereiken. Men heeft getracht, de krommingen van veelcellige groeiende organen (want alleen van dezulken is hier sprake), uit de overeenkomstige verschijnselen te verklaren, die bij eencellige organen waren waargenomen. Anderen hebben gemeend, een beter punt van vergelijking in veelcellige, volwassen blad-

*) Vergelijk SACHS *Lehrbuch der Botanik*, 4 Ed. p. 815.

gewrichten te vinden, daar deze door dezelfde uitwendige krachten tot overeenkomstige bewegingen geprikkeld worden. In het eerste dezer beide gevallen berusten de buigingen alleen op ongelijk sterken groei, in het laatste alleen op een verschil in turgor van de beide tegenoverliggende zijden. In ons geval echter, de bewegingen van veelcellige groeiende organen, mag men aannemen, dat zoowel de groei als de turgor een aandeel aan de kromming hebben. Welk echter dit aandeel is, kon vooralsnog langs experimenteelen weg niet worden uitgemaakt.

Ten einde deze belangrijke vraag tot een beslissing te brengen, heb ik allereerst een methode uitgewerkt, die aan den zooeven gestelden eisch voldeed en een empirische bepaling van het aandeel van turgor en groei aan een groeiverschijnsel mogelijk maakte. Deze methode berust op de rol van het protoplasma bij den turgor, en bestaat in hoofdzaak in de aanwending van zoutoplossingen van zoodanige concentratie, dat het protoplasma der cellen daarin, ten minste plaatselijk, den celwand loslaat. In dit geval toch kan in een cel geen spanning tusschen wand en inhoud meer bestaan. Daarom heb ik deze methode met den naam van plasmolytische methode bestempeld.

Volgens haar heb ik nu in den afgeloopen zomer verschillende bewegingen van groeiende, veelcellige organen onderzocht, en nagegaan welk aandeel daarbij aan den turgor, en welk aan den groei moest worden toegeschreven. De uitkomsten van dit onderzoek wensch ik in dit opstel mede te deelen.

Onder de bewegingen van groeiende plantendeelen behooren ongetwijfeld die der ranken tot de snelsten, en geen andere overtreft die der ranken van Sicyos angulatus, van welke ASA GRAY reeds vóór bijna twintig jaren mededeelde, dat men de krommingen met het oog kan volgen. Het is daarom dat ik voornamelijk deze ranken voor mijn onderzoek gebruikt heb. Volgens de beschouwingen van SACHS toch, mocht ik verwachten, dat bij zulke snelle bewegingen, die met een snellen groei gepaard gaan, ook de turgor zeer aanzienlijk is, en dat het dus hier, gemakkelijker dan in andere gevallen, zou gelukken, het aandeel van turgor en groei aan de bewegingen experimenteel te scheiden. Dit vermoeden heeft zich dan ook volkomen bevestigd. En toen eenmaal een inzicht in de rol van turgor

en groei bij deze bewegingen verkregen was, was het niet moeilijk, de genomen proeven ook met andere plantendeelen, en met door andere prikkels veroorzaakte bewegingen te herhalen; het bleek, dat bij al de in het begin genoemde verschijnselen het aandeel van turgor en groei aan de kromming door dezelfde wet beheerscht wordt.

Overeenkomstig met dezen gang van mijn onderzoek, wensch ik in dit opstel achtereenvolgens de volgende punten te behandelen:

1°. de vroegere onderzoekingen over groeikrommingen,
2°. de plasmolytische methode,
3°. de bewegingen der ranken van Sicyos angulatus,
4°. de bewegingen van andere ranken,
5°. sommige geotropische, heliotropische, nuteerende en epinastische bewegingen.

Ik mag deze inleiding niet sluiten, zonder een woord van oprechten dank te richten tot de Heeren CH. DARWIN en ASA GRAY. Toen DARWIN de tweede editie zijner "Climbing plants" uitgaf, maakte hij mij op de snelle bewegingen van sommige ranken, en op de bizondere geschiktheid van deze voor eene beantwoording der reeds meermaals genoemde vraag opmerkzaam, en beval mij aan, vooral zulke ranken voor mijn onderzoek te gebruiken. ASA GRAY had de goedheid, mij zaden van Sicyos angulatus te zenden, daar deze, volgens zijne vroegere waarnemingen, de snelste bewegingen van ranken vertoonen; de planten, uit zijne zaden gewonnen, leverden mij het geheele materiaal voor het eerste gedeelte mijner onderzoeking. De lezer moge uit de lectuur van mijn opstel zelf beoordeelen, welke redenen tot dankbaarheid ik voor den raad en de hulp der beide genoemde geleerden heb.

I. *De vroegere onderzoekingen over groeikrommingen.*

Het is geenszins mijn voornemen, hier een uitvoerig historisch overzicht over alle onderzoekingen te geven, die tot onze kennis der groeikrommingen hebben bijgedragen.

Veel minder is het mijn plan, de theoretische beschouwingen over de oorzaken dezer krommingen kritisch te behandelen; deze beschouwingen toch, door tal van onderzoekers, en dikwerf met een zeer onvoldoend materiaal van empirische feiten aangesteld, loopen zóó zeer uiteen, en zijn in den regel zoodanig met elkander in tegenspraak, dat slechts een zeer uitvoerige behandeling van het vóór en tegen van alle meeningen eenig nut zou kunnen hebben. Al deze beschouwingen hebben zoo goed als geen invloed op mijn experimenteele onderzoekingen gehad, daar ik van den beginne af een geheel anderen weg heb ingeslagen. Ik beperk mij daarom tot de bespreking van proeven en ervaringen, en behandel onder deze alleen diegene, die tot de door mij te behandelen vraag naar het aandeel van turgor en groei in een meer rechtstreeksch verband staan. Ik begin met DUTROCHET, wiens ontdekking der osmose hem de aanleiding gaf om te onderzoeken, in hoeverre ook bij deze verschijnselen osmotische werkingen in het spel zijn *). Hij vond, dat in organen, die het vermogen bezitten, zich onder den invloed van zwaartekracht of licht te krommen, steeds een spanning tusschen de verschillende weefsels bestaat, en dat deze spanning op de osmotische werking van de cellen van het parenchym berust. Splitste hij een jongen stengel overlangs in twee helften, dan kromde deze zich terstond met de epidermis concaaf. Door opneming van water werd deze kromming aanzienlijk versterkt, door den invloed van suikerwater echter verminderd of zelfs in de tegenovergestelde overgevoerd; de weefselspanning berustte dus op „osmose implétive" der parenchymcellen.

Om nu na te gaan, of bij de krommingen onder den invloed van de zwaartekracht deze weefselspanning veranderde, liet hij jonge stengels zich buigen, en splitste ze daarna in twee helften. De concave helft kromde zich sterker, de convexe ontkromde zich min of meer, en werd zelfs in vele gevallen weer recht. DUTROCHET vatte de beteekenis dezer waarneming zoo op, dat de concave zijde haar normale streven om zich te krommen behield, terwijl de convex wordende zijde dit streven ver-

---

*) DUTROCHET, *Mémoires*, Edition Bruxelles 1837, p. 296 et 324,

loor; tengevolge daarvan werd zij "courbée en dedans malgré elle."

Opheffing of vermindering der spanning in de onderhelft was dus de werking van de zwaartekracht, en deze verandering kon slechts door een vermindering van de osmotische kracht der parenchymcellen bewerkt worden. DUTROCHET nam daarom aan, dat de "sève lymphatique extérieure aux cellules" in de onderzijde in dichtheid toenam; dit zou natuurlijk een geringere osmose implétive aan die zijde tengevolge hebben, en zoodoende het verschijnsel geheel kunnen verklaren.

Volgens dezelfde beginselen trachtte DUTROCHET ook de heliotropische bewegingen van stengels, alsmede beide soorten van bewegingen bij wortels, te verklaren. Bij wortels, in welke de weefselspanning juist omgekeerd is als in stengels, is de convex wordende bovenkant de actieve; zij volgt haar normale streven, terwijl de onderkant, resp. de schaduwzijde, passief gebogen wordt.

De ontdekking van het verband tusschen de uitzetting der parenchymcellen door opneming van water, de weefselspanning en de krommingen van jeugdige plantendeelen, was een belangrijke en blijvende aanwinst voor de wetenschap. Maar de bizonderheden van DUTROCHET's theorie waren niet boven alle kritiek verheven, en van daar dat zijn leer nooit dien invloed verkregen heeft, dien zij verdiende. In twee opzichten vooral was zijn voorstelling gebrekkig. Hij nam aan, dat steeds slechts de eene zijde actief de kromming bewerkte, terwijl de andere passief werd medegetrokken; deze meening werd later door SACHS experimenteel weerlegd, toen hij aantoonde, dat beide helften, elk voor zich, zich onder den invloed van de zwaartekracht opwaarts trachten te buigen *). In de tweede plaats nam hij een vermindering van de osmotische werkzaamheid van de cellen der convex wordende zijde aan; wij zullen in het experimenteele gedeelte van dit onderzoek zien, dat de uitzettende kracht der parenchymcellen aan deze zijde juist toeneemt, en dat juist daardoor de kromming veroorzaakt wordt.

De resultaten van DUTROCHET vonden bij HOFMEISTER ten

---

*) SACHS *Flora*, 1873, N°. 21.

deele erkenning, ten deele tegenspraak *). Deze onderzoeker bevestigde, hetgeen DUTROCHET omtrent de betrekking tusschen de buigingen van jonge plantendeelen en de weefselspanning geleerd had, maar verklaarde zich tegen zijne meening dat de oorzaak der spanning in een osmotische werking der celinhouden moet gezocht worden. Hij meende deze oorzaak in veranderingen van den imbibitie-toestand der celwanden te vinden. Dit laatste punt kan geheel onafhankelijk van HOFMEISTER's werkelijke verdiensten omtrent de leer der groeikrommingen behandeld worden; wij zullen dit duidelijkheidshalve doen, en HOFMEISTER's imbibitie-leer tot het einde van onze bespreking uitstellen.

HOFMEISTER onderwierp de spanningen tusschen de verschillende weefsels van een orgaan aan een uitvoerig onderzoek, en hetgeen hij daaromtrent vaststelde vormt nog steeds de basis van onze kennis op dit gebied. Hij toonde aan, dat in jeugdige plantendeelen een spanning tusschen het parenchym éénerzijds, de vaatbundels en het huidweefsel anderzijds bestaat. Het parenchym tracht zich uit te zetten, de vaatbundel en het huidweefsel niet, of slechts weinig; de laatsten worden dus door het eerste passief uitgerekt. Door hunne elastische spanning, werken zij echter de uitzetting van het parenchym tegen. Deze spanning ontwikkelt zich in de jeugd van een orgaan slechts langzaam, en verdwijnt weer, als het den volwassen toestand bereikt.

Omtrent de geotropische en heliotropische bewegingen leerde HOFMEISTER, dat zij aan de aanwezigheid van een krachtige weefselspanning gebonden zijn. Ten minste de negatief-geotropische en de positief-heliotropische. De positief-geotropische krommingen daarentegen vinden volgens HOFMEISTER in organen zonder of met zeer geringe weefselspanning plaats; doch zijne beschouwingen omtrent deze waren in vele opzichten onvoldoende.

Verder toonde HOFMEISTER aan, dat de geotropische en heliotropische bewegingen van stengels en bladstelen met een aanzienlijke krachtsontwikkeling gepaard gaan, en dat daarbij zoowel de convexe, als ook de concave zijde in lengte toenemen.

---

*) HOFMEISTER. *Ueber die durch Schwerkraft bewirkten Richtungen von Pflanzentheilen*, Berichte der k. Sächs. Ges. d. Wiss. 1860.

Minder gelukkig was hij in zijn pogingen, om de mechanica der opwaartskromming aan het licht te brengen. Hij meende, dat slechts twee oorzaken daarvoor denkbaar waren, n.l. een toeneming van het uitzettingsstreven van het parenchym der onderzijde, of een vermindering der elasticiteit, verbonden met toeneming der rekbaarheid van de passieve weefsels dier zijde. Zijne proeven leidden hem er toe, de laatstgenoemde mogelijkheid voor de ware oorzaak aan te zien.

Het gestelde alternatief omvatte niet alle mogelijke oorzaken, en zijne proeven waren niet vrij van bedenkingen. Wat het eerste betreft, was het evengoed denkbaar, dat de kromming door een toeneming van de groeisnelheid aan de onderzijde werd veroorzaakt, een omstandigheid waarop wij weldra terugkomen. Van zijne weinig talrijke proeven citeer ik de volgende *). „Entfernt man Epidermis, Rinde und Holz von einem aufwärtsgekrümmten Spross mit geringer Rindenentwickelung, so richtet sich der entblösste Markcylinder grade." Hierin ziet HOFMEISTER het bewijs, dat het merg, hetwelk het voornaamste deel van het zich uitzettende weefsel is, geen actief aandeel aan de kromming neemt. Deze conclusie is later door proeven van SACHS bevestigd, die aantoonde dat rechte, van de omgevende weefsels bevrijde mergcylinders zich niet opwaarts krommen, als men ze horizontaal legt. Maar de verdere conclusie van HOFMEISTER, dat dus de vaatbundels en de epidermis der onderzijde rekbaarder geworden moeten zijn, is om vele redenen niet gerechtvaardigd, o. a. omdat de weggenomen schorsstrooken ook het buitenste gedeelte van het actief zich uitzettende parenchym bevatten.

Dat in het merg de oorzaak der kromming niet moet gezocht worden, daarvoor pleiten, behalve de genoemde proeven van HOFMEISTER en SACHS, nog verschillende andere feiten. Ten eerste de omstandigheid, dat het merg het centrum van den zich krommenden tak inneemt; de lengte-verandering van het merg zal dus bij een passieve buiging veel geringer zijn dan die van de schors der concave en der convexe zijde; omgekeerd, zullen krommende krachten nergens ongunstiger kunnen worden aangebracht dan juist in het merg. Daarom mag het reeds a priori als waar-

---

*) l. c. p. 286.

schijnlijk beschouwd worden, dat de oorzaak der kromming in de peripherische weefsels zetelt. Hiervoor pleit hetgeen wij omtrent den zetel der geotropische kracht in de knoopen der grassen en in wortels weten. Bij de eersten toch is alleen de peripherie, de bladscheede, actief: de stengel, die het centrum van het gewricht inneemt, is geheel, of zoo goed als geheel passief. Evenzoo is bij de wortels de vaatbundel, die zich bij de geotropische kromming passief gedraagt, in het midden gelegen, het parenchym, dat daarbij een actieve rol speelt, aan den omtrek. Het zou niet moeilijk zijn, dezen regel door meer voorbeelden te staven.

Men kan zich door een zeer eenvoudige proef gemakkelijk overtuigen, dat ook bij stengeldeelen het centrale merg voor de geotropische krommingen niet noodig is. Hiertoe neemt men dikke jonge stengels van Nicotiana Tabacum of Helianthus annuus en boort met een kurkboor voorzichtig het centrale merg er uit. Dit verlengt zich daarbij zeer fraai. De uitgeholde stengelstukken worden nu in een zinken bak op nat zand gelegd, en de ondereinden met nat zand bedekt, waarop de bak gesloten wordt om de ruimte vochtig en donker te houden. Den volgenden dag ziet men de uitgeholde stengels alle geotropisch gekromd, sommige sterker, andere zwakker. Zoo toebereide stengels gedragen zich dus als holle stengels van andere planten.

In elk geval zal men dus de oorzaak der geotropische kromming in de peripherische weefsels moeten zoeken. Daar deze nu zoowel actief parenchym, als passief gespannen vaatbundels en huidweefsel bevatten, voert HOFMEISTER's proef niet tot een beslissend antwoord op de door hem gestelde vraag.

Ik heb de behandeling van het boven aangehaalde verschilpunt tusschen HOFMEISTER en DUTROCHET tot nu toe verschoven, daar het, hoewel een zeer belangrijk punt in HOFMEISTER's theorie, toch feitelijk van zijn overige waarnemingen min of meer onafhankelijk is.

HOFMEISTER sneed uit jeugdige organen overlangsche sneden, die zoo dun waren, dat alle of bijna alle cellen er in door het mes geopend waren, en nam waar, dat ook in zulke fijne sneden nog spanningen tusschen de ongelijknamige weefsels bestonden. Hij scheurde den buitenwand der epidermis van bladen af; deze

rolt zich daarbij met den buitenkant concaaf op, ofschoon alle cellen geopend zijn. Het feit dat ook de celwanden, onafhankelijk van den turgorspanningen vertoonen, was dus onloochenbaar. Maar de conclusie, die HOFMEISTER hieruit afleidde, dat de weefselspanning alleen op deze spanningen zou berusten, en dat de osmotische wateropneming der parenchymcellen daarbij geen rol zou spelen, was, gelijk men thans gemakkelijk inziet, ongerechtvaardigd. De identiteit der celwandspanningen met de weefselspanning was niet bewezen, en vooral was het een willekeurige aanneming, dat de intensiteit van beide spanningen gelijk zou zijn.

De door HOFMEISTER aangewende methode der fijne doorsneden laat niet toe, deze vragen met zekerheid te beantwoorden; door middel van de plasmolytische methode is dit echter zeer gemakkelijk. Splijt men jonge, snelgroeiende stengeltoppen overlangs in vier deelen, zoodat deze uitéénwijken, en brengt men ze nu b.v. in een keukenzout-oplossing van 20 pCt., dan ziet men terstond de krommingen geringer worden. Ja, in het jongste gedeelte keeren zij om; de eerst concave epidermis wordt convex. In het oudere gedeelte blijft de epidermis aan de concave, het merg aan de convexe zijde. Deze waarnemingen, die ik o. a. met jonge bloemstelen van Cephalaria leucantha deed, toonen aan dat er, als de spanning tusschen wand en inhoud in alle cellen opgeheven is, nog spanningen tusschen verschillende weefsels bestaan. Deze spanningen zijn in het jongste deel tegengesteld, in het oudere, nog groeiende deel in denzelfden zin als in de turgescente plant *). Beslissender nog dan deze feiten is de omstandigheid, dat groeiende organen door de aanwending van zoutoplossingen merkbaar slapper worden, iets, wat met volwassen organen niet meer het geval is. Dit gemakkelijk waarneembare feit bewijst volkomen, dat in jeugdige planten-

*) Uit deze proeven volgt tevens de volgende, voor een juist inzicht in de oorzaken van den lengtegroei belangrijke conclusie, dat n.l. in het jongere, het snelste zich verlengende deel van een groeienden stengeltop, het merg niet sneller groeit dan de vaatbundels en de schors, maar zich alleen door wateropneming sterker tracht te verlengen. Het groeit daarbij zelfs langzamer. Eerst na de overschrijding van het maximum der groote periode, wordt de groei in het merg sneller dan in de overige weefsels. Onder groei versta ik hier natuurlijk slechts zulke veranderingen, die niet door plasmolyse opgeheven kunnen worden. Het komt mij voor, dat een nader onderzoek dezer quaestie belangrijke resultaten voor de leer van den groei belooft.

deelen de turgor een belangrijk aandeel aan de stijfheid en dus ook aan de weefselspanning heeft, terwijl dit in oudere deelen, die, gelijk men weet, gewoonlijk geen weefselspanning bezitten, niet meer het geval is.

Ten opzichte van de rol van den turgor bij de weefselspanning, had dus DUTROCHET gelijk, en HOFMEISTER ongelijk.

Weinige jaren na het bekend worden van HOFMEISTER's onderzoekingen, gaf SACHS van deze in zijn *Handbuch der Experimental-physiologie* een overzicht, dat in helderheid alle vroegere behandelingen van dit thema verre overtrof. Hierbij kwam hij op het denkbeeld, dat niet een toeneming in rekbaarheid, maar een eenzijdige versnelling van den groei der passief uitgerekte weefsels de oorzaak der geotropische en heliotropische krommingen mocht zijn. Een reeks van proeven, door hem genomen, toonde aan, dat werkelijk, bij geotropische en heliotropische buigingen van stengeldeelen, de weefsels der convexe zijde zich blijvend sterker verlengen dan die der concave zijde, en dus sneller in de lengte groeien dan deze.

SACHS begreep terstond het belang van dit feit, en trok er de algemeene conclusie uit, dat niet alleen de geotropische en heliotropische krommingen, maar ook de bewegingen der ranken, de nutatiën van vele stengels, het slingeren, en de bewegingen door welke jonge bladen en zijtakken hun normale richting innemen, op dezelfde oorzaak berusten moesten. Allen zijn volgens hem verschijnselen van groei; bij allen groeit de convex wordende zijde sneller dan de tegenovergestelde. In dit verschil in groeisnelheid ziet SACHS de oorzaak der kromming.

Het spreekt van zelf, dat hierdoor nog geenszins de vraag beslist was, of de prikkels, die de kromming bewerken, rechtstreeks, dan wel indirect op den groei door intussusceptie inwerken. Deze vraag kon zich bij de toenmaals heerschende beschouwingen nog ternauwernood aan den onderzoeker voordoen; zij ontstond eerst vele jaren later, toen SACHS' theorie van den groei een helder inzicht in de betrekking tusschen turgor en intussusceptie bij den groei der plantendeelen had gegeven *).

---

*) Zie b.v. SACHS *Lehrbuch d. Bot.* p. 813, 2 Alin., laatste zin.

Hetgeen SACHS later voor de kennis van het aandeel van turgor en groei bij de krommingen van groeiende plantendeelen gedaan heeft, bestaat eensdeels in de nauwkeurige studie van de veranderingen van den groei bij deze krommingen, anderdeels in zijne studiën omtrent de rol van den turgor bij den groei in het algemeen. Deze beide richtingen van zijn onderzoek wensch ik achtereenvolgens te behandelen.

Allereerst toonde SACHS aan *), dat bij takken, die horizontaal gelegd zijn en zich onder de inwerking der zwaartekracht omhoog krommen, de convexe zijde sterker en de concave zijde minder sterk groeit dan bij takken, die onder overigens gelijke omstandigheden in vertikalen stand onderzocht worden. Bij de knoopen van grassen is dit verschil zeer aanzienlijk; bij normalen stand is de groei aan alle zijden zeer gering, bij horizontalen stand is de verlenging aan de onderzijde uiterst sterk, terwijl de bovenzijde zich in den regel verkort. De toeneming in groeisnelheid aan de onderzijde geschiedt dan in beide gevallen, ten minste voor een deel, ten koste van de bovenzijde. Geheel overeenkomstige verschijnselen ontdekte ik korten tijd daarna bij de krommingen der ranken †).

Daarna onderzocht SACHS de geotropische krommingen der wortels, en leerde de veranderingen van de groeisnelheid der verschillende zijden bij deze verschijnselen in een uitvoerige monographie nauwkeurig kennen §).

Evenzoo onderzocht hij den vorm der kromming van geotropisch zich oprichtende stengels, en de veranderingen die de groei der concave en convexe zijde daarbij ondergaat **).

Een uitvoerige en kritische behandeling van alle groeikrommingen gaf SACHS in de 3de Editie van zijn Lehrbuch der Botanik (1873), ten deele volgens de onderzoekingen van anderen, grootendeels volgens eigen waarnemingen. Hierbij bleek vooral de groote overeenkomst en innige samenhang, die

*) SACHS, *Längenwachsthum der Ober- und Unterseite horizontalgelegter sich aufwärtskrümmender Sprosse*, Arb. d. Würzb. Instit. 1872 Heft II. d. 103.

†) Arb. der bot. Instit. in Würzb. Heft III 1873, p. 302.

§) Ibid Heft III, p. p. 385 en Heft IV, 1871, p. 584.

**) SACHS, *Flora* 1873, N°. 21.

er tusschen al deze verschijnselen bestaat: een overeenkomst, die op een afhankelijkheid van al deze zoo zeer uiteenloopende verschijnselen van dezelfde algemeene wetten wijst. De kennis van dezen samenhang meen ik als het belangrijkste algemeene resultaat van SACHS' onderzoekingen op dit gebied te mogen beschouwen; in het laatste hoofdstuk van dit opstel zal men zien, dat deze kennis van groot belang voor mijn eigen onderzoekingen geweest is.

Het uitvoerigst werd deze overeenkomst door SACHS in zijn reeds genoemde verhandelingen voor de negatief geotropische kromming van stengels en de positief geotropische beweging van wortels bestudeerd. SACHS zegt daaromtrent: „Als hoofdresultaat van mijne onderzoekingen beschouw ik vooral dit, dat de verschijnselen bij de geotropische opwaartskromming in alle hoofdzaken dezelfde zijn, maar in tegenovergestelde richting optreden als bij de geotropische afwaartskromming, en dat dus de mechanische verklaring voor beiden noodzakelijk dezelfde zijn moet." Hiermede vervielen terstond de oudere verklaringen van HOFMEISTER en KNIGHT *).

Dat deze overeenkomst ook voor de heliotropische krommingen geldt, bleek uit een uitvoerige studie dezer verschijnselen, van welker resultaten H. MÜLLER THURGAU in Flora 1876 N°. 59 een kort overzicht gaf.

Het zou mij te ver voeren, wilde ik al de détails der onderzoekingen van SACHS en MÜLLER, alsmede die van anderen, die de medegedeelde conclusie voor andere gevallen bevestigen, uitvoerig mededeelen; dit is echter ook geenszins voor mijn doel noodzakelijk.

Liever ga ik over tot SACHS' theorie van den groei. Deze werd door den beroemden onderzoeker in 1873 in de derde editie van zijn leerboek ontwikkeld. Steunende op een rijken schat van ervaringen, deels door een kritische studie, aan de oudere literatuur ontleend, deels door tal van nieuwe onderzoekingen, door hemzelven en zijne leerlingen verkregen, wees SACHS op de rol, die de turgor bij de verschijnselen van groei speelt. De betrekking tusschen de osmotische wateropneming der cellen

---

*) SACHS, *Lehrbuch d. Botanik*, 4e Aufl. S. 825.

en den groei was sedert DUTROCHET's publicatiën geheel vergeten geraakt; thans herleefde zij, om een der hechtste grondslagen van de theorie van den groei te vormen.

SACHS toonde aan, dat in groeiende weefsels de celwanden door den inhoud der cellen gespannen en uitgerekt zijn, en dat deze uitrekking in de oudere, volwassen deelen ophoudt. In snel groeiende organen is deze uitrekking aanzienlijk, in langzaam groeiende is zij geringer. Deze uitrekking der celwanden moet noodzakelijk de afzetting van nieuwe celstofmoleculen tusschen de reeds bestaande versnellen, en dus den groei door intussusceptie doen toenemen. Als een sprekend bewijs voor zijne leer, voerde SACHS aan, dat verwelkte plantendeelen niet groeien, voor en aleer de turgor weer door opneming van water hersteld is. Als verdere bewijzen moge nog aangevoerd worden, dat in de partiaalzonen van een groeienden stengeltop de groeisnelheid met de turgoruitrekking gelijken tred houdt, en evenals deze eerst toeneemt, dan een maximum bereikt, om daarna allengs af te nemen, terwijl beiden eindelijk tegelijkertijd ophouden *); verder, dat door verdunde zoutoplossingen zoowel de turgortiurekking als ook de groeisnelheid verminderd wordt, terwijl sterkere zoutoplossingen beiden opheffen †. Tal van andere feiten kunnen nog als bewijzen voor de theorie van SACHS aangevoerd worden.

Deze theorie deed nu als van zelf de vraag ontstaan, of de snellere groei aan de convexe zijde van zich krommende organen op dezelfde wijze van den turgor zou afhangen, als de groei dier organen in het algemeen. Het lag voor de hand, deze vraag bevestigend te beantwoorden, en aan te nemen dat de turgor aan den convexen kant onder den invloed der prikkels zou toenemen, en zoodoende aldaar een versnelling van den groei zou bewerken.

Doch, hoe waarschijnlijk deze conclusie ook was, men bezat geen middel om de vraag empirisch te beantwoorden, en de vergelijking met andere, overeenkomstige bewegingsverschijnselen

---

*) Zie mijn opstel *Ueber die Dehnbarkeit wachsender Sprosse*. Arb. d. Bot. Inst. in Würzb. 1874, Heft IV, p. 519 en *Ursachen der Zellstreckung* 1877, p. 104.

†) Zie mijn opstel *Ursachen der Zellstreckung* 1877, p. 52—58.

kon slechts tot zeer onvolledige vergelijkingen, en volstrekt niet tot eenige zekerheid leiden.

Als punten van vergelijking kozen verschillende onderzoekers geheel verschillende verschijnselen. Onder deze verdienen vooral de geotropische krommingen der eencellige organen eenerzijds, en de periodische bewegingen van volwassen bladgewrichten anderzijds vermeld te worden. Het zou mij te ver voeren, alle schrijvers te citeeren, die hun meening in deze quaestie hebben uitgesproken; het zal voldoende zijn, mij tot de twee voornaamste vertegenwoordigers der aangegeven standpunten te beperken.

Sachs koos als punt van vergelijking de geotropische en heliotropische bewegingen van eencellige organen. In deze is de spanning tusschen inhoud en wand klaarblijkelijk overal dezelfde, een verandering van den turgor kan dus nooit kromming veroorzaken. Deze kan slechts door verandering van de rekbaarheid of van den groei van een der beide zijden tot stand komen. Daar nu sachs aangetoond had, dat de geotropische kromming van stengels niet op een verandering der rekbaarheid, maar op een toeneming van den groei der onderzijde berust, zoo nam hij aan, dat ook bij eencellige organen de groeisnelheid van den convex wordenden kant toenam. Niet de turgor, maar de groei werd dus door de krommingsoorzaak veranderd. Deze voorstelling droeg sachs op de geotropische bewegingen van stengels en wortels over. Ook hier werkt volgens hem de prikkel niet op den turgor, maar op den groei.

Tegen de uitbreiding zijner zienswijze op veelcellige organen is echter in te brengen, dat, terwijl bij eencellige organen de turgor noodzakelijk overal dezelfde is en noodzakelijk gelijktijdig overal dezelfde veranderingen ondergaat, dit bij veelcellige plantendeelen geenszins het geval is. De turgor is hier in de verschillende ongelijknamige weefsels volstrekt niet even groot; zij kan in het eene weefsel zeer goed onafhankelijk van het andere veranderen.

De periodieke bewegingen van volwassen bladgewrichten leverden aan pfeffer het steunpunt voor zijn beschouwingwijze. In zijn opstel over periodieke bewegingen van bladachtige organen *)

---

*) Pfeffer, *Die periodischen Bewegungen der Blattorgane*, Leipzig 1875.

onderzocht hij* zoowel de bewegingen van volwassen, als die van nog groeiende organen. Het onderscheid tusschen deze beide bewegingen was nog kort te voren door SACHS in zijn Lehrbuch der Botanik *) op heldere wijze uiteengezet, de argumenten welke de noodzakelijkheid van deze onderscheiding aantoonden uitvoerig besproken en in het licht gesteld, dat de reeds bekende verschijnselen tusschen beide groepen van bewegingen zulke ingrijpende verschillen hadden leeren kennen, dat een afzonderlijke behandeling van beiden volstrekt noodzakelijk was om tot een juist inzicht te geraken in de processen die in de cellen plaats vinden, en de uitwendig zichtbare bewegingen veroorzaken. Niet ten voordeele van de helderheid zijner verhandeling, verwarde PFEFFER deze beide groepen weer met elkander en beschouwde ze als tot hetzelfde type te behooren, en slechts in ondergeschikte opzichten te verschillen. Voor zijne zienswijze voert hij aan, dat bladgewrichten dezelfde bewegingen, die zij in volwassen toestand volvoeren, ook reeds maken als ze nog groeien, en dat dezelfde prikkels dikwerf in groeiende en in volwassen organen overeenkomstige bewegingen veroorzaken. Het eerste feit pleit hoogstens tegen de door SACHS gekozen benamingen, niet tegen de juistheid der onderscheiding; maar SACHS zelf had er reeds op gewezen, dat niet alle bewegingen van volwassen organen tot deze categorie behooren †); omgekeerd spreekt het van zelf, dat deze bewegingen niet volstrekt tot den volwassen toestand van de organen die ze uitvoeren beperkt behoeven te zijn. Het tweede feit constateert slechts een uitwendige overeenkomst; het is niet in te zien, waarom verschillende planten niet door zeer verschillende processen onder dezelfde uitwendige omstandigheden hetzelfde doel zouden kunnen bereiken. De door PFEFFER aangevoerde argumenten wettigen dus zijne meening omtrent de groote overeenkomst van beide soorten van verschijnselen geenszins §).

*) 4 Ed. 1874, p 846, 850 vlg.

†) Zoo bijv. de geotropische kromming der bladgewrichten van Phaseolus (SACHS *Lehrbuch*, p. 823), waarop ik weldra terugkom.

§) De in dit opstel te beschrijven resultaten, en een zorgvuldige studie van PFEFFER's verhandeling maken het mij zeer waarschijnlijk, dat de verandering in de cellen, waarop beide groepen van verschijnselen berusten, ten eenenmale verschillend zijn.

De aangenomen overeenkomst nu leidde PFEFFER van zelf tot een bepaalde voorstelling over de oorzaak dier periodische bewegingen, welke als verschijnselen van groei bekend waren. In de volwassen organen toch berust de beweging, gelijk uit de onderzoekingen van SACHS en anderen bekend was, op verandering van den turgor; volgens de theorie van SACHS moet een toeneming van den turgor den groei eener cel versnellen en PFEFFER nam dus aan, dat ook bij de groeiende organen de oorzaak der periodische bewegingen in veranderingen van den turgor moest gezocht worden, en dat deze veranderingen eerst secundair een invloed op den groei uitoefenden, en wel zoo, dat daardoor telkens ten minste een deel der ontstane lengteveranderingen door den groei gefixeerd werd.

Rechtstreeksche proeven, om het aandeel van den turgor en van den groei aan deze proeven experimenteel te scheiden, werden door PFEFFER niet genomen, en zoo bleef zijne hypothese wat zij was *).

In één geval meent PFEFFER een direct bewijs voor zijn meening gevonden te hebben. Ik bedoel de geotropische bewegingen van de volwassen bladkussens van Phaseolus. SACHS had aangetoond †) dat de bladgewrichten van Phaseolus periodische bewegingen maken, die op veranderingen van den turgor van het parenchym der gewrichten berusten, en dus tot de groep der „bewegingen van volwassen organen" behooren, en dat dezelfde gewrichten, ook in volwassen toestand, geotropische bewegingen kunnen uitvoeren, die in alle bekende opzichten met de geotropische bewegingen van de knoopen der grassen overeenkomen, en dus groeikrommingen zijn §). Overeenkomstig daarmede, gelukte het PFEFFER dan ook, zich van den groei van het parenchym der onderzijde bij deze bewegingen te overtuigen, doch alleen dan, wanneer de beweging zeer aanzienlijk of van langen duur geweest was; zijn methode liet echter niet toe, bij zwakkere bewegingen geringere sporen van groei te ontdekken. Hij concludeerde nu, dat in deze gevallen de geotropische be-

---

*) Zie PFEFFER, l. c. p. 117—119.
†) *Bot. Ztg.* 1857, p. 809, en *Handbuch d. Experim.-Phys.* p. 490 en volgende.
§) Zie SACHS. *Lehrb. d. Botanik*, 4e Ed. p. 823.

weging niet met groei gepaard ging, en dus op toeneming van den turgor berustte; in dat geval kon de bij sterkere kromming waargenomen groei als een, volgens de theorie van SACHS noodzakelijk, gevolg van de toeneming van den turgor beschouwd worden. Maar het bewijs, dat de geotropische beweging aanvankelijk niet met groei gepaard gaat, werd door PFEFFER niet geleverd, en zoo pleitte ook deze waarneming slechts in schijn voor zijne meening.

PFEFFER's meening verkreeg door zijne argumenten geen grootere waarschijnlijkheid dan de opinie van SACHS, en zoo bleef men omtrent de gestelde vraag nog geheel in het onzekere.

Vatten wij nu, aan het slot van dit overzicht, den tegenwoordigen toestand onzer quaestie in korte woorden samen.

1°. De onderzoekingen van SACHS en anderen hebben geleerd, dat de krommingen, die groeiende organen onder de inwerking van in- of uitwendige oorzaken maken, gepaard gaan met een ongelijke groeisnelheid der convexe en concave zijde.

2°. Al deze verschijnselen komen in de belangrijkste opzichten zoodanig met elkander overeen, dat men mag aannemen, dat zij door dezelfde algemeene wetten beheerscht worden.

3°. Volgens de theorie van SACHS, hangt de groeisnelheid van een orgaan in de eerste plaats af van de uitrekking, die de celwanden door den inhoud ondergaan.

Uit deze gegevens volgt als van zelve de vraag, wier beantwoording het doel van dit opstel is, n.l.:

Welk aandeel nemen de turgor en de groei aan de groeikrommingen van veelcellige plantendeelen?

Omtrent het antwoord op deze vraag bleek ons:

1°. een antwoord, steunende op rechtstreeksche proeven, met groeiende veelcellige plantendeelen genomen, is tot nu toe niet gegeven.

2°. door vergelijking van deze organen met eencellige groeiende organen kwam SACHS tot de hypothese, dat de verandering van den groei de bewegingen veroorzaakt; door vergelijking met veelcellige volwassen organen kwam PFEFFER tot de veronderstelling, dat de verandering van den turgor de eerste oorzaak der kromming is. Geen van beide meeningen is door

voldoende argumenten zoodanig gestaafd, dat aan haar, zonder nader onderzoek, een grootere waarschijnlijkheid mag worden toegekend dan aan de andere.

Slechts een empirische behandeling der quaestie en een rechtstreeksch onderzoek der te verklaren verschijnselen zelven kunnen ons dus tot het doel leiden; theoretische beschouwingen blijken steeds eenzijdig te zijn, en niet tot zekerheid en definitieve beslissing te voeren.

In de volgende hoofdstukken gaan wij dit empirisch onderzoek instellen.

II. *De plasmolytische methode.*

Om langs empirischen weg te kunnen uitmaken, welk aandeel de turgor en de groei aan groeikrommingen hebben, is het noodig, eene methode te bezitten om den turgor in plantendeelen geheel op te heffen, zonder tegelijk andere veranderingen te veroorzaken, die de waarneming onzeker zouden kunnen maken. Zulk een methode heb ik in het gebruik van sterke zoutoplossingen gevonden. Zij berust op het beginsel, dat in eene cel slechts zoolang turgor mogelijk is, als het protoplasma overal tegen den celwand aanligt, en op de waarneming, dat sterke zoutoplossingen het protoplasma noopen, zich plaatselijk of ook wel geheel van den celwand terug te trekken. Is dit in alle cellen van een orgaan geschied, dan is de turgor daarin natuurlijk volkomen opgeheven. Men behoeft dus niet anders te doen, dan de te onderzoeken organen in een zoutoplossing van de vereischte concentratie te brengen, b.v. in een oplossing van chloornatrium van 10 pCt. Na eenigen tijd is de turgor verdwenen, en kan men ze dus in turgorloozen toestand onderzoeken.

Organen met lengtegroei verkorten zich bij deze behandeling; de mate dezer verkorting is klaarblijkelijk een maat voor de turgoruitrekking. Passen wij dit op onze vraag toe.

Een groeiend deel, zonder kromming, in de genoemde zoutoplossing gebracht, blijft daarin recht; dit bewijst dat én de door groei verkregen lengte, én de turgoruitrekking aan alle kanten even groot zijn. Nu laat ik zulk een deel een groeikromming

maken, en breng het eerst daarna in de zoutoplossing. Is bij de kromming alleen de turgoruitrekking veranderd, dan zal het in de oplossing geheel recht worden. Is echter de turgoruitrekking overal dezelfde gebleven, en alleen de groei aan de convexe zijde sterker geworden dan aan de concave, dan zal het gekromde deel zich in het zout aan beide zijden even sterk verkorten, en dus zijn kromming bijna onveranderd behouden *), of zich hoogstens iets sterker krommen. Is eindelijk zoowel de groei als de turgoruitrekking aan de convexe zijde grooter geworden dan aan de concave, dan zal het orgaan zijn kromming voor een grooter of kleiner deel verliezen. Omgekeerd, zal men uit de verandering, die de kromming van zulk een orgaan in de zoutoplossing ondergaat, met zekerheid mogen besluiten, of deze kromming alleen op groei, alleen op turgoruitzetting, of eindelijk op beiden te zamen berustte.

Uit deze redeneering blijkt, dat men de door mij gestelde vraag op een hoogst eenvoudige wijze met behulp der plasmolytische methode kan beantwoorden.

Het zij mij daarom vergund, hier mijne methode nog eenigszins uitvoeriger te beschrijven, en uiteen te zetten op welke gronden men mag aannemen, dat de verkorting van groeiende organen in sterke zoutoplossingen uitsluitend op het verlies van den turgor berust †).

Sedert NÄGELI's baanbrekende onderzoekingen §) weet iedereen, dat het levend protoplasma voor kleurstoffen ondoordringbaar is; het laat diegenen, welke in het celvocht opgelost zijn, niet naar buiten diffundeeren, en weigert aan kunstmatige kleurstoffen, die men met zijn buitenvlakte in aanraking brengt, eveneens den doorgang. Doch niet alleen voor kleurstoffen, ook voor tal van andere, in water oplosbare, stoffen is het levend protoplasma niet, of slechts in zeer geringen graad permeabel, gelijk ik voor eenige jaren aantoonde **). Tot deze stoffen

---

*) Het is goed te bedenken, dat voor deze proeven slechts dunne organen gebruikt kunnen worden.

†) Uitvoerige bewijzen voor deze stelling vindt men in mijne verhandeling *Ueber die mechanischen Ursachen der Zellstreckung*, Leipzig 1877.

§) NÄGELI, *Pflanzenphysiol. Untersuchungen*, Heft 1.

**) Sur la perméabilité du protoplasma des betteraves rouges, *Archiv. Néerl.* 1871 p. 117.

behooren o. a. ook eenige zouten en zuren, die in geringe concentratie met groote kracht water aantrekken, en die er dus zonder twijfel toe bijdragen om aan het celvocht der jonge cellen zijn zoo charakteristiek wateraantrekkend vermogen te geven.

Bij gelegenheid dezer onderzoeking wees ik op het verband, dat er tusschen het door mij bestudeerde verschijnsel en de spanning tusschen celwand en celinhoud bestaat, en toonde aan, dat deze spanning, zonder de bedoelde geringe mate van permeabiliteit van het protoplasma, niet tot stand zou kunnen komen. Want de celwand laat al deze stoffen gemakkelijk door; de geringste drukking, die zij door haar elastische spanning op den inhoud uitoefent, zou terstond een uittreden van het celvocht tengevolge hebben, zoo de geringe permeabiliteit van het protoplasma dit niet belette.

Hieruit blijkt, dat slechts zoolang als het protoplasma overal tegen den wand aanligt, een spanning tusschen inhoud en wand mogelijk is. Zoodra dus deze continuiteit ook maar plaatselijk is opgeheven, moet de turgor nul zijn geworden. En verder ziet men nu gemakkelijk in, dat turgescente cellen onder de inwerking van sterke zoutoplossingen zoolang kleiner zullen moeten worden, tot de turgor volkomen verdwenen, de celwand geheel zonder spanning is. M. a. w.: in een plasmolytische cel is geen turgor mogelijk; en wat voor een afzonderlijke cel geldt, geldt natuurlijk ook voor geheele plantendeelen.

Bij mijne proeven gebruik ik zoutoplossingen, terwijl door anderen meestal glycerine of suikeroplossing gebruikt wordt, als men het protoplasma levend van den celwand wil verwijderen. Voor ik verder ga, wil ik daarom kortelijk uiteenzetten, welke redenen mij aan zoutoplossingen de voorkeur doen geven.

De voornaamste reden is de groote diffusiesnelheid van de door mij gebruikte zouten. Wil men een tak in suikerwater plasmolytisch maken, zoo kan het meer dan een dag duren, vóór de turgor geheel verdwenen en de lengte volkomen constant geworden is; in oplossingen van chloornatrium of salpeter geschiedt dit reeds binnen weinige uren. De proeven duren dus korter, iets wat om vele redenen van belang is. Daaren-

boven behoeft men de genoemde zouten in veel geringer concentratie te nemen dan suiker; zoo werkt b. v. een 25-percentige suikeroplossing even sterk als een chloornatriumoplossing van 4 pCt. Ook is het osmotisch aequivalent van suiker in celwanden veel grooter dan van de gebruikte zouten, waardoor licht de osmotische werking een invloed op het resultaat zou kunnen verkrijgen.

Voor mijne proeven gebruik ik zoo goed als uitsluitend chloornatrium en kalisalpeter, daar deze zeer gemakkelijk door celwanden dringen, en onder de mij in dit opzicht bekende zouten de sterkste aantrekking voor water bezitten, dus in de geringste concentratie gebruikt kunnen worden, en het snelste werken.

Wat de concentratie betreft, waarin deze zouten gebruikt behooren te worden, zoo leerden mijne proeven daarover het volgende. In oplossingen van weinige percenten worden de cellen nog niet plasmolytisch; dit begint in de meeste cellen meestal eerst bij 4 en 5 pCt., en eerst bij 5—7 pCt. geraken gewoonlijk alle cellen in dien toestand. Veiligheidshalve gebruik ik daarom steeds oplossingen van minstens 10 pCt., tenzij voorafgaande proeven voor een bepaalde plant bewezen hebben, dat zwakkere oplossingen voldoende zijn. Sterkere oplossingen, b. v. van 20 pCt., werken eenigszins sneller, doch overigens geheel gelijk. Voor chloornatrium en kalisalpeter zijn de concentratiën dezelfden, daar deze zouten ongeveer met dezelfde kracht water uit de cellen aantrekken.

De verkortingen, die groeiende plantendeelen in deze zoutoplossingen vertoonen, zijn zeer aanzienlijk. Zij bedragen gewoonlijk 4—5 percent der oorspronkelijke lengte, dikwerf zelfs 8—10 pCt., en zoo men de sterkst groeiende deelen alleen bestudeert, of wel afzonderlijke cellen daaruit onderzoekt, bereikt de verkorting niet zelden 15 pCt. en meer. Men ziet dus, dat de turgoruitrekking ook met betrekkelijk grove middelen gemakkelijk te meten is.

Deze verkorting berust nu uistluitend op het verlies van den turgor; geen andere oorzaken oefenen daarop een meetbaren invloed uit. Plooien in den celwand, gelijk die bij het verwelken ontstaan, ontstaan in zoutoplossingen nooit. Zeer en-

kele malen worden de cellen een weinig ingestulpt, doordat er minder zout in de cellen dringt dan er water uittreedt. Dit geschiedt echter nooit in die mate, dat het de lengte der cellen merkbaar verandert, en bij de door mij gekozen zoutoplossingen komt dit geval bijna nooit voor. Ook de imbibitie der celwanden met de zoutoplossing verandert hunne lengte niet.

De plantendeelen blijven in de zoutoplossingen levend, als ten minste de proeven niet ongeoorloofd lang duren. Na een verblijf van enkele uren, kan men de zoutoplossing weer door water uitwasschen; dan herneemt de tak zijn vorigen turgor, en daarmede het vermogen om weer te groeien: het beste bewijs voor de onschadelijkheid der operatie. Bij langer verblijf gaat dit vermogen om zonder schade uitgewasschen te worden allengs verloren, doch men kan zich door mikroskopisch onderzoek ook dan nog overtuigen, dat de protoplasma-lichamen der plasmolytische cellen nog langen tijd in leven blijven.

Ten slotte wensch ik hier een enkel woord in te lasschen over de beteekenis van de lengteveranderingen, die men bij deze onderzoekingen aan groeiende plantendeelen waarneemt. Ik acht een juiste opvatting van dit punt van zeer hoog belang, omdat daarvan grootendeels de interpretatie der in de volgende hoofdstukken te beschrijven verschijnselen afhangt. Ten einde mij helder uit te drukken, kies ik een denkbeeldig geval, namelijk een cylindrische cel uit het snelst groeiende deel van het merg van eenigen tak.

In de plant heeft deze cel een bepaalde lengte. Nu breng ik haar in een zoutoplossing van 10 pCt. waar zij plasmolytisch wordt. Zij neemt daarbij een andere, geringere lengte aan. De oorspronkelijke lengte bestond dus uit twee factoren: het blijvende en het verloren deel der lengte. Het is duidelijk, dat de eerste factor door den groei verkregen is, en dat de tweede slechts het gevolg der mechanische uitrekking was. Ik wensch daarom den eersten factor *de ware lengte*, den tweeden *de turgoruitrekking* te noemen, en aan de som van beiden den naam van *feitelijke lengte* te geven.

Thans breng ik deze cel in water; het zout diffundeert uit de ruimte tusschen celwand en protoplasma, en het protoplasma

kan dus weer water opnemen en zich vergrooten. Weldra heeft het zich tegen den wand aangelegd, en, terwijl het steeds meer water opneemt, rekt het den celwand tot de oorspronkelijke grootte uit. Doch hiermede houdt de verlenging niet op; integendeel, de inhoud zuigt nog begeerig water op en verlengt zich daardoor zoo lang, totdat eindelijk de elastische spanning van den celwand met de uitrekkende kracht, *de turgorkracht*, evenwicht maakt. Is de uitrekking, die de celwand hierbij ondergaat, geheel elastisch, of is bij deze uitrekking de elasticiteitsgrens overschreden, en een blijvende verlenging van den wand veroorzaakt? Om op deze vraag het antwoord te vinden, brengen wij onze cel nu opnieuw in de zoutoplossing van 10 pCt. Hier verkort zij zich zeer aanzienlijk, maar wordt niet weer zoo kort als zij te voren in dezelfde zoutoplossing geweest was. Daaruit blijkt, dat werkelijk de elasticiteitsgrens overschreden was, en dat de uitrekking door wateropneming dus uit twee factoren bestond: een elastische of herstelbare, en een blijvende, onherstelbare verlenging. De grootte der eerste wordt gemeten door het verschil in lengte der cel in water en daarna in plasmolytischen toestand; de grootte der tweede verlenging door het verschil in lengte der cel in den plasmolytischen toestand vóór en ná de uitrekking in water.

Uit deze beschouwing volgen twee conclusiën:

1°. dat de turgoruitrekking nooit de maat is van de geheele uitrekking door den turgor, maar steeds alleen van het elastische deel daarvan.

2°. dat de lengte van een cel in plasmolytischen toestand kan bestaan uit twee factoren, n.l. de door groei verkregen lengte, en de door vroegere werking van den turgor reeds verkregen blijvende verlenging.

Wanneer ik dus een willekeurige cel of een willekeurig plantendeel aan de plasmolyse onderwerp, dan leer ik daardoor, behalve de feitelijke lengte van het vooraf gemeten voorwerp, kennen: 1°. het elastische deel van de uitrekking door turgor, 2°. de som van de door den groei en door het onherstelbare deel der uitrekking door den turgor verkregen lengten. De eerste grootheid noem ik *de turgoruitrekking*, de som der beide laatsten de ware lengte. Welk aandeel elk dezer beide factoren

aan de ware lengte heeft, kan vooralsnog op geenerlei wijze worden uitgemaakt.

Uit deze beschouwingen volgt, dat niet elke verandering in de ware lengte van een groeiend orgaan zonder meer als een verschijnsel van groei mag worden beschouwd. Met name geldt dit van al die veranderingen, die na snelle wateropneming en aanzienlijke verlenging in zeer korten tijd, bij de plasmolyse overblijven. Een dergelijke toeneming in lengte zal ik daarom voorzichtigheidshalve bij voorkeur eenvoudig „blijvende verlenging" noemen, en in het midden laten, in hoeverre zij op een onherstelbare uitrekking, en in hoeverre op groei berust.

Zeker is het echter, dat de groei gedurende een proef nooit grooter kan zijn dan de blijvende verlenging in dien tijd; en dit is voor een volle bewijskracht mijner onderzoekingen over het aandeel van groei en turgoruitrekking aan groeikrommingen voldoende.

Volgens de theorie van SACHS, heeft overschrijding der elasticiteitsgrens in een groeienden celwand ten gevolge, dat nieuwe moleculen tusschen de reeds bestaande afgezet worden *), zoodat volgens hem een blijvende verlenging door uitrekking, na korten tijd, zich in geen enkel opzicht meer van een verlenging door groei onderscheidt. Deze beschouwingswijze komt mij geheel gerechtvaardigd voor, en geeft mij, naar ik meen, het recht om blijvende veranderingen in de ware lengte van een orgaan, zoo ze niet plotseling of zeer snel plaats gevonden hebben, en zulke, die reeds voor geruimen tijd tot stand gekomen zijn, eenvoudig als verschijnselen van groei door intussusceptie te behandelen. Ik wensch daarmede echter geenszins, ook voor later, een beslissing omtrent het aandeel van groei en blijvende uitrekking aan zulke „blijvende verlengingen" te nemen; dit punt behoeft nader onderzoek, doch de methoden daartoe ontbreken vooralsnog.

---

*) SACHS, *Lehrbuch d. Botanik*, 4e Ed. p. 762.

III. *Anatomische en physiologische beschrijving der ranken van Sicyos angulatus.*

Asa Gray maakte het eerst op de verwonderlijke prikkelbaarheid der ranken van Sicyos angulatus opmerkzaam en deelde mede, dat men de beweging met het oog kan volgen, ja de beweging is zelfs sneller dan volstrekt noodig is om haar als zoodanig te zien *). De volgende proef geeft een denkbeeld van deze snelheid der beweging. Een rank, die, met uitzondering van een kleine haakvormige kromming aan den top, recht was, werd een- of tweemaal voorzichtig met een houten voorwerpje aangeraakt, en krulde zich toen tot $2^1/_2$—3 spiraalwindingen in anderhalve minuut op. De beweging begon eenige seconden na de aanraking, en ruim de helft der beweging was snel genoeg om gezien te worden. Nadat iets meer dan een half uur voorbij was gegaan, was de rank weer recht geworden, en in staat opnieuw dezelfde beweging uit te voeren.

Dit vindt op de schoonste wijze plaats, zoo men de ranken, in plaats van ze alleen even aan te raken, voorzichtig langs den onderkant wrijft. Ik streek met een koperen staafje 15-maal achtereen langs de onderzijde van een krachtige rank, telkens gelijkmatig van de basis naar den top gaande. Zoodra ik opgehouden had, begon de rank een beweging te maken; men zag den top voortgaan en in omstreeks één minuut had de geheele rank zich tot iets meer dan twee wijde spiraalwindingen opgerold.

Om steunsels maken krachtige ranken in weinige minuten reeds zichtbare krommingen; in $^1/_2$—1 uur kunnen zij meer dan een geheele winding maken. Zij reageeren op de minste aanraking. Drukt men ze even op een prikkelbare plaats tusschen twee vingers, dan volgt weldra een beweging. Om spinwebdraden krullen ze zich in scherpe windingen; eveneens om elkander, hetgeen, zooals men weet, de meeste andere soorten van ranken niet doen.

Snijdt men een geheele rank af en plaatst men haar in water,

*) Proceed. Americ. Acad. of Science, Vol. IV, 1858, p. 98.

zoo is zij bijna even gevoelig als aan de plant maakt bij prikkeling de schoonste bewegingen en rolt zich aan het einde van haar groei epinastisch geheel op.

Met deze groote prikkelbaarheid gaat een snelle groei gepaard. In weinige uren is de verlenging door den groei, oók onder nadeelige omstandigheden, meetbaar; in weinige dagen is het geheele leven der ranken, van het oogenblik dat ze tusschen de bladen van den knop te voorschijn treden, tot op het tijdstip, waarop ze geheel en al opgerold en volwassen zijn, afgeloopen. Ook de takken der plant groeien snel, en vormen dus bijna dagelijks nieuwe ranken. Een enkele plant, met hare talrijke vertakkingen, zou bijna genoeg materiaal voor een geheele onderzoeking leveren.

De ranken van Sicyos zijn op dezelfde wijze gevormd als die van Cucurbita; op een korten steel zijn een lange krachtige hoofdrank en 1—3 zwakkere zijranken ingeplant. Bij zeer krachtige ranken, wordt de hoofdrank soms 20 c.M. en meer lang, in de meeste gevallen is zij 10—15 c.M. lang. In den knop zijn de hoofd- en zijranken hyponastisch in een vlakke spiraal met dicht aanéénliggende windingen opgerold; als de ranken uit den knop treden, strekt zich eerst de hoofdrank; de zijranken volgen in deze beweging langzaam, zoodat men de hoofdrank meest reeds geheel recht vindt, als er nog één of meer zijranken hyponastisch gekromd zijn. Men heeft hierin steeds een gemakkelijk kenmerk om den ouderdom van een rank ongeveer te bepalen. De periode der strekking duurde b. v. bij één rank, van het oogenblik dat zij uit den knop te voorschijn kwam afgerekend, 3 à 4 dagen (bij 17^0 C.); toen bleef de rank (bij 18—19^0 C.) ruim één dag recht en begon daarna hare epinastische beweging. Andere ranken bleven bij de genoemde temperatuur 2—3 dagen recht; bij hooger temperatuur is de duur dezer periode korter.

De epinastische beweging begint niet, gelijk bij vele andere ranken, aan den top *), maar in de onderste of basale helft der rank; dit deel kromt zich in zijn geheel in een wijden

*) Zie mijn opstel: Längenwachsthum der Ober- und Unterseite sich krümmender Ranken, *Arbeiten der Bot. Inst. in Würzb.* Heft III, p. 303.

bocht, die al enger en enger wordt. Daarbij plant zich de beweging allengs naar boven toe voort; de top blijft echter nog geruimen tijd recht. Aan een rank, die reeds drie volle epinastische windingen gemaakt had, was de top over 3 cM. lengte geheel recht, hij kwam op 1 cM. afstand van het uiteinde met een steunsel in aanraking en boog zich hierom in een scherpen hoek, overeenkomende met $^3/_8$ van een winding. Hieruit blijkt, dat nog tijdens den aanvang der epinastische bewegingen de top zijn prikkelbaarheid behoudt.

Terwijl nu de epinastische windingen enger en enger worden, en zich op hoogere deelen voortplanten, wordt het rechte deel van den top steeds kleiner en kleiner, en eindelijk vindt men den top in bijna even enge windingen opgerold als het geheel.

Dezen gang van zaken heb ik bij ranken in den tuin slechts zelden kunnen waarnemen; bijna elke rank bereikt, vooral bij winderig weder, een steunsel. Bij afgesneden ranken uit den tuin daarentegen, die in water in de kamer geplaatst waren, en bij ranken van potplanten in de kamer, was het verschijnsel steeds zeer fraai te zien. Bij 17—18° C. duurt deze beweging meestal 2—3 dagen, bij hoogere temperaturen (21—22° C.) was zij soms in één nacht zoo goed als voltooid.

De epinastische windingen eener rank vertoonen gewoonlijk allen dezelfde richting. Doch wanneer de top een hindernis bij de beweging ontmoette, zag ik niet zelden een omkeering der windingsrichting, ook dan wanneer de top zich niet om dit voorwerp kromde.

Bereikt een rank tijdens hare nuteerende beweging een steunsel, zoo krult zij zich met haar top daaromheen, als het niet te dik is, en het lagere deel der rank rolt zich nu epinastisch op de bekende wijze tot zeer enge schroefwindingen op. Aan dikke steunsels maakt de top soms naast het steunsel eenige vrije enge windingen.

In een vroegere verhandeling over de bewegingen der ranken heb ik aangetoond, dat de bewegingen der ranken niet terstond

---

*) l. c. p. 307. Dit verschijnsel is geheel overeenkomstig met de door Duitsche plantenphysiologen beschreven „Nachwirkung" bij geotropische krommingen van stengels.

ophouden, als men het steunsel waarom ze zich winden verwijdert. Dit zelfde verschijnsel heb ik herhaaldelijk bij de ranken van Sicyos waargenomen. Ik kweekte de planten tot dit doel in potten, en plaatste ze tijdens de proef in de kamer. Zoo maakte b. v. een rechte rank, om een steunsel dat ik haar gaf, in $1/4$ uur $1/2$ winding; toen nam ik voorzichtig het steunsel weg, en na 10 minuten had de rank twee volle windingen gemaakt. Daarna keerde zij weer terug en ontwond zich.

Het ontwinden van ranken, wier steunsel men wegneemt, is een verschijnsel, dat door DARWIN in zijn beroemde verhandeling „On the movement and habit of climbing plants" het eerst uitvoerig beschreven is. De ranken van Sicyos zijn wegens hare merkwaardig snelle bewegingen uiterst geschikt om zijne waarneming te herhalen. Daarbij is het in het oog loopend, dat de teruggaande beweging steeds veel langzamer geschiedt dan de prikkelbeweging. Zoo maakte een rank, die ik eenige malen voorzichtig langs den onderkant wreef, tengevolge daarvan in ruim één minuut meer dan twee volle spiraalwindingen. Nog eenigen tijd duurde de nawerking, en in omstreeks $1\frac{1}{4}$ uur had de rank in 't geheel $2\frac{1}{2}$ windingen gemaakt. Toen ging zij langzaam terug, en had na ruim twee uren nog altijd een zeer aanzienlijke kromming (van omstreeks $3/4$ winding). Dit bewijst, dat het teruggaan een verschijnsel van anderen aard is dan de prikkelbeweging.

Het is hier de plaats, een verschijnsel te vermelden, dat in het vervolg herhaaldelijk ter sprake zal komen. In mijne vroegere verhandeling (l. c. p. 303) beschreef ik de kromming die ranken maken, als men herhaaldelijk tegen hare onderzijde aanklopt. Zij krommen zich dan allengs van den top af spiraalsgewijze op, waarbij de bovenzijde convex wordt; na eenigen tijd van rust worden zij weer recht. Ook als ik op de bovenzijde tikte, trad dit verschijnsel op en ook dan werd de bovenzijde convex.

De ranken van Sicyos zijn zoo uiterst gevoelig, dat bij de minste stooten deze „topkrulling" in meerdere of mindere mate bij hen wordt wordt waargenomen. Op winderige dagen vindt men in den tuin soms geen enkele rank, wier top niet min of meer opgerold, of tenminste gebogen is; zelfs jonge ranken, die

zich eerst pas gestrekt hebben, vertoonen dit. Elke ruwe behandeling der ranken doet deze topkrulling ontstaan; vandaar, dat men bij proeven met deze ranken steeds uiterst voorzichtig te werk moet gaan. Ranken, in den tuin afgesneden en naar het laboratorium gebracht, maken tengevolge daarvan veelal reeds topkrullingen. Ranken van kamerplanten, die men om ze te meten aan een maatstaf legt, vertoonen hetzelfde. Bij vele proeven is deze topkrulling een gewoon en onvermijdelijk verschijnsel, wanneer n. l. de inrichting der proef het onmogelijk maakt, een aanraking der rank met andere voorwerpen te vermijden.

De omstandigheid, dat de epinastische beweging bij onze ranken aan de basis begint, maakt, dat er nooit gevaar bestaat deze beide verschijnselen, waarvan het eene door prikkeling ontstaat en het andere niet, met elkander te verwarren.

Voor een juiste beoordeeling van de proeven, die ik in de volgende hoofstukken zal beschrijven, is het noodig, met den anatomischen bouw en de physiologische eigenschappen onzer ranken ten minste in hoofdzaken bekend te zijn. Daarom wensch ik deze ranken hier uit dit oogpunt nader te beschouwen, en achtereenvolgens te behandelen: de anatomie, de inwerking van zoutoplossingen en de verschijnselen der weefselspanning. Zoo niets omtrent den ouderdom gezegd wordt, bedoel ik die periode van ontwikkeling, in welke de ranken recht zijn.

De anatomische beschrijving der ranken begin ik met den steel. Deze is op dwarsdoorsnede bijna cirkelrond, doch aan de bovenzijde een weinig afgeplat; hij is inwendig hol, de holte heeft denzelfden vorm als de omtrek. In het wijdcellige parenchymatische weefsel vertoonen zich 6 vaatbundels en 6 onderhuidsche collenchymstrengen, die zoo geplaatst zijn, dat telkens een collenchymstreng en een vaatbundel op denzelfden straal staan. Aan de voorzijde vindt men er drie, dichter bij elkander, één in het midden en twee aan de beide randen der voorzijde; de drie overigen staan op gelijke afstanden aan den omtrek verdeeld. Elke vaatbundel bestaat uit een klein xyleem en twee groote phloëem-bundels, waarvan de eene ovaal, de andere peripherisch geplaatst is, gelijk dit bij de Cucurbitaceeën het geval pleegt te zijn. Het xyleem is steeds zwak ontwikkeld en bevat

eenige weinige ring- en spiraalvaten; een vaatbundelscheede is niet aanwezig.

De stevigheid van den steel berust dus voor een deel op de collenchymstrengen; de buigzaamheid is naar alle zijden ongeveer even groot.

Vergelijken wij hiermede het onderste niet prikkelbare gedeelte van de takken der rank, en kiezen wij daartoe de basis der hoofdrank, eenige c.M. boven het punt, waar de zijranken ontspringen. De doorsnede is hier reeds veel duidelijker bilateraal; de bovenkant is min of meer gleufvormig uitgehold en scherp afgescheiden. Ook ontbreken in het midden van den bovenkant de vaatbundel en de collenchymstreng, die wij op deze plaats in den steel vonden. Overigens vinden wij dezelfde vaatbundels en collenchymstrengen terug, alleen zijn die, welke aan de achterzijde liggen, hier veel dichter bij elkander geplaatst; ook hierdoor is het onderscheid tusschen vóór- en achterzijde veel scherper gemarkeerd dan in den steel. De rank is hier niet hol; het centrale parenchym zeer grootcellig, het periphe-rische meer kleincellig. De vaatbundels hebben geen vaatbundelscheeden of collenchymstrengen, en slechts een zwak xyleem.

Een weinig hooger komen de drie collenchymstrengen der achterzijde nog dichter bijeen, en versmelten weldra geheel met elkander tot een breeden, den geheelen achterkant bedekkenden band; deze blijft dan tot aan den top der rank.

Nog iets hooger komen de drie vaatbundels der achterzijde dichter en dichter bij elkander, en spoedig versmelten hun peripherische phloëembundels tot een weefsellaag, die overal tegen den collenchymband aanligt; nergens vindt men tusschen beiden nog parenchym. De xyleembundels en inwendige phloëemdeelen blijven geïsoleerd.

Op dezelfde hoogte ondergaat ook de bovenzijde veranderingen; zij wordt breeder, de beide hoeken treden met hunne collenchymlijsten sterker vooruit, de vaatbundels onder deze worden zeer zwak en komen dichter onder het collenchym te liggen; ze bevatten in het xyleem nog maar een paar spiraal- en ringvaten.

Bij al deze veranderingen is de rank zelf veel platter geworden, zoodat zij in het bovenste, prikkelbare deel omstreeks eens zoo breed als dik is.

Hetgeen voor ons in den bouw van het prikkelbare deel der rank het meest belangrijk is, is dus het volgende. De rank is hier plat en breed, en dus in haar mediaanvlak zeer buigzaam. De bovenzijde bestaat grootendeels uit parenchym; en heeft slechts aan de beide hoeken twee dunne collenchymstrengen en twee zwakke vaatbundels; deze zijde is dus zeer rekbaar. Het centrum bestaat uit parenchym. De onderzijde bestaat uit drie grootere ofschoon zwakke vaatbundels, en daaronder een breede, dikke collenchymlaag. Zij is dus veel minder rekbaar dan de bovenzijde.

Veronderstellen wij dus, dat het parenchym op een gegeven oogenblik zich plotseling sterker tracht uit te zetten dan kort te voren, dan moet de rank zich tengevolge hiervan krommen, en wel met de bovenzijde convex. Dit volgt met noodzakelijkheid uit den beschreven bouw.

De ranken zijn alleen aan de onderzijde prikkelbaar; de prikkel moet dus door de epidermis, het collenchym en het phloëem der drie achterste vaatbundels heendringen, vóór zij het parenchym kan bereiken. Deze opmerking is daarom van belang, omdat wij later zien zullen dat de zetel der kracht, die de kromming na prikkeling veroorzaakt, in dit parenchym te zoeken is.

Uit deze beschrijving van den bouw volgt tevens, dat bij alle krommingen der ranken het geheele parenchym in lengte toeneemt, zelfs wanneer, gelijk dit bij krommingen van ranken het geval pleegt te zijn, de onderzijde min of meer korter wordt *). Aan zulk een verkorting kan, behalve het collenchym, hoogstens ook nog een deel van het phloëem der vaatbundels deel nemen.

Dit resultaat, dat men gemakkelijk nog nader zou kunnen bewijzen, zoo men uit de l. c. p. 314 gegeven cijfers de ligging van de neutrale as der kromming berekende, en daardoor haar plaats op de doorsnede van de rank nauwkeurig bepaalde, is daarom van belang, omdat het onze latere beschouwingen omtrent de bewegingen der ranken zeer vereenvoudigt. Het laat zich op de volgende wijze uitspreken.

---

*) Zie mijn opstel: Längenwachsthum der Ober- und Unterseite sich krümmender Ranken, *Arbeiten des Bot. Instit.* Würzb. Heft III, p. 302.

Bij alle krommingen van de ranken van Sicyos, zoowel de epinastische als de prikkel-bewegingen, ondergaan het collenchym en de vaatbundels der achterzijde slechts geringe verandering in lengte; deze verandering is nu eens een verlenging, dan weer een verkorting. Daarentegen verlengen zich altijd alle cellen van het parenchym, alsmede de vaatbundels en collenchym-strengen der bovenzijde. De oorzaak der kromming zetelt dus klaarblijkelijk in de bovenzijde; phloëem en collenchym der onderzijde spelen daarbij een ondergeschikte rol en gedragen zich waarschijnlijk slechts passief.

In ons V^e^ hoofdstuk zullen wij hierop verder bouwen, en ons de vraag voorleggen, of de krommende oorzaak in het parenchym, dan wel in de vaatbundels of collenchymstrengen der bovenzijde te zoeken is.

Nog een enkel woord omtrent de haren. Lange spitse haren, en lange en korte klierharen vindt men op het onderste deel der rank vrij veel, naar boven toe worden zij zeldzamer; het prikkelbare deel der rank schijnt geheel onbehaard te zijn.

Inwerking der zoutoplossingen. Om de vraag te beantwoorden, bij welke concentratie der zoutoplossing de cellen der ranken plasmolytisch worden en haar turgor verliezen, heb ik deels de cellen zelven in zoutoplossingen van verschillende concentratie onderzocht, deels de verkorting gemeten, die ranken in oplossingen van verschillende sterkte vertoonen.

Voor de eerste proef werden ranken in chloornatrium-oplossingen van 4 – 8 pCt. gebracht en na drie uren mikroskopisch onderzocht. De resultaten zijn de volgende:

I. In Na Cl van 4 pCt. In alle cellen der epidermis was het protoplasma van beide einden ver terug getrokken, aan de zijwanden nog breed verbonden. In het parenchym waren talrijke cellen min of meer plasmolytisch; het protoplasma was plaatselijk van de eind- of zijwanden geïsoleerd, nergens geheel vrij.

II. In Na Cl van 5 pCt. Epidermis als in 4 pCt. In het parenchym in de meeste cellen het protoplasma volkomen van den celwand geïsoleerd, vrij in de celholte liggende.

III. In Na Cl van 6 pCt. Zoowel in de epidermis als in het parenchym in alle onderzochte cellen het protoplasma alzijdig van den wand geïsoleerd.

IV. In NaCl van 7 pCt. en 8 pCt. Epidermis en parenchym als boven; ook in het phloëem der vaatbundels was hier de plasmolyse der cellen duidelijk te zien.

Men ziet dat de plasmolyse reeds bij 4 pCt. begint, doch nog niet volkomen is; bij 5 pCt. wordt het protoplasma in de meeste, bij 6—8 pCt. wel in alle cellen van den wand geïsoleerd.

Over de verkorting van ranken in verschillende zoutoplossingen heb ik de volgende proeven genomen.

I. In NaCl van 1 pCt. Drie hoofdranken, geheel recht, werden voor deze proef op bepaalden afstand van hun top van een merk met O.-I. inkt voorzien, en na één uur in de zoutoplossing geweest te zijn weer gemeten.

De lengte, in m.M. uitgedrukt was:

	Vóór	Na	Diff.
I.	60.0	60.0	0 0
II.	100.0	100.3	0.3
III.	90.0	90.0	0.0

Dus in twee gevallen geen verandering, in één een geringe verlenging. Bij langer verblijf verlengden zich alle drie, door groei.

II. In NaCl van 2 pCt. Inrichting der proef dezelfde als in N^0. I. De lengte, in m.M. uitgedrukt was:

	Vóór	Na 1 uur.	Na 3 uur.	Diff.
I.	50.0	49.0	48.5	1.5
II.	100.0	98.3	97.8	2.2
III.	100.0	99.0	98 4	1.6

Dus een verkorting van 1.6—3 pCt.

III. In NaCl van 4 pCt. Vijf krachtige hoofdranken werden met éene uitzondering (IV) van den top beroofd en op een lengte van 100—125 m.M. afgesneden. De stukken werden toen gemeten en in een zoutoplossing van 4 pCt. onder de luchtpomp geïnjicieerd.

De metingen gaven de volgende resultaten, in m.M. uitgedrukt:

	Vóór	Na $^3/_4$ uur.	Na 20 uur.	Diff.
I.	107.0	103.5	103.5	3.5
II.	106.5	104.5	104.5	2.0
III.	110.5	107.5	107.0	3.5
IV.	121.5	118.5	118.5	3.0
V.	101.5	99.0	99.0	2.5

Na $^3/_4$ uur was in vier exemplaren reeds volkomen, in het andere bijna de constante lengte bereikt. De verkorting bedroeg omstreeks 2,0—3,5 pCt., dus meer dan in 2 pCt. zoutoplossing.

IV. In Na Cl van 5 pCt. Inrichting geheel als bij III. Ranken iets jonger, I—IV hoofdranken, V zijrank; I en III zonder top, de anderen met top.

Gemeten lengte in m.M.:

	Vóór	Na 70 min.	Na 20 uur.	Diff.
I.	120.0	116.0	115.5	4.5
II.	106.5	102.5	102.0	4.5
III.	111.5	109.0	108.5	3.0
IV.	110.0	107.0	107.0	3.0
V.	93.0	91.5	91.5	1.5

Na 70 min. in 3 ex. bijna, in 2 ex. geheel constante lengte. Verkorting 1.5—4.5, gemiddeld iets grooter dan in 4 pCt. zoutoplossing.

V. In Na Cl van 20 pCt. Groote hoofdranken, zeer krachtig ontwikkeld. Op meest 100.0 m.M. van den top een merk met O.-I. inkt.

De metingen toonden in m.M.:

	Vóór	Na 1 uur.	Na 2 uur.	Diff.
I.	100.0	96.5	96.5	3.5
II.	100.0	96.2	96.2	3.8
III.	100.0	97.3	97.3	2.7
IV.	110.0	107.4	—	2.6
V.	100.0	97.0	—	3.0
VI.	100.0	97.5	—	2.5

Dus na 1 uur constante lengte met een verkorting van 2.5 — 3.0 pCt.

Het resultaat van deze proeven is dus:

1°. in 1 pCt. zoutoplossing vindt geen verkorting plaats.

2°. in 2—20 pCt. zoutoplossing verkorten zich de ranken, en wel in de zwakkere oplossingen minder dan in die, in welke alle cellen in den plasmolytischen toestand geraken.

3°. De verkorting bij totale opheffing van den turgor bedraagt omstreeks 2.5—4.5 pCt.

Als eindresultaat van al deze proeven leeren wij, dat men, om zeker te zijn dat in een rank alle cellen plasmolytisch zijn, minstens een hoogere concentratie dan 5 pCt. moet aanwenden. Ik heb daartoe in den regel 20 pCt. chloornatrium gebruikt.

Dat het verblijf der ranken in de zoutoplossingen geenszins doodelijk is, mag reeds a priori uit mijne vroegere onderzoekingen omtrent de onschadelijkheid van zoutoplossingen voor groeiende plantendeelen worden aangenomen. Ik heb echter ten overvloede eenige dezer proeven met de ranken van Sicyos herhaald, en wil daarvan het voornaamste thans mededeelen.

I. In 1 pCt. chloornatrium kunnen ranken nog groeien, hoewel de snelheid van den groei natuurlijk door de vermindering van den turgor kleiner zal zijn. Dit blijkt uit een voortzetting van proef I op p. 84. De daar beschreven ranken bleven na afloop dier proef nog in de zoutoplossing en werden hier van tijd tot tijd gemeten.

Hun lengte bedroeg in m.M.:

	Bij den aanvang.	Na 3 uur.	Na 24 uur.	Toeneming.
I.	60.0	62.0	66.	6.
II.	100.0	103.0	114.	14.
III.	90.0	93.5	99.	9.

Dus vrij aanzienlijke groei. De ranken vertoonden tengevolge van de herhaalde bewerkingen sterke topkrulling (zie pag. 21); de toppen waren bij I in 7, bij II in 8, bij III in 7 enge windingen opgerold, hetgeen de meting aan het eind der proef zeer bemoeilijkte.

II. Ook in 2 pCt. chloornatrium kunnen ranken nog groeien.

Dit bleek uit een voortzetting van proef II op pag. 84, op dezelfde wijze als hierboven bij proef I.

De lengte der ranken bedroeg in m.M.:

	Na 3 uur.	Na 6 uur.	Na 24 uur.	Toeneming
I.	48.5	49.0	50.	1.5
II.	97.8	99.0	104.	6.2
III.	98.4	99.5	106.	7.6

Ook hier vertoonden de ranken tengevolge der bewerkingen topkrulling. I had slechts één, II $5^1/_2$ en III $6^1/_2$ zeer enge windingen aan den top.

De groei was dus ook in 2 pCt. nog zeer duidelijk, hoewel merkbaar minder dan in 1 pCt.

III. Om aan te toonen dat het zout zonder schade voor het leven kan worden uitgewasschen, werden ranken gedurende eenigen tijd in zoutoplossingen van de hierboven gebruikte concentratiën gebracht. Zij waren bij 't begin der proef recht, en kromden zich in de oplossingen een weinig. Na 4 uur werden ze in veel water gelegd, hier namen langzamerhand de krommingen toe.

Vijf ranken werden in 4 pCt. chloornatrium gebracht en uitgewasschen. De krommingen bedroegen na een paar dagen bij I 15 windingen, II 14 w., III 9 w., IV 6 w., V $^3/_4$ w.; de ranken waren allen stijf en frisch, de windingen vormden enge regelmatige spiralen aan den top.

Twee ranken werden na een verblijf van 4 uur in 5 pCt. chloornatrium uitgewasschen. Windingen na twee dagen $^1/_4$ en $1^1/_2$; ranken frisch.

Een rank bleef 4 uur in 6 pCt. zoutoplossing en vormde, na in water gebracht te zijn, in twee dagen aan zijn top een zuivere spiraal van 7 windingen; een andere evenzoo behandelde rank maakte 4 windingen. Aan 't eind der proef beiden frisch.

Twee ranken, na 4 uur uit 8 pCt. zoutoplossing in water gebracht, krulden hare toppen hier tot $^1/_2$ en $1^3/_4$ winding op.

Ten laatste werden twee ranken, die reeds bij 't begin der proef topkrulling vertoonden, in 20 pCt. chloornatrium gebracht. Hier ontwonden zij zich gedeeltelijk; zij werden na $^3/_4$ uur in water gebracht, waar ze het aantal der windingen weer vermeer-

derden. In het zout slap, werden ze in het water weer stijf. Het aantal der windingen bedroeg:

	I.	II.
Bij het begin	$3^1/_2$	6
Na $^3/_4$ uur in 20 pCt.. .	$^1/_2$	3
Na 2 dagen in water. . .	6	$6^1/_2$

Bij een langer verblijf in sterke zoutoplossingen wordt echter de kans om met goed gevolg te worden uitgewasschen, natuurlijk steeds geringer.

Al deze proeven toonen aan, dat de zoutoplossingen de ranken geenszins rechtstreeks dooden. Het spreekt echter van zelf, dat bij een lang verblijf der afgesneden ranken in het zout, deze onvermijdelijk hun dood tegemoet gaan. In elk geval ziet men, dat, wat van de inwerking van zoutoplossingen op groeiende plantendeelen in 't algemeen bekend is, zonder bezwaar ook op de ranken van Sicyos mag worden toegepast.

De weefselspanning in de ranken heb ik alleen volgens de bekende methode der overlangsche splijting, niet ook door rechtstreeksche meting der afzonderlijke weefsels bestudeerd. Dit laatste is bij de fijnheid der ranken moeilijk, en voor mijn doel geheel onnoodig.

Snijdt men ranken van Sicyos dwars door, dan ziet men terstond uit de sneevlakte een grooten druppel vocht treden: een bewijs, dat dit vocht in de onverwonde rank onder aanzienlijke drukking stond. Ranken, die reeds sedert eenige uren afgesneden zijn en in water stonden, toonen dit verschijnsel eveneens. Snijdt men een rank op verschillende plaatsen door, dan komen er toch telkens druppels te voorschijn.

Snijdt men een rank door, verwijdert men de gekomen druppels, en snijdt dan met een scheermes een dun laagje af, zoo kan men op de nieuwe sneevlakte het uittreden der druppels met de loupe waarnemen. Men ziet dan zeer duidelijk, dat zij uit de streek der vaatbundels, en niet uit het centrale parenchym komen.

Splijt men een rank volgens het mediaanvlak in twee helften, dan wijken beide deelen uitéén, als bewijs voor de voor-

handen weefselspanning. Hetzelfde geschiedt bij splijting volgens een axiel vlak loodrecht op het mediaanvlak. Snijdt men een rank in stukjes van 2 c.M., en splijt men elk dezer overlangs in twee gelijke helften, dan wijken de helften des te sterker uiteen, naarmate het stukje dichter bij den top lag. Dicht bij den top zijn de verschillen grooter, in de basale helft uiterst gering. Ook de steel van rechte ranken toont nog weefselspanning.

Het was van belang te weten, in hoeverre deze weefselspanning op een verschillenden groei, en in hoeverre op verschillende turgoruitrekking der verschillende weefsels berust. Vooral daarom was dit belangrijk, daar deze vraag voor andere organen met weefselspanning nog niet grondig onderzocht is *).

Ik heb daarom een hoofdrank in stukjes van 2 c.M. lengte gesneden, allen in het mediaanvlak gespleten en toen in 20 pCt. zoutoplossing gebracht. Terstond verloren zij hun krommingen, en kromden zich allen met het parenchym concaaf. Het onderste deel der rank, even boven de inplanting der zijranken, spleet ik rosetvormig in 4 deelen; hierdoor was de omkeering der krommingsrichting in het zout nog veel duidelijker zichtbaar. Uit deze proef volgt, dat het merg in alle deelen der rank minder gegroeid is dan de peripherische weefsels, en dat het in de gespleten stukken slechts tengevolge der turgoruitrekking langer is dan gene. De weefselspanning berust dus niet op een verschil in groei door intussusceptie, maar op een verschil in uitrekking door den turgor. De groei is wel ongelijk, maar zou, alleen werkende, juist tot tegenovergestelde spanningen aanleiding geven.

Welk het aandeel van turgor en groei aan de weefselspanning in andere ranken is, heb ik niet onderzocht.

Het is een bekend verschijnsel, dat gespleten deelen van groeiende organen, in water gebracht, hun krommingen meest aanzienlijk vermeerderen. Hetzelfde is natuurlijk het geval met de ranken van Sicyos. De oprolling is zeer sterk. Een stuk van den top, 2 c.M. lang, werd in twee gelijke deelen gespleten en in water gebracht; beide helften wonden zich tot drie

*) Eenige proeven hierover beschreef ik reeds op pag. 60.

enge windingen op. Heeft men de geheele rank in stukken van 2 c.M. gesneden, en deze op dezelfde wijze gespleten en in water gebracht, zoo ziet men dat de helften zich allen sterker krommen, doch des te minder, naarmate ze verder van den top aflagen.

Bij deze oprolling, die bijna momentaan geschiedt, wordt de elasticiteitsgrens der celwanden overschreden, en wel des te meer, naarmate de oprolling sterker was, of het verblijf in water langer duurde. Daar ook dit punt voor groeiende planten-deelen nog niet onderzocht is, wil ik een paar proeven iets uitvoeriger beschrijven.

I. Een krachtige rechte rank van 15 c.M. lengte werd in stukjes van 2 c.M. lengte gesneden, en deze volgens het mediaanvlak zóó gespleten, dat beide helften aan haar ondereinde met elkander in verbinding bleven. Daarop werden alle stukjes in water gebracht, waar zij $^1/_4$ uur bleven; daarna kwamen ze in Na Cl van 20 pCt. Hier ontrolden ze zich in $^1/_2$ uur, en behielden toen gedurende uren dezelfde kromming; waarbij steeds het parenchym convex was.

Het aantal der windingen bedroeg in de beide helften der stukjes:

N°. der stukjes.	In water.	In zoutoplossing.
I. (top)	3—3	$^3/_4$—$^3/_4$
II.	$1^1/_2$—$2^1/_2$	$^1/_2$—$^1/_2$
III.	$1^1/_2$—$^3/_4$	$^1/_8$—$^1/_8$
IV.	$^5/_8$—$^5/_8$	$^1/_8$—$^1/_8$

In de lagere deelen waren de krommingen minder regelmatig.

II. Een andere rank werd geheel op dezelfde wijze behandeld; de stukjes bleven echter, in plaats van $^1/_4$ uur, 2 uren in het water.

Het aantal windingen bedroeg:

N°. der stukjes.	In water.	In zoutoplossing.
I. (top)	$2^1/_2$—$3^3/_4$	1—$^5/_8$
II.	$2^1/_2$—$3^1/_2$	1—1
III.	$1^1/_2$—$1^1/_2$	$^3/_4$—$^3/_4$
V.	$1^3/_4$—$1^3/_4$	$^1/_2$—$^5/_8$
VIII.	$1^1/_2$—$^3/_4$	$^3/_4$—$^1/_4$

In de overige stukjes waren de krommingen minder regelmatig.

Uit deze beide proeven ziet men, dat de krommingen der stukjes in water ten deele herstelbaar, ten deele onherstelbaar zijn, en dus ten deele op een overschrijding der elasticiteitsgrens berusten. De na opheffing van den turgor blijvende krommingen zijn in de jongere deelen aanzienlijker dan in de oudere, en na een verblijf van 2 uur in water grooter dan na een verblijf van slechts $^1/_4$ uur.

Hetzelfde geldt, volgens eenige door mij genomen proeven, mutatis mutandis, ook van andere groeiende organen.

De oorzaak, zoowel van de weefselspanning als van de opkrulling in water, berust op het streven van het centrale weefsel om zich door wateropneming te verlengen. Dit weefsel is het parenchym; de epidermis, het collenchym en de vaatbundels gedragen zich tegenover het parenchym bij dit proces passief. Van de juistheid van deze stelling heb ik mij door een aantal proeven overtuigd, in welke stukjes van ranken volgens de meest verschillende vlakken overlangs gespleten werden. Tusschen de overige passieve weefsels bestaat slechts geringe spanning. Snijdt men de beide collenchymstrengen van de voorzijde, elk afzonderlijk of met de tusschenbeide liggende epidermis, maar zonder parenchym af, dan kromt zich zulk een lamel niet, ook in water bijna niet; is er ergens een weinig parenchym aangebleven, dan kromt zich dit deel. Snijdt men van de onderzijde een strook collenchym en epidermis af, dan kromt deze strook zich zwak, en blijft ook in water zwak gekromd. Splijt men een rank volgens een vlak loodrecht op 't mediaanvlak, zóó, dat de voorhelft bijna al het parenchym, de achterhelft weinig parenchym, maar bijna al het vaatbundelweefsel en het collenchym bevat, dan rolt zich in water de voohrelft zeer sterk op, terwijl de achterhelft slechts een zwakke kromming maakt. Gemakkelijk zoude ik nog meerdere proeven kunnen aanvoeren, doch de medegedeelde mogen voldoende zijn om te bewijzen, dat ook bij de ranken van Sicyos in het parenchym de uitzettende kracht huist, terwijl de overige weefsels door deze kracht passief worden uitgerekt.

De voornaamste punten, die door de in dit hoofdstuk beschre-

ven proeven zijn bewezen, en in de volgende afdeelingen gebruikt moeten worden, zijn de volgende:

1⁰. De ranken van Sicyos angulatus onderscheiden zich van andere ranken door hare buitengewone prikkelbaarheid; hare bewegingen zijn in vele gevallen zoo snel, dat men ze met het oog kan volgen (ASA GRAY).

2⁰. Deze ranken vertoonen dezelfde verschijnselen van prikkelbaarheid, nawerking en teruggaan na prikkelbewegingen, die ook bij andere ranken bekend zijn. Haar epinastische kromming begint echter aan de basis en niet, zooals gewoonlijk, aan den top. Daarentegen vertoonen ze, ook na zeer zwakke prikkels, het ook bij andere ranken waargenomen verschijnsel der „topkrulling" in veel hoogere mate.

3⁰. De onderzijde van het prikkelbaar deel der rank, in welke de neutrale as der krommingen valt, wordt geheel door collenchym en vaatbundelweefsel ingenomen. Bij alle krommingsverschijnselen verlengt zich dus steeds het geheele parenchym; ook de zwakke vaatbundels en collenchymstrengen der bovenzijde nemen daarbij in lengte toe.

4⁰. Een chloornatriumoplosing van 1 pCt. verandert in korten tijd de lengte der ranken niet; in 2 pCt. of hoogere concentratiën worden de ranken korter. Zoowel in 1 pCt. als in 2 pCt. kunnen de ranken voortgaan te groeien.

5⁰. Chloornatriumoplossingen van 4 en 5 pCt. maken de meeste doch niet alle cellen plasmolytisch, en heffen den turgor bijna, doch niet geheel volledig op. Om dit doel volledig te bereiken, is dus een zoutoplossing van hoogere concentratie (b.v. 20 pCt.) noodig.

6⁰. Na een niet te lang verblijf der ranken in zoutoplossingen kunnen deze zonder schade worden uitgewasschen.

7⁰. De weefselspanning der ranken berust niet op een verschil in groei der verschillende weefsels, maar op de sterkere turgoruitrekking van het parenchym, tegenover de vaatbundels, het collenchym en de epidermis.

8⁰. Wanneer in overlangs gespleten deelen van ranken de door weefselspanning ontstane krommingen door opneming van water worden versterkt, wordt hierbij de elasticiteitsgrens der celwanden, soms in zeer hooge mate, overschreden.

IV. *Over het aandeel van de turgoruitrekking en den groei aan de bewegingen der ranken.*

Bij de studie van de rol van den turgor bij de groeikrommingen, is het naar mijne meening de eerste en belangrijkste vraag, of de krommingen van groeiende organen, door welke oorzaken ook te weeg gebracht, uitsluitend op groei, of uitsluitend op turgoruitrekking, of eindelijk op beide te samen berusten. Eerst wanneer deze vraag beantwoord is, en men dus het aandeel van de turgoruitrekking en den groei aan eene beweging kent, is het geoorloofd te trachten, dieper in de kennis van de oorzaken van deze verschijnselen in te dringen. Om deze reden wijd ik aan de beantwoording dezer vraag dit hoofdstuk.

In het tweede hoofdstuk heb ik uitvoerig de methode mijner proeven beschreven. Ik kan mij dus thans tot een korte beschrijving van de modificatiën beperken, die voor het speciale onderzoek der ranken aangebracht werden. Men herinnert zich, dat het beginsel mijner proeven bestaat in de opheffing van den turgor, en daarmede van de turgoruitrekking, door de inwerking van sterke zoutoplossingen.

Voor mijne proeven met ranken heb ik steeds een chloornatrium-oplossing van 20 pCt. gebruikt; deze werd in vlakke, slechts 2—4 c.M. hooge schaaltjes gebracht, teneinde de aanraking van de vloeistof met de lucht zooveel mogelijk te bevorderen. In de vloeistof bracht ik de ranken, zoodra ze in den toestand gekomen waren, omtrent welken ik de gestelde vraag wilde beantwoorden. Vóóraf werden de ranken nageteekend, en het aantal der windingen geteld; het bleek dat een schatting tot op $^1/_8$ winding zeer gemakkelijk, en in bijna alle gevallen ruim voldoende voor mijn doel was. Een nauwkeuriger bepaling, b.v. in graden, zou bij de onregelmatigheid die de krommingen der ranken zeer dikwijls vertoonen, in werkelijkheid toch tot geen grootere juistheid leiden. De ranken werden steeds voorzichtig in het zout gebracht; dit dringt in den regel na weinige minuten in, en heft, gelijk wij in het derde hoofdstuk zagen, in korten tijd den turgor volkomen op. Van tijd tot tijd werden de ranken dan met de teekening vergeleken, het aantal windingen geteld en opgeschreven, en zoo noodig eene nieuwe

teekening gemaakt. Als na verloop van eenigen tijd bleek, dat de zichtbare veranderingen in de ranken volkomen waren opgehouden, werd de proef gesloten.

Vóór het begin van de inwerking van het zout, verkeerde de rank in turgescenten toestand; aan het einde der proef was zij turgorloos. Het verschil tusschen beide toestanden berust dus geheel op de turgoruitrekking. Daarentegen berusten de windingen, die na de inwerking van het zout overbleven, op een blijvende verlenging, die, zooals wij vroeger gezien hebben (pag. 91) ten deele op een blijvende uitrekking door turgor, ten deele op groei berusten kan. Deze beide laatste factoren kunnen voorloopig niet gescheiden worden.

Brengen wij een rechte rank in het zout, zoo kromt zij zich dikwerf met de bovenzijde concaaf. De verklaring hiervan is zeer eenvoudig. De lengte van de rank berust aan beide zijden, boven en onder, op de som van de door groei verkregen lengte en de turgoruitrekking. In de turgescente rank is, zoolang zij recht is, deze som aan beide zijden gelijk, maar de beide factoren kunnen daarom toch verschillend zijn. Kromt zich nu de rank bij de plasmolyse, dan blijkt daaruit dat de bovenzijde zich sterker verkort dan de onderzijde. M. a. w. de door groei verkregen lengte, de ware lengte (pag. 73), is aan de bovenzijde geringer dan aan de onderzijde, de turgoruitrekking daarentegen boven grooter dan onder.

Na deze beide voorbeelden zal het gemakkelijk zijn, de beteekenis mijner proeven te begrijpen.

Om een helder inzicht in het aandeel van turgoruitrekking en groei aan de bewegingsverschijnselen der ranken te erlangen, heb ik bijna alle verschillende toestanden, waarin zich de ranken aan ons oog kunnen voordoen, aan de plasmolyse onderworpen. Alleen de hyponastische oprolling in den knop heb ik, wegens de kleinheid der ranken, daarvan uitgesloten. Om het overzicht over mijne proeven gemakkelijker te maken, heb ik ze in bepaalde groepen samengevat; deze behandelen achtereenvolgens:

A. De bewegingen der ranken tengevolge van inwendige oorzaken: Epinastische bewegingen.

B. De prikkelbewegingen.

Beide afdeelingen kunnen in onderafdeelingen gesplitst worden. De ranken toch, die aan geen prikkel blootstonden, zijn in drie perioden van haar leven onderzocht en wel α tijdens de opheffing der hyponastische kromming: periode der strekking; β gedurende den tijd dat de ranken recht waren, en γ tijdens de epinastische oprolling aan het einde der groeiperiode.

Onder de prikkelbewegingen heb ik als afzonderlijke groepen beschouwd: α de bewegingen na stooten, wrijven, drukken enz.; β de bewegingen tengevolge der blijvende aanraking met steunsels, en eindelijk γ: de teruggaande bewegingen van ranken, wier steunsel men heeft weggenomen. Aan het einde van iedere groep zal een kort overzicht der resultaten gegeven worden.

A. EPINASTISCHE BEWEGINGEN.

α. Periode der strekking.

I. Een zeer jonge in een vlakke spiraal opgerolde rank werd den 4den Augustus in het zout gebracht; behalve de hoofdrank werd er één zijrank aangelaten.

Het aantal windingen bedroeg:

	Hoofdrank.	Zijrank.
Vóór	3	3
Na 2 uur	$3^1/_4$	$3^1/_4$
〃 20 〃	$3^1/_4$	—

Dus nam in beiden het aantal windingen door plasmolyse om $^1/_4$ toe.

II. Van een iets oudere, eveneens opgerolde, rank werden denzelfden dag een hoofdrank en een zijrank geplasmolyseerd: Aantal windingen:

	Hoofdrank.	Zijrank.
Vóór	$2^3/_4$	3
Na 10 minuten	3	$3^1/_4$
〃 40 〃	$3^1/_4$	$3^1/_2$
〃 $3^1/_2$ uur	$3^1/_2$	$3^3/_4$

Toeneming in beide gevallen $^3/_4$ winding.

III. Een rank, wier hoofdrank zich reeds tot ruim ééne winding had ontrold, werd eveneens denzelfden dag plasmolytisch gemaakt. Een zeer jonge zijrank werd daarbij aan de rank gelaten. Aantal windingen:

	Hoofdrank.	Zijrank.
Vóór	$1^1/_2$	$3^1/_4$
Na $^1/_2$ uur	$1^3/_4$	$3^1/_4$
Na 2 uur	$1^3/_4$	$3^3/_8$
Na 20 uur	2	$3^1/_2$

Dus een toeneming van $^3/_4$, resp. $^1/_4$ winding.

Conclusie.

Het aantal windingen van jonge ranken in de periode der epinastische strekking neemt door plasmolyse toe. De turgoruitrekking is dus aan de bovenzijde steeds grooter dan aan de onderzijde; het verschil is in oudere ranken grooter dan in jongere.

β. Tweede periode; rechte ranken.

IV. Naast een krachtige en rijk vertakte plant van Sicyos werd in den tuin een schaal met zoutoplossing gesteld. Een aantal jonge, rechte zijranken werd voorzichtig afgeknipt en terstond in het zout gebracht. Hier kromden zich N⁰. 1—4 in hun geheel met de bovenzijde concaaf; N⁰. 5, die iets ouder was, bleef in de onderheft recht en alleen de bovenhelft kromde zich met de bovenzijde concaaf; N⁰. 6, nog ouder, bleef bijna geheel recht, de bovenkant werd slechts zwak concaaf. De krommingen waren zeer wijd en bedroegen in deelen van den cirkelomtrek na ruim $1^1/_2$ uur:

N⁰. 1		$^1/_2$ w.
〃 2		$^1/_2$ 〃
〃 3		$^3/_8$ 〃
〃 4		$^3/_8$ 〃
〃 5	(top)	$^1/_2$ 〃
〃 6		bijna recht.

V. Twee rechte ranken van potplanten, die voor dit doel in het laboratorium gebracht waren, bleven bij plasmolyse in de onderhelft geheel recht; de bovenhelft kromde zich met de bovenzijde concaaf in $^1/_2$ uur tot $^1/_4$, resp. $^3/_8$ w. Na 20 uur was deze kromming onveranderd (14 Augustus).

VI. Hoofdranken van een plant in den tuin werden in een schaal met zoutoplossing, die er naast gezet was, gebracht. Ze waren allen recht en kromden zich in het zout met de bovenzijde concaaf; deze kromming strekte zich echter steeds slechts tot de bovenste helft, soms slechts tot een klein gedeelte van den top uit. De krommingen vormden steeds een wijden boog, en bedroegen bij

N^0. 1.	$^1/_2$ w.	over de helft der rank.
〃 2.	$^1/_2$ 〃	〃 〃 〃 〃 〃
〃 3.	$^3/_4$ 〃	〃 〃 〃 〃 〃
〃 4.	$^1/_2$ 〃	〃 een derde der rank.

Conclusie.

Rechte ranken krommen zich bij plasmolyse in den aanvang geheel, later slechts in de apicale helft, met de bovenzijde concaaf. De turgoruitrekking is dus aanvankelijk overal, later slechts aan den top, aan de bovenzijde grooter dan aan de onderzijde.

γ. *Periode der epinastische oprolling.*

VII. Rechte ranken werden uit den tuin genomen en elk afzonderlijk in een klein cylinderglaasje met water geplaatst. In omstreeks 24 uur maakten de hoofdranken epinastische krommingen, waarbij de toppen over een lengte van enkele c.M. recht bleven. Toen werden ze in de zoutoplossing gebracht. Hier nam het aantal der windingen, als volgt, af.

	N°. 1.	N°. 2.	N°. 3.
Vóór	$^1/_2$	$2^1/_8$	$4^1/_4$
Na 15 minuten	0	$^1/_4$	$2^1/_2$
〃 35 〃	0	$^1/_4$	2
〃 $2^1/_2$ uur		0	2

De oorspronkelijk rechte toppen hadden zich met de bovenzijde in omstreeks $^1/_8$—$^3/_4$ winding concaaf gebogen.

De epinastische windingen waren dus door plasmolyse bij N⁰. 1 en 2 volkomen, bij N⁰. 3 voor iets meer dan de helft verdwenen. De in N⁰. 3 overgebleven windingen hadden natuurlijk veel grooter diameter dan vóór 't begin der proef; ze strekken zich over ongeveer hetzelfde deel der rank uit.

VIII. Ranken, die zich aan potplanten in de kamer hadden ontwikkeld en geen steunsel hadden gevonden, begonnen zich eindelijk epinastisch op te winden. Zij werden in verschillende stadiën geplasmolyseerd; bij N⁰. 1 en 2 was de top nog recht, bij N⁰. 3 en 4 reeds zwak gebogen. Het aantal windingen bedroeg:

	N⁰. 1.	N⁰. 2.	N⁰. 3.	N⁰. 4.
Vóór	1	$1^1/_2$	$2^1/_4$	$3^1/_4$
Na $^1/_4$ uur	$^1/_2$	1	2	2
〃 $2^1/_4$ 〃	0	$^3/_4$	$^3/_4$	1.

Het aantal windingen nam dus steeds duidelijk af; daarbij werden de windingen zelven natuurlijk wijder.

IX. Rechte ranken werden kort vóór den aanvang der epinastische kromming uit den tuin gehaald en in kleine cylinderglaasjes met water geplaatst, waar ze, begunstigd door de warmte van het laboratorium, in omstreeks 24 uur zich vrij sterk epinastisch oprolden. Toen werden ze in zout gebracht en verloren hier, in 24 uur, een klein gedeelte hunner windingen.

Het aantal bedroeg:

	Vóór de plasmolyse.	Daarna.
N⁰. 1.	$13^1/_2$	11
〃 2.	13	11
〃 3.	12	8
〃 4.	7	$6^1/_2$

X. Den 3den September zocht ik aan eenige potplanten, die gedurende omstreeks 14 dagen in de kamer achter de zuidelijke vensters stonden, de oudste ranken van welke ik blijkens gemaakte merken wist, dat ze zich in de kamer uit den knoptoestand ontrold hadden, en sedert met geen steunsel zoo-

danig in aanraking waren gekomen, dat ze het hadden kunnen omvatten. Eenige malen had ik zulke ranken tijdens de epinastische beweging den top tegen den stengel of een blad zien drukken; dit had geen omslingering van het aangeraakte voorwerp, maar wel een omkeering in de richting der epinastische schroefwindingen tengevolge gehad. Deze ranken werden afgeknipt, haar windingen geteld, en als ze een keerpunt hadden, werden de windingen onder en boven afzonderlijk geteld. Onvolledige windingen aan den top werden bij N^0. 5 afzonderlijk geteld. Bij de plasmolyse veranderde het aantal der windingen als volgt:

	Vóór de plasmolyse.	Na 1 uur.	Na 5 uur.
N^0. 1.	$4^1/_2$	$4^1/_4$	$4^1/_4$
" 2.	$3^1/_4$	3	3
" 3.	$1^1/_4 + 12^1/_2$	$1^1/_4 + 11^3/_4$	$1^1/_4 + 11^1/_2$
" 4.	$3^1/_2 + 7^1/_4$	$3^1/_2 + 6^3/_4$	$3^1/_2 + 6^1/_2$
" 5.	$5 + 6$	$5 + 6$	$5 + 6$
" 6.	$8^1/_2$	$8^1/_2$	$8^1/_2$
" 7.	$8^1/_2$	$8^1/_2$	$8^1/_2$

De beide eerste ranken zijn zijranken, vandaar het geringe aantal windingen; de drie volgende hadden een keerpunt, door het teeken + aangegeven; van N^0. 5 zijn de losse windingen aan den top niet medegerekend; deze bedroegen $2^1/_4$ en verminderden zich tot op $^3/_4$.

Deze proef leert ons, dat oude ranken door plasmolyse haar windingen slechts weinig, zeer oude in 't geheel niet verliezen. Daartusschen komen toestanden voor, waarin de windingen aan de basis niet, die aan den top nog wel verminderen.

Conclusiën.

1^0. Tijdens den aanvang der epinastische windingen wordt de rechte top door plasmolyse gebogen, met de bovenzijde concaaf; de turgoruitrekking is dus aan de bovenzijde grooter dan aan de onderzijde.

2^0. De epinastische windingen gaan in den beginne geheel, later ten deele, eindelijk in het geheel niet meer, door plasmolyse verloren.

Deze buigingen berusten dus aanvankelijk geheel op een toeneming der turgoruitrekking, later ten deele hierop en ten deele op een blijvende verlenging (groei), eindelijk geheel op blijvende verlenging (groei).

B. PRIKKELBEWEGINGEN.

δ. Bewegingen ten gevolge van wrijven, stooten, enz.

XI. Rechte ranken van potplanten werden tienmaal met een metalen staaf voorzichtig langs de onderzijde gewreven, telkens van de basis naar den top gaande. Terstond daarna begonnen zij een zichtbare beweging en krulden zich in ruim één minuut duidelijk op. Toen even daarna de beweging ophield voor het oog zichtbaar te zijn, werden ze in de zoutoplossing gebracht. Het resultaat was als volgt:

	N°. 1.	N°. 2.	N°. 3.
Vóór	1	$1^1/_4$	$^1/_4$
Na 1 uur	$^1/_4$	$—^1/_8$	$—^1/_2$
Na 5 uur	$^1/_4$	—	—
Na 24 uur	$^1/_4$	$—^5/_8$	$—^1/_2$

In deze tabel geeft het teeken — vóór een breuk aan, dat bij de kromming de bovenzijde concaaf was; krommingen allen in de apicale helften der ranken.

Men ziet dat in twee gevallen de prikkeling geen blijvende verandering tengevolge had, want de ranken kromden zich even sterk met de bovenzijde concaaf als niet geprikkelde ranken dit plegen te doen (zie IV, V, VI); bij N°. 1 had de prikkeling echter reeds een bij plasmolyse blijvende verandering tengevolge gehad.

XII. Ranken van in het laboratorium gehouden potplanten, geheel recht, werden voorzichtig met een metalen staaf eenige malen tegen de onderzijde gestooten. Terstond daarna begon zich haar top te krommen; toen werden zij in het zout gebracht, waar de beweging nog een oogenblik voortging; zoodra echter het zout indrong, keerde de beweging om. Zoo bereikte N°. 1 twee windingen, en verloor deze door plasmolyse weer tot op $^1/_8$ w. N°. 2 bereikte $^3/_4$ winding. Nadat het zout ruim $^1/_2$

uur had ingewerkt, verdwenen deze geheel en boog zich de top met de bovenzijde concaaf; na ruim 3 uur was de top tot $^1/_2$ zeer wijde winding met de bovenzijde concaaf gekromd.

Dus was in het tweede geval geen blijvende werking van den prikkel na plasmolyse zichtbaar, in het eerste slechts een geringe.

XIII. Twee ranken der kamerplanten hadden zich, ten gevolge van toevallige prikkeling, aan hun top tot enge windingen opgerold. Ze werden toen geplasmolyseerd, en verloren deze windingen in den loop van eenige uren ten deele. Het aantal windingen bedroeg:

	N°. 1.	N°. 2.
Vóór de plasmolyse	$4^1/_2$	$3^1/_2$
Daarna	$3^1/_2$	2

XIV. Talrijke ranken hadden den 26en Augustus in den tuin, zonder een steunsel gevat te hebben, tengevolge van toevallige prikkeling, zich aan haar top gebogen of tot eenige enge windigen opgerold. Deze ranken werden afgeknipt en in een schaaltje met zoutoplossing gebracht, dat ik naast de plant gezet had. Het aantal windingen bedroeg:

	Vóór de plasmolyse.	Na $^1/_4$ uur.	Na 2 uur.	Na 4 uur.
N°. 1.	$^1/_4$	0	$-^1/_2$	$-^1/_2$
„ 2.	1	$^3/_8$	$^1/_8$	$^1/_8$
„ 3.	1	$^1/_4$	$^1/_4$	$^1/_4$
„ 4.	2	$^1/_2$	$^1/_2$	$^1/_2$
„ 5.	2	1	1	1
„ 6.	$3^3/_4$	1	1	$^1/_2$

Bij N°. 1 had de topkrulling dus geen bij plasmolyse blijvende verandering teweeggebracht; zij kromde zich even sterk met de bovenzijde concaaf als niet geprikkelde ranken. Bij de overigen was de bij plasmolyse blijvende verandering in het algemeen (ofschoon niet in bijzonderheden) des te grooter, naarmate de topkrulling zelve sterker was.

XV. Den 27en Aug. werd een rank op eenige c.M. afstand van den top zacht tusschen twee vingers een oogenblik gedrukt, en daarna aan haar lot overgelaten. Op de aangeraakte plaats kromde zij zich in ongeveer een half uur tot $1^1/_8$ vrij enge winding

op. Toen geplasmolyseerd, verloor zij de kromming in 4 uur tot op $^{1}/_{4}$ w. en bleef zoo gedurende 24 uur. De top dezer rank, tijdens de prikkeling recht, bleef vóór en na de plasmolyse recht.

Conclusie.

De bewegingen, die ranken tengevolge van zwakke voorbijgaande prikkels (wrijven, stooten, drukken) maken, gaan, als zij gering zijn, door plasmolyse geheel verloren; de rank kromt zich met de bovenzijde concaaf even goed als of zij niet geprikkeld ware. Is de beweging aanzienlijker, of heeft zij langer geduurd, dan blijft een gedeelte der kromming bij de plasmolyse over.

Deze bewegingen berusten dus in het eerste geval uitsluitend op turgoruitrekking, in het tweede ten deele op turgoruitrekking en ten deele op blijvende verlenging (groei).

ε. Omwinding van steunsels.

XVI. Den 4en Augustus hadden een twaalftal potplanten, die vóór een paar dagen in het laboratorium genomen waren, een aantal rechte ranken ontwikkeld. Ik plaatste tegen sommige dezer ranken, op eenigen afstand van den top, een ijzerdraad (van 2 m M. dikte), tegen één (N^{0}. 4) een glazen buis van 5 m.M. dikte, en drukte deze steunsels zacht tegen den onderkant der ranken aan. In even korten tijd maakten de ranken tengevolge hiervan een beweging; zij bogen zich in een scherpen hoek of kromden zich geheel om het steunsel. Na eenigen tijd werden ze van de plant afgeknipt en hetzij met, hetzij zonder haar steunsel in de zoutoplossing gebracht. De duur van de aanraking met het steunsel bedroeg bij N^{0}. 1 $^{1}/_{4}$ uur, bij N^{0}. 2—4 $^{1}/_{2}$ uur, bij N^{0}. 5 drie uur. Het aantal windingen bedroeg:

	Vóór de plasmolyse.	Daarna.
N^{0}. 1.	$^{1}/_{4}$	0
„ 2.	$^{1}/_{4}$	0
„ 3.	$^{3}/_{4}$	$^{1}/_{8}$
„ 4.	$1^{1}/_{8}$	$^{1}/_{4}$
„ 5.	$2^{1}/_{2}$	1

De toppen kromden zich bij de plasmolyse met den bovenkant concaaf, het zóó gekromde gedeelte bereikte bij N⁰. 1 en 2 het punt van aanraking met het steunsel, bij de overigen niet. Deze kromming van den top bedroeg bij N⁰. 1 : $^3/_4$ w., bij N⁰. 2 : $^1/_2$w. ; zij was dus even sterk als zij in niet geprikkelde ranken pleegt te zijn (IV, V, VI).

Men ziet dus dat bij zwakke prikkeling de kromming uitsluitend op turgoruitrekking, bij sterkere ten deele ook op blijvende verlenging (groei) berust.

XVII. Den 5den Augustus werd de vorige proef met twee rechte ranken herhaald. N⁰. 1 wond zich in ruim $^1/_2$ uur tot $^3/_4$ winding, N⁰. 2 in 4 uur tot 3 windingen, beide om ijzerdraden van 2 m.M. dikte. Het resultaat der plasmolyse was de volgende afneming van het aantal windingen :

	Vóór de plasmolyse.	Na $^1/_2$ uur.	Na $1^1/_2$ uur.	Na 24 uur.
N⁰. 1.	$^3/_4$	$^1/_4$	$^1/_8$	0
„ 2.	3	$2^1/_4$	$1^3/_4$	$1^3/_4$

De top van N⁰. 1 krulde zich met de bovenzijde concaaf tot omstreeks $^3/_8$ winding, doch slechts over een paar c.M. lengte. De windingen van N⁰. 1 lagen zoo vast aan den ijzerdraad aan, dat het niet mogelijk was ze er af te schuiven; na een verblijf van $^1/_2$ uur in het zout waren ze zooveel wijder geworden, dat dit gemakkelijk geschieden kon.

Deze proef bevestigt het resultaat der voorgaande.

XVIII. Rechte ranken van kamerplanten werden den 26sten Augustus gedurende korten tijd, meestal slechts eenige minuten, met een ijzerdraad van 12 m.M. dikte zóó in aanraking gebracht, dat ze zich daarom begonnen te krommen. Daarna werden ze afgeknipt en in de zoutoplossing gebracht. Het aantal windingen bedroeg :

	Vóór de plasmolyse.	Daarna.
N⁰. 1.	$^1/_2$	$-^3/_4$
„ 2.	$^5/_8$	0
„ 3.	$^3/_4$	$^1/_4$
„ 4.	$1^1/_4$	$^1/_8$
„ 5.	$1^1/_4$	$^3/_8$

In N^0. 1 en 2 verdween de bocht geheel, N^0. 1 kromde zich in haar geheele lengte met de bovenzijde concaaf, alsof zij niet geprikkeld geweest was; in N^0. 2 krulde zich een klein deel aan den top in $^3/_4$ winding met de bovenzijde concaaf; tusschen dit deel en het punt van aanraking met het steunsel bleven eenige c.M. recht.

Evenals in de voorgaande proeven, zien wij ook hier, dat de prikkelbeweging aanvankelijk alleen op turgoruitrekking, later ook op blijvende verlenging (groei) berust.

XIX. Een rank had in den tuin drie windingen om een steunsel gemaakt; toen werd zij afgeknipt en in de zoutoplossing gebracht; hier ontwond zij zich in bijna twee uur tot $1^1/_4$ winding, die zij verder behield.

XX. Den 3^{den} September werden een aantal rechte ranken uit den tuin gehaald, in cylinderglaasjes gezet, en toen ze na vier uren nog recht waren, met ijzerdraden op de gebruikelijke wijze in aanraking gebracht. Ze kromden zich in 5—15 minuten en werden toen in het zout gebracht. Hier veranderde het aantal windingen, als volgt:

	Vóór de plasmolyse.	Daarna.
N^0. 1.	$^3/_8$	$^1/_8$
〃 2.	$^5/_8$	$^1/_8$
〃 3.	1	$^1/_8$

Het punt van aanraking lag op 1—2 c.M. afstand van den top; dit gedeelte bleef bij de plasmolyse recht. Daarentegen kromde zich het middengedeelte der rank daarbij met de bovenzijde zwak concaaf.

Een volledig verdwijnen der gemaakte krommingen door plasmolyse vond hier niet plaats.

XXI. Voor deze proef werden twee ranken uitgekozen, wier basis reeds begonnen had zich in wijde windingen epinastisch op te rollen, doch wier toppen nog recht waren Ze werden in den tuin afgesneden, en in cylinderglaasjes met water staande, met ijzerdraden van de gewone dikte in aanraking gebracht. N^0. 1 bleef daarmede 5, N^0. 2 15 minuten in aanraking. De verandering van het aantal windingen was de volgende:

		Vóór de plasmolyse.	Daarna.
N⁰. 1.	Epin. kromming	$^3/_4$	$^1/_2$
	Prikkelbeweging	$^5/_8$	$—^1/_4$
" 2.	Epin. kromming	$2^1/_2$	1
	Prikkelbeweging	$1^1/_4$	$^1/_8$

De epinastische beweging werd dus ten deele, de prikkelbeweging in N⁰. 1 zoo goed als geheel, in N⁰. 2 ten deele, door de plasmolyse opgeheven.

XXII. Ranken zijn in de onderste, basale helft minder prikkelbaar dan in de bovenste; de bewegingen geschieden daar langzamer. Om ook deze bewegingen volgens mijne methode te onderzoeken, heb ik den 3den September talrijke rechte ranken uit den tuin genomen en in cylinderglaasjes met een weinig water geplaatst. Zij rustten hierbij telkens op twee zijranken, die schuins tegen den rand van het glas steunden. Deze maakten om den rand van 't glas in $4^1/_2$ uur zeer schoone krommingen, meest op 1—2 c.M. afstand van de basis. Toen werden zij in de zoutoplossing gebracht, en verloren daar hare kromming ten deele, gelijk uit de volgende cijfers te zien is. De grootte de kromming bedroeg:

	Vóór de plasmolyse.	Daarna.
N⁰. 1 en 2	$^1/_2$	$^1/_4$
" 3.	$^1/_4$	$^1/_8$
" 4 " 5.	$^3/_8$	$^1/_4$

In allen kromde zich de apicale helft met de bovenzijde concaaf.

Men ziet dat de krommingen, in zoo langen tijd ontstaan, ofschoon zwak, toch slechts voor een klein deel door plasmolyse verloren gingen.

XXIII. Tot nu toe heb ik uitsluitend krommingen beschreven, die om het steunsel gemaakt waren; thans wensch ik ook diegene te onderzoeken, die de rank, na een steunsel te hebben omwonden, tusschen dit en haar basis maakt, en waardoor zij, gelijk bekend is, met groote kracht den tak naar het steunsel toe beweegt. Deze windingen zijn in zooverre gevolgen van den prikkel, als zij vroeger en op andere wijze intreden dan de

epinastische krommingen bij afwezigheid van prikkels zouden doen.

Talrijke ranken, die vóór korteren of langeren tijd een steunsel omwonden hadden, werden met dit steunsel afgesneden en uit den tuin in het laboratorium gebracht, waar ze terstond in de zoutoplossing kwamen. Hier werden ze eerst na 20 uur weer onderzocht. Alleen de windingen tusschen basis en steunsel, niet de om het steunsel gemaakten, werden geteld; de ligging van keerpunten is door het teeken + aangegeven; het eerste cijfer is het aantal windingen tusschen de basis en het eerste keerpunt. Het aantal windingen bedroeg:

	Vóór de plasmolyse.	Daarna.
N⁰. 1.	2	1½
〃 2.	2½	½ + 1
〃 3.	2 + 2	½ + 1
〃 4.	5 + 11	4 + 8½
〃 5.	10 + 9	7 + 6
〃 6.	11 + 12	10½ + 11
〃 7.	6½ + 6 + 2 + 2	6½ + 6 + 1½ + 2
〃 8.	3 + 3	2½ + 2½
〃 9.	1 + 5 + 4	½ + 4 + 3
〃 10.	6½ + 7½ + 1	6½ + 7½ + 1
〃 11.	7 + 9 + 1½ + 8 + 8	7 + 9 + 1½ + 8 + 8
〃 12.	14½ + 17	14½ + 17
〃 13.	8½ + 8½	8½ + 8½

N⁰. 1—4 waren jonge, N⁰, 5—9 oudere, N⁰. 10—13 zeer oude ranken. Men ziet dat in N⁰. 1—4 het aantal windingen door plasmolyse geringer geworden is; de windingen zelven waren daarmede overeenkomstig wijder geworden. In de oudere ranken N⁰. 10—13 is het aantal windingen door de plasmolyse niet veranderd.

Conclusiën.

1⁰. Geringe krommingen om steunsels gaan door plasmolyse geheel verloren; de rank kromt zich met de bovenzijde concaaf als of zij niet geprikkeld ware. Zulke krommingen berusten dus geheel op turgoruitrekking.

2⁰. Sterkere krommingen om het steunsel, en de eerste krommingen tusschen het steunsel en de basis der rank verdwijnen bij de plasmolyse ten deele; zij berusten dus ten deele op turgoruitrekking, ten deele op blijvende verlenging (groei).

3⁰. Oudere krommingen tusschen het steunsel en de basis der rank blijven bij plasmolyse geheel onveranderd, zij berusten dus geheel op blijvende verlenging (groei).

ζ. Teruggaande beweging na wegnemen van het steunsel.

XXIV. ASA GRAY heeft opgemerkt, dat de ranken van Sicyos, na een korte prikkeling aan zich zelven overgelaten, eerst zich krommen, doch daarna zich allengs weer strekken. Deze proef, die gemakkelijk te herhalen is, gaf mij aanleiding om te onderzoeken, welk aandeel de turgoruitrekking aan de teruggaande beweging mocht hebben. Deze en de beide volgende proeven hebben de beantwoording van deze vraag ten doel.

In de eerste plaats heb ik twee rechte ranken van planten die in de kamer stonden, voorzichtig tienmaal met een metalen staaf langs de onderzijde gewreven, telkens van de basis naar den top gaande. Terstond daarna begonnen de ranken zich te krommen en bereikten in ruim eene minuut $1^1/_4$, resp. $^7/_8$ winding. Daarna gingen ze langzaam terug en hadden na een kwartier nog slechts $^1/_2$ en $^5/_8$ winding. Toen werden ze in de zoutoplossing gebracht; hierin veranderden zij hare kromming in 't geheel niet, ook niet in den loop van 20 uur. Even oude, niet geprikkelde ranken zouden zich met de bovenzijde concaaf gekromd hebben.

Tijdens de teruggaande beweging is dus de turgoruitrekking aan de bovenzijde even groot als aan de onderzijde.

XXV. Den 14en Augustus bracht ik twee rechte ranken van potplanten in de kamer aan haar onderzijde met een ijzerdraad in aanraking. Na een kwartier hadden ze $^1/_2$, resp. $^1/_4$ winding gemaakt; toen nam ik de steunsels weg. De nawerking duurde omstreeks 10 minuten; de ranken bereikten daardoor 2, resp. $1^1/_2$ winding; toen begon de teruggaande beweging. Na ruim $^1/_2$ uur was er nog slechts $^1/_2$, resp. $^1/_4$ winding over; toen werden beide ranken in de zoutoplossing gebracht. Hier ging

nog een verder gedeelte dezer kromming verloren; na $^1/_2$ uur hadden beiden nog slechts $^1/_8$ winding. Bij N^0. 1 ging ook deze verloren en kromde de rank zich met de bovenzijde concaaf; bij N^0. 2 bleef ook na 24 uur deze $^1/_8$ winding (met de bovenzijde convex) over.

In beide gevallen was dus de turgoruitrekking aan de bovenzijde grooter dan aan de onderzijde, bij N^0. 2 slechts weinig, bij N^0. 1 was het verschil zeer belangrijk.

XXVI. Den 27^{en} Augustus liet ik twee rechte ranken van kamerplanten zich om een steunsel krommen, nam dit na korten tijd weg en liet de ranken weer geheel recht worden. Ze hadden $^1/_8$, resp. 1 winding gemaakt en verloren. Zoodra ze recht waren (na $1^1/_2$, resp. 2 uur), werden ze in de zoutoplossing gebracht. Hierin kromden zij zich met de bovenzijde concaaf tot omstreeks $^1/_2$ w., dus even sterk als of ze nooit geprikkeld geweest waren.

Conclusie.

Wanneer ranken, na wegneming van een steunsel, teruggaan, is na eenigen tijd de turgoruitrekking aan de bovenzijde even groot als aan de onderzijde. Nog vóórdat de rank recht wordt, is de turgoruitrekking aan de bovenzijde weêr grooter dan aan de onderzijde; is zij recht, dan is ook het oorspronkelijke verschil in turgoruitrekking weer aanwezig.

Algemeene conclusie.

Trachten wij thans alle verschillende resultaten, waartoe de in dit hoofdstuk beschreven proeven geleid hebben, zoo overzichtelijk mogelijk samen te vatten, zoo hebben wij de beide volgende empirische regels.

1^0. *Gedurende het geheele leven der rank is de turgoruitrekking aan de bovenzijde grooter dan aan de onderzijde.*

Uitzondering hierop maken de basale helften van rechte ranken tijdens het laatste gedeelte der gestrekte periode: de ranken die na wegneming van een steunsel de teruggaande beweging maken, op zekere hoogte van deze beweging, en eindelijk oude geheel opgerolde ranken. In deze gevallen is de turgoruitrek-

king aan beide zijden even groot. De allerjongste toestanden der ranken werden niet onderzocht.

2°. *Zoowel de prikkelbeweging als de epinastische kromming berusten:*

a. *in den aanvang alleen op turgoruitrekking;*

b. *gedurende het grootste gedeelte der beweging zoowel op turgoruitrekking als op blijvende verlenging (groei);*

c. *in den volwassen toestand alleen op blijvende verlenging (groei).*

Het kan, met het oog op deze feiten, aan geen twijfel meer onderhevig zijn, hoe het antwoord op de in den aanvang gestelde vraag moet luiden. Dit antwoord is:

De bewegingen der ranken, zoowel de epinastische als de prikkelbewegingen, worden door een toeneming der turgoruitrekking aan die zijde, die zich het sterkst gaat verlengen, veroorzaakt. De verlenging door turgoruitrekking heeft eerst bij overschrijding van een zekere grens een blijvende verlenging (groei) ten gevolge. Aan het einde der beweging gaat eindelijk de geheele turgoruitrekking in blijvende verlenging (groei) over.

Hieruit ontstaat nu als van zelve de vraag, aan welke nadere oorzaken de toeneming der turgoruitrekking toe te schrijven is. Aan de beantwoording dezer vraag zullen de beide volgende hoofdstukken gewijd worden.

Vóór wij daartoe overgaan, zij het mij vergund, de groeikrommingen der ranken, volgens het zooeven gewonnen standpunt, kort te schetsen.

Zoolang de jonge rank in den knop zich hyponastisch oprolt, is de turgoruitrekking aan de onderzijde waarschijnlijk grooter dan aan de bovenzijde, en veroorzaakt dit verschil den snelleren groei der onderzijde en dus de hyponastische kromming. Doch deze periode heb ik niet onderzocht. Aan het einde der periode komt dan waarschijnlijk een oogenblik, waarop de turgoruitrekking aan beide zijden gelijk is; dan wordt zij aan de bovenzijde grooter en veroorzaakt een snelleren groei dezer zijde en daarmede de langzame strekking der rank. Wordt nu de rank recht, dan is de turgoruitrekking den groei aan de bovenzijde nog altijd meer vooruit dan aan de onderzijde, maar dit verschil

wordt, van de basis af, allengs minder en minder. Gedurende dezen tijd houden de uitrekkende krachten van boven- en onderzijde evenwicht; in dezen toestand is de rank prikkelbaar. De werking van den prikkel bestaat daarin, dat zij plotseling den turgor aan de bovenzijde verhoogt; daardoor wordt het weefsel hier uitgerekt en kromt zich de rank. Is de kromming gering, dan is de uitrekking elastisch; is zij grooter, dan is zij ten deele blijvend — zij wordt door groei gefixeerd. Duurt de prikkelbeweging lang voort, dan neemt steeds de turgoruitrekking der bovenzijde toe, de groei dezer zijde volgt langzaam; houdt eindelijk de vermeerdering der turgoruitrekking op, dan wordt de geheele kromming door den groei gefixeerd.

Duurt de werking van den prikkel slechts korten tijd, dan houdt de snelle toeneming van den turgor aan de bovenzijde weldra op. Daarop volgt een relatieve vermindering der turgoruitrekking aan de bovenzijde, waarschijnlijk door toeneming der turgoruitrekking aan de onderzijde veroorzaakt: na eenigen tijd is deze grootheid aan beide zijden even groot; dan neemt zij aan de bovenzijde weêr toe, en als de rank recht is, is het normale verschil weêr hersteld.

Omwindt de rank geen steunsel, dan begint na eenigen tijd in de basale helft de turgor der bovenzijde toe te nemen, en veroorzaakt daardoor een uitrekking dier zijde en het begin der epinastische kromming. Ook deze kromming wordt allengs door groei gefixeerd; de turgor gaat echter voort de rank verder op te rollen en de bestaande windingen te vervangen. Heeft hij eindelijk zijn werk voltooid, dan wordt alles door groei gefixeerd.

V. *Over het aandeel van de turgorkracht en de rekbaarheid aan de prikkelbewegingen der ranken.*

Het is HOFMEISTER's verdienste, aangetoond te hebben, dat in groeiende plantendeelen de weefsels zich differentieeren in zulke, die krachtig streven zich te verlengen, en in andere, die daardoor passief uitgerekt worden, en aan het streven naar uit-

zetting van gene een weerstand bieden *). Als uitzettend weefsel fungeert in het algemeen het parenchym, als weerstand biedende, passief gerekte, organen voornamelijk de opperhuid, het onderhuidsche weefsel en de vaatbundels. In den toestand van rust houden beide complexen van krachten elkander in evenwicht.

Wordt dit evenwicht in eenig orgaan aan ééne zijde gestoord, dan zal daarvan noodzakelijker wijze het gevolg zijn, dat het orgaan een kromming maakt. Op dit beginsel berusten volgens HOFMEISTER in het algemeen de krommingen van groeiende organen, van welke hij in 't bizonder de geotropische en heliotropische bestudeerde.

Het is duidelijk, dat, nu een ongelijke groeisnelheid der verschillende kanten, blijkens de resultaten van het vorige hoofdstuk, als primaire oorzaak der krommingen is uitgesloten, het bedoelde evenwicht op tweeërlei wijze kan worden verbroken, en wel ten eerste door een toeneming der uitzettende kracht van het parenchym en ten tweede door een vermindering van den weerstand der overige weefsels.

Welke van deze beide grootheden wordt bij groeikrommingen primair veranderd? Ziedaar de vraag, wier beantwoording thans voor ons noodzakelijk is.

De pogingen van HOFMEISTER, om het gewenschte antwoord te vinden, lijden aan vele gebreken †), en zijn ten deele verouderd; den belangstellenden lezer verwijs ik daarom naar zijne hierboven geciteerde verhandeling.

Het is duidelijk, dat de beantwoording der gestelde vraag in dit opstel in de eerste plaats voor de ranken van Sicyos moet worden geleverd; maar even duidelijk is het, dat het antwoord voor alle groeikrommingen, zoowel voor de geotropische, heliotropische en prikkelbewegingen, alsook voor de nutatiën en epinastische buigingen in hoofdzaak hetzelfde moet zijn. Wij hebben dus geenszins eenvoudig met een bizonder geval, maar met een voorbeeld voor een zeer algemeenen regel te doen.

Om deze reden zij het mij vergund, aan de beschrijving mij-

---

*) HOFMEISTER, *Berichte der K. Sächs. Gesellsch. d. Wiss.* 1859 en 1860.

†) Zie hierover o. a. SACHS's *Handbuch d. Experimentalphysiologie*, p. 505.

ner proeven eenige meer algemeene beschouwingen te laten voorafgaan.

Onderzoeken wij in de eerste plaats den graad van waarschijnlijkheid van een vermindering van den weerstand der uitgerekte weefsels, dus van een vermindering der elasticiteit, gepaard met een toeneming der rekbaarheid.

Deze zijn in onze ranken de epidermis, het hypodermale collenchym en de vaatbundels der bovenzijde; in talrijke groeiende plantendeelen voegt zich daarbij nog, als een zeer belangrijke factor, de vaatbundelscheede. Om eenigszins snelle krommingen te kunnen verklaren, zou men in het aangenomen geval moeten veronderstellen, dat al deze organen gelijktijdig rekbaarder werden: een hypothese, die zonder twijfel zeer onwaarschijnlijk is. Wil men slechts in één der genoemde organen de rekbaarheid laten toenemen, dan zou dit orgaan in verschillende gevallen een ander moeten zijn. In de ranken van Sicyos ligt de hoofdweerstand klaarblijkelijk in het hypodermale collenchym; vele groeiende organen bezitten geen collenchym. Meestal biedt de vaatbundelscheede den meesten weerstand tegen de uitrekking; deze ontbreekt bij Sicyos. In de bladen van Allium Cepa is het volgens HOFMEISTER alleen de epidermis, die bij de geotropische krommingen een weerstand biedt. Men zou deze voorbeelden gemakkelijk kunnen vermeerderen, en aantoonen, dat voor elk der passief gerekte weefsels er gevallen te noemen zijn, waarin het, zoo niet alleen, dan toch bijna uitsluitend het weerstand biedende orgaan is. In elk dezer weefsels zou dus noodzakelijkerwijze de rekbaarheid door de inwerking van prikkels moeten kunnen toenemen.

Plaatsen wij hier tegenover het andere geval, en nemen wij aan, dat de uitrekkende kracht der actieve deelen toeneemt. Als zoodanig treedt in alle groeiende deelen alleen het parenchym op; alleen dit heeft, in vergelijking met de andere weefsels, een zeer krachtig uitzettingsvermogen. In de veronderstelling, dat de uitzettende kracht bij de groeikrommingen toeneemt, verkrijgen wij dus voor alle gevallen eenzelfde en zeer eenvoudige oorzaak.

De prikkelbewegingen der ranken van Sicyos vinden onder gunstige omstandigheden uiterst snel, soms plotseling plaats. Is

het denkbaar, dat de rekbaarheid der passief gerekte weefsels zoo plotseling toenemen kan? Deze rekbaarheid is een eigenschap der celwanden. Noch de gecuticulariseerde wanden der epidermiscellen, noch de dikke wanden van het collenchym, noch eindelijk de protoplasmalooze ring- en spiraalvaten der vaatbundels maken den indruk van voor plotselinge spontane veranderingen in hun rekbaarheid vatbaar te zijn.

Daarentegen weten wij door de beroemde onderzoekingen van BRÜCKE, dat in de gewrichten der bladstelen van Mimosa pudica het parenchym de zetel van de oorzaak der bewegingen is; de veranderingen van het watergehalte der parenchymcellen veroorzaken de bekende prikkelbewegingen van het kruidje-roer-mij-niet.

Evenzoo speelt bij de weefselspanning en bij den lengtegroei het parenchym een actieve rol, de overige weefsels gedragen zich daarbij tegenover het parenchym steeds passief.

Uit deze beschouwingen volgt, dat de veronderstelling, dat de rekbaarheid der passief gerekte weefsels bij groeikrommingen zou toenemen, tot zeer gecompliceerde en onwaarschijnlijke voorstellingen leidt, terwijl een toeneming van de uitrekkende kracht van het parenchym een uiterst eenvoudige verklaring der verschijnselen kan geven.

Oorzaak van zulk een toeneming der uitrekkende kracht van het parenchym kan klaarblijkelijk alleen een toeneming van de turgorkracht zijn, d. i. van de kracht, waarmede de inhoud water uit zijn omgeving aantrekt. Noch een verandering in de rekbaarheid van de celwanden van het parenchym, noch een verhooging van den weerstand van het protoplasma tegen den doorgang van het celvocht, zou zulk een toeneming kunnen verklaren. De celwanden van het parenchym zijn, gelijk uit de aanzienlijke verlenging van mergprismen uit groeiende plantendeelen in water blijkt, zoo uiterst rekbaar, dat een toeneming hunner rekbaarheid de uitzettende kracht van het parenchym niet merkbaar zou kunnen verhoogen; ook is zulk een verandering om meer dan één reden even onwaarschijnlijk als een toeneming van de rekbaarheid der celwanden van de passief gerekte weefsels.

Een verhooging van den weerstand van het protoplasma is op zich zelfs geenszins onwaarschijnlijk. Daar uit mijne

vroegere onderzoekingen bekend is *), dat deze weerstand een vereischte voor het tot stand komen van den turgor is, spreekt het van zelf, dat de grootte van dezen weerstand op de grootte van den turgor een bepaalden invloed zal uitoefenen. Bij een gegeven turgorkracht toch, zal het van den weerstand van het protoplasma afhangen, hoe groot de turgor zal kunnen worden, d. i. welke maximale hoogte hij zal kunnen bereiken. Een verhooging van den weerstand zou dus een vergrooting der cellen mogelijk maken.

Bij eenig nadenken ziet men echter allicht in, dat deze redeneëring slechts voor bepaalde gevallen juist is. Denken wij ons den weerstand van het protoplasma zóó groot, dat de elastische spanning der celwanden niet in staat is, vocht uit de cel naar buiten te persen. In dit geval zal een vergrooting van den weerstand van het protoplasma natuurlijk volstrekt zonder gevolg voor den turgor der cel zijn. Alle verschijnselen wijzen er op, dat in het parenchym van groeiende cellen deze toestand verwezenlijkt is.

Door de medegedeelde beschouwingen verkrijgt ons vraagstuk echter een hooger gewicht. Want het onderzoek naar het weefsel, waarin de gezochte kracht zetelt, beslist tegelijkertijd over de natuur dezer kracht. Wij kunnen onze vraag dus zoo formuleeren: *Is een toeneming van de turgorkracht van het parenchym, dan wel een vermindering van de elastische spankracht der passief uitgerekte weefsels, de oorzaak van de prikkelbewegingen der ranken?*

Wil men deze quaestie langs experimenteelen weg beslissen, zoo bestaat daartoe, zoover mij bekend, geen ander middel dan een mechanische isoleering der beide groepen van weefsels. Deze scheiding, in de meeste gevallen praktisch niet of bijna niet uitvoerbaar, kan bij de ranken van Sicyos bijna zonder moeite worden ten uitvoer gebracht.

Dit blijkt gemakkelijk uit hetgeen wij in ons III[de] hoofdstuk over den anatomischen bouw van het bovenste gedeelte der ranken hebben medegedeeld. Wij hebben toen gezien dat de epidermis, het collenchym en de vaatbundels der onderzijde, de neutrale as der krommingen in zich opnemen, en dus bij deze

*) *Archives Néerl.* VI, 1871, p. 117.

beweginge een ondergeschikte, waarschijnlijk geheel passieve, rol spelen. Daarop volgt, naar boven toe, overal het parenchym, en eerst aan den bovenkant vinden wij weer, onder de epidermis, twee dunne collenchymstrengen en twee zwakke vaatbundels. Deze zijn terweerszijden van de gleuf, die op den bovenkant in het midden loopt, zóó geplaatst, dat men gemakkelijk door een scherpe snede, evenwijdig aan de bovenzijde, de epidermis, de beide collenchymstrengen en vaatbundels kan afsnijden, zonder al te veel van het parenchym weg te nemen. Dat een klein gedeelte van het parenchym bij deze operatie verloren gaat, is natuurlijk onvermijdelijk, het hindert echter bij de mede te deelen proeven niet. Het is gemakkelijk, zich door mikroskopisch onderzoek van de afgesneden bovenlamelle, te overtuigen of werkelijk alle passief gerekte deelen op voldoende wijze verwijderd zijn.

Het is nu slechts de vraag, op welke wijze de zóó geopereerde ranken voor de te nemen proeven gebruikt kunnen worden. Want, laat men ze in de lucht liggen, dan verwelken ze zoo snel, dat ze weldra onbruikbaar zijn, en werpt men ze, om de verdamping te voorkomen, in water, dan neemt het parenchym dit op, en de rank rolt zich tot enge windingen op en wordt daardoor meestal ongeschikt voor ons doel.

Ook in deze moeilijkheid heb ik in het gebruik van zoutoplossingen een middel gevonden om mijn doel te bereiken.

In ons derde hoofdstuk hebben wij de inwerking van zwakke zoutoplossingen op ranken leeren kennen, en gezien dat een chloornatriumoplossing van 1 pCt. de ranken niet verkort, terwijl een oplossing van hetzelfde zout van 2 pCt. wel een verkorting teweeg brengt. In beiden echter staat het leven der ranken niet stil, integendeel, zij gaan daarin voort te groeien. Hierop steunende, heb ik getracht een zoutoplossing te vinden, die de weefselspanning van gespleten ranken niet verandert. Hiertoe werden ranken in kleine stukjes gesneden, deze volgens het mediaanvlak gespleten, zoodat beide helften aan het ondereinde nog aan elkander verbonden bleven, en hierop de stukjes in chloornatriumoplossingen van 1, $1^{1}/_{2}$, 2 en 3 pCt. gebracht. In de drie laatste zoutoplossingen verloren de stukjes terstond de krommingen, die zij bij het splijten hadden aangenomen, in

de sterkere kromden zij zich zelfs zwak in de tegenovergestelde richting, met het parenchym concaaf. In de 1 pCt. oplossing veranderde daarentegen de kromming niet, evenmin in de jongere als in de oudere deelen der rank. Hetzelfde resultaat vond ik met ranken, in welke door een axiel vlak loodrecht op het mediaanvlak, de bovenhelft van de onderhelft afgespleten was.

Een zoutoplossing van 1 pCt. verandert dus de weefselspanning niet; dit was trouwens te verwachten, daar wij wisten dat zij ook de totale lengte der gave rank niet verandert. Wij moeten dus de geopereerde ranken in 1 pCt. chloornatrium brengen, en kunnen ze dan daarin bestudeeren.

Gaan wij echter vooraf na, hoe zich niet geopereerde ranken in deze zoutoplossing gedragen.

In de eerste plaats is het noodig te weten, of het verblijf in de vloeistof soms zelf als prikkel werkt. Om deze vraag te beantwoorden, bracht ik rechte ranken uit den tuin in het laboratorium, liet ze daar gedurende vijf uur in een glaasje met water rustig staan, om alle werking van mogelijke vroegere prikkels te doen verdwijnen. Ze bleven geheel recht en nu werden sommige voorzichtig in een schaal met Na Cl 1 pCt., andere even voorzichtig in een schaal met water gebracht. Na ruim drie uur waren allen noch recht; na 27 uur hadden zij zich in talrijke windingen epinastisch gekromd, in eenige der grootere ranken in 't water was de top nog over een lengte van een paar Cm. recht, bij die welke in het zout waren gebracht was de top reeds gebogen, doch iets minder sterk dan de overige deelen der rank. Men ziet dus, dat het verblijf in water of in zwakke zoutoplossing niet als prikkel werkt; anders zou toch de op pag. 79 beschreven topkrulling onvermijdelijk zijn ingetreden.

In de tweede plaats heb ik onderzocht, of de ranken in 1 pCt. Na Cl haar prikkelbaarheid behouden. Ik heb daartoe de volgende proeven genomen.

I. Een rank van een potplant in het laboratorium werd zonder haar af te snijden of aan te raken in een bak met de zoutoplossing gedompeld en toen de tak met een klem zoo vastgehouden, dat de rank er in bleef, zonder de wanden van het vat aan te raken. De rank was geheel recht, en bleef zoo gedurende

20 minuten. Nu werd zij uit de oplossing genomen, en 20-maal voorzichtig met een metalen staaf langs de onderzijde gewreven; terstond daarna begon zij een zichtbare beweging te maken, en in ruim ééne minuut bereikte haar top $2^3/_4$ windingen, die na 5 minuten tot 3 windingen waren toegenomen. Toen ging zij allengs terug en had na twee uur nog slechts één winding.

II. Vier fraaie rechte ranken van potplanten werden geheel op dezelfde wijze behandeld, maar bleven gedurende $2^1/_2$ uur in de zoutoplossing. Toen ze er uitgenomen werden, waren ze nog recht. Nu werden ze door wrijven langs de onderzijde geprikkeld en kromden zich daarbij op de gewone wijze tot het volgende aantal windingen:

	Aantal malen dat de ranken gewreven werden.	Kromming in 2 min.	In 10 min.
I.	10	1 w.	1 w.
II.	20	1 "	$1^1/_4$ "
III.	20	$1^1/_4$ "	$1^1/_4$ "
IV.	20	$1^3/_4$ "	$1^3/_4$ "

De beweging was als zoodanig zichtbaar.

III. Een rechte rank, voorzichtig uit den tuin gebracht, werd 40 minuten in een schaal in de zoutoplossing gelaten. Ze vertoonde toen een geringe kromming van omstreeks $^1/_4$ w., en werd nu 20-maal langs de onderzijde gewreven, tengevolge waarvan haar top zich tot een volle winding oprolde.

IV. Een andere, eveneens uit den tuin gehaalde, rechte rank werd, met de bovenkant onder, in een schaaltje met zoutoplossing gelegd. Na een kwartier legde ik dwars op het jongste deel der rank een dunne glasbuis; de rank krulde zich in $^3/_4$ uur, in het vocht in omstreeks één winding om de buis.

Uit deze proeven volgt, dat ranken in 1 pCt. chloornatrium hunne gewone prikkelbaarheid behouden.

In het derde hoofdstuk heb ik, onder den naam van topkrulling het verschijnsel beschreven, dat ranken, tengevolge van zwakke prikkels, van aanraking bij bewerkingen enz., zich aan den top opkrullen. Dit verschijnsel vertoonen ranken in zwakke zoutoplossingen veel sterker dan in de lucht; de reden hiervan

kan eerst in het volgende hoofdstuk worden beschreven, thans wensch ik alleen het feit door eenige proeven te doen kennen. Wij zullen weldra zien van welk belang dit feit voor de oplossing der gestelde vraag is.

In de eerste plaats herinner ik aan de reeds vroeger, p. 86, beschreven proeven over den groei van ranken in 1 pCt. zoutoplossing, waarbij de toppen der ranken zich tengevolge der herhaalde metingen in talrijke enge windingen oprolden.

Verder heb ik een proef genomen op de wijze als op de beide vorige bladzijden voor I en II is beschreven, doch de rank niet zoo voorzichtig behandeld als in die proeven. Zij krulde zich dientengevolge in het zout in 20 minuten in $1^3/_4$ winding op. Eindelijk heb ik herhaaldelijk ranken volgens het mediaanvlak overlangs doorgesneden en in 1 pCt. zoutoplossing gebracht. Dit had steeds een oprolling der jongste deelen in zeer enge windingen tengevolge, waarbij telkens de bovenkant der halve rankstukken den convexen kant der windingen innam. Vóór het doorsnijden, moesten de ranken op de onderzijde plat gelegd worden; dit was de oorzaak van den prikkel.

Topkrulling van geheele ranken, die in 1 pCt. chloornatrium bewaard werden, en van tijd tot tijd werden aangeraakt of er uitgenomen om ze te onderzoeken, heb ik in tal van proeven als een uiterst gewoon verschijnsel leeren kennen.

Deze proeven leeren ons, dat alleen bij een zeer voorzichtige behandeling der ranken, en een algeheel vermijden van aanraking der onderzijde met andere voorwerpen, de ranken in de zwakke zoutoplossing recht blijven, in alle andere gevallen krult zich de top daarin min of meer op. Daar nu bij de operatie der ranken een aanraking natuurlijk onvermijdelijk is, zal men, ten minste in den regel, moeten verwachten, dat de topkrulling als gevolg der prikkeling bij de operatie zichtbaar wordt, zoo ten minste de ranken bij de operatie haar prikkelbaarheid behouden.

Uit het bovenstaande volgt dus, dat het onderzoek van geopereerde ranken in een 1 pCt. chloornatriumoplossing in staat is, ons het antwoord op de gestelde vraag te geven, en wel door de experimenteele beantwoording der beide volgende vragen:

1°. Krullen geopereerde ranken zich in de genoemde zoutoplossing tengevolge der operatie op.

2°. Kan men geopereerde ranken in die zoutoplossing door prikkeling een zichtbare of ten minste snelle beweging laten maken?

Bevestigen de proeven beide vragen, dan meen ik de hoofdvraag eveneens als beslist te mogen beschouwen.

Ik laat thans de proeven ter beantwoording dezer beide vragen volgen, en begin met de eerste vraag.

I. Krachtige, geheel rechte ranken van kamerplanten werden afgesneden en met de zijvlakte op een kurkplaat gelegd. Toen werd in deze positie, met een scherp mesje, van een 2—3 Cm. groot stuk een dunne bovenlamel van den top zóó afgenomen, dat de vaatbundels der bovenzijde mede verwijderd werden. De geopereerde ranken werden terstond in 1 pCt. zoutoplossing gebracht en bleven daarin 6 uren. Gedurende dezen tijd bleven contrôleranken geheel recht. Bij het brengen in de zoutoplossing behielden zij de kromming, die zij bij het opereeren hadden aangenomen, in den loop der 6 uren krulden ze zich langzaam op. De krommingen bedroegen:

	Lengte van het geopereerde deel.	Aantal windingen na: 2 uur.	3 uur.	6 uur.
I.	2 Cm.	—	$^3/_4$	$^3/_4$
II.	3 〃	$^3/_8$	$^3/_4$	$1^1/_4$
III.	3 〃	$2^1/_2$	$2^7/_8$	$3^1/_2$
IV.	2 〃	$1^1/_2$	$2^1/_4$	3
V.	3 〃	$1^1/_4$	$1^1/_4$	2

De windingen waren zeer eng. Aan eenige der ranken was een grooter of kleiner, niet geopereerd stuk gelaten; dit kromde zich dan in windingen van denzelfden diameter (meest 2—3 Mm.) als het geopereerde deel. Deze omstandigheid toont, bijna nog duideijker dan het hoofdresultaat, dat de operatie, afgezien van den prikkel, geen merkbaren invloed op de ontstane kromming uitoefende.

II. Krachtige jonge ranken werden uit den tuin gehaald en op de bovenbeschreven wijze geopereerd en in de zoutoplossing gebracht. Zij bleven hierin gedurende 5 uur. Eenige even oude

ranken, gelijktijdig uit den tuin gehaald, bleven in een cylinderglaasje met water staan. Zij bleven gedurende de proef en nog geruimen tijd daarna recht. De geopereerde ranken krulden zich in de zoutoplossing tot de volgende windingen op:

	Lengte van het geopereerde deel.	Aantal windingen na: ¼ uur.	1 uur.	2 uur.	5 uur.
I.	1.5 Cm.	1¼	2¼	2½	3¼
II.	2 "	½	1	1¼	2¼
III.	3 "	½	1⅞	3½	3½
IV.	2.5 "	1¼	2¼	3¼	5¼

Van N⁰. I, II en III wond zich het niet geopereerde deel in even enge windingen als het geopereerde.

Om het juiste aantal windingen te vinden, dat tengevolge der prikkeling bij de bewerking gemaakt werd, moet men van de opgegevene ¼—½ winding aftrekken, als vertegenwoordigende de kromming die zij bij het opereeren, reeds vóór ze in zout gebracht werden, aannamen. Op het oogenblik van het brengen in de oplossing veranderde de kromming niet.

III. Van jonge, rechte, uiterst prikkelbare ranken der kamerplanten werden de toppen op de sub. I beschreven wijze geopereerd en in de zoutoplossing gebracht. Duur der proef 1½ uur; in dezen korten tijd maakten de geopereerde deelen het volgende aantal windingen:

	Lengte van het geopereerde deel.	Aantal windingen: Na ¼ uur.	Na 1½ uur.
I.	2 Cm.	1	1¼
II.	3 "	2	3
III.	3 "	1¼	2

Windingen zeer eng. Contrôle-ranken bleven gedurende dezen tijd en langer recht.

IV. Van een rank werd over 3 Cm. van het jongste deel de bovenzijde voorzichtig afgesneden en dit stuk in 1 pCt. chloornatrium gelegd. Hier kromde het zich in drie uur tot ¾ winding; toen wreef ik het geopereerde deel herhaaldelijk langs de onderzijde, tengevolge waarvan het zich in eenige minuten tot 1¼ winding wond. De prikkeling had dus een vrij snelle beweging tengevolge.

V. Van een krachtige rank werden 1,5 Cm. van den top op de reeds meermalen beschreven wijze geopereerd; de afgenomen lamel toonde bij mikroskopisch onderzoek de beide vaatbundels der bovenzijde over hare geheele lengte. In 1 pCt zoutoplossing krulde het geopereerde deel zich in $^1/_4$ uur tot $1^1/_4$ winding op, toen werd het tienmaal voorzichtig langs de onderzijde gewreven, en maakte daarop in het vocht een zichtbare beweging, waardoor het in ongeveer één minuut zich tot $1^1/_2$ winding kromde.

VI. Ranken van kamerplanten, zeer voorzichtig van de bovenlamel over 2—3 Cm. lengte aan den top beroofd, werden in 1 pCt. zoutoplossing gebracht. Hier veranderden zij aanvankelijk de bij de operatie aangenomen kromming niet, en waren dus geschikt om door wrijven langs de onderzijde geprikkeld te worden. Ik wreef ze buiten het vocht (N^0. III in het vocht) en bracht ze er terstond weer in. Tengevolge der prikkeling maakten zij zichtbare bewegingen. Het volgende tabelletje geeft het aantal windingen vlak vóór en vlak na de prikkeling aan.

	Aantal malen dat het geopereerde deel gewreven werd.	Aantal windingen: Vóór.	Na.	Duur der beweging.
I.	30	0	$^1/_8$	5 min.
II.	30	0	$^1/_4$	± 2 "
III.	20	$^3/_4$	1	1 "
IV.	20	$^7/_8$	1	± 3 "

Vooral bij N^0. II was de beweging uiterst schoon met het oog te vervolgen. Na de opgegeven termijnen ging de beweging nog voort, doch langzamer.

Uit de medegedeelde feiten volgt:

1) Deelen van ranken, van welke men de opperhuid, het collenchym en de vaatbundels der bovenzijde voorzichtig heeft weggesneden, krommen zich in 1 pCt. zoutoplossingen, tengevolge der operatie in enge windingen op.

2) Dezelfde voorwerpen kunnen door wrijven der onderzijde er toe gebracht worden, snelle, voor het oog zichtbare, prikkelbewegingen te maken.

3) De passief uitgerekte weefsels der bovenzijde zijn dus voor

het tot stand komen der prikkelbewegingen onnoodig, de oorzaak van deze bewegingen zetelt dus in het parenchym

In verband met de beschouwingen, in het begin van dit hoofdstuk medegedeeld, geven deze feiten ons het recht, om de stelling uit te spreken:

Bij de bewegingen der ranken tengevolge van prikkeling, neemt de turgorkracht van het parenchym toe; deze toeneming is de mechanische oorzaak der bewegingen.

Of de turgorkracht in alle cellen van het parenchym even sterk toeneemt, of misschien in de cellen der bovenzijde sterker dan in die der onderzijde, is een vraag, die door latere onderzoekingen zal moeten opgelost worden.

Aan het slot van dit hoofdstuk wensch ik nog enkele feiten mede te deelen, die tot het behandelde in verband staan.

Ik heb getracht, de proeven met geopereerde ranken ook in water in plaats van in zwakke zoutoplossingen te doen. In dit geval rollen zich de geopereerde deelen natuurlijk terstond zeer snel op; na verloop van geruimen tijd, ziet men ze echter weer een deel hunner windingen verliezen; de snelle oprolling in het begin was dus ten deele het gevolg van toeneming der weefselspanning door het opnemen van water, ten deele van prikkeling, en bij langdurige rust ging deze laatste kromming weer verloren. Aan zwak gekromde deelen gelukte het mij in eenige proeven, door wrijven langs de onderzijde een snelle toeneming der kromming te veroorzaken. Ook dit bevestigt dus de reeds verkregen resultaten.

Snijdt men een rank voorzichtig in stukjes van 2 Cm. lengte, zoo treden er uit de wondvlakten druppels water. Verwijdert men deze en prikkelt men dan de stukjes door wrijven langs de onderzijde, zoo krommen zij zich. Hierbij kunnen zij van buiten geen water opnemen. Men mag aannemen, dat het parenchym, tengevolge der verhoogde turgorkracht, het water uit de omliggende weefsels opzuigt, en zoodoende in staat gesteld wordt de beweging tot stand te brengen.

Reeds DARWIN wees op het feit, dat ranken, die zich om te dikke steunsels gewonden hebben, aan haar bovenzijde talrijke dwarsplooien krijgen. Ook bij Sicyos heb ik deze, soms zeer diepe en op korte afstanden weêrkeerende, plooien herhaaldelijk

waargenomen. Zij pleiten m. i. voor de juistheid mijner conclusie, daar een toeneming der rekbaarheid der passieve weefsels, zonder toeneming der uitrekkende kracht, onder de gegeven omstandigheden deze plooien niet wel zou kunnen veroorzaken.

VI. *Versnelling van de bewegingen der ranken, door injectie met water.*

De in het vorige hoofdstuk medegedeelde proeven leerden ons, dat, bij de bewegingen der ranken tengevolge van prikkeling, de turgorkracht van het parenchym toeneemt. Met den naam van turgorkracht bestempel ik de kracht, waarmede de inhoud der levende cellen den celwand uitrekt (*Zellstreckung*, p. 2). Het is bekend, dat deze uitrekking daardoor plaats vindt, dat de celinhoud uit zijn omgeving water aantrekt, en daardoor het volumen der cellen vergroot.

Het vermogen van de in het celvocht opgeloste stoffen om water aan te trekken is dus de turgorkracht, en wij kunnen het in het vorige hoofdstuk verkregen resultaat dus ook zoo uitspreken, dat wij zeggen, dat, tengevolge der prikkeling, het wateraantrekkend vermogen van de bestanddeelen van het celvocht der parenchymcellen toeneemt.

Maar een toeneming van het wateraantrekkend vermogen heeft op zichzelf nog geen vergrooting der cellen, en dus geen beweging der rank tengevolge. Daartoe is natuurlijk noodzakelijk, dat de cellen ook in hare omgeving water vinden, dat ze kunnen opnemen. Onder gewone omstandigheden moeten zij dit water aan andere cellen onttrekken, die het op haar beurt weer uit het xyleem der vaatbundels moeten ontvangen. Dit zal dus een vertraging der beweging veroorzaken.

Nemen wij nu eens aan, dat het water aan de parenchymcellen rechtstreeks en zonder tegenwerkende krachten kon worden aangeboden, dan zou daarvan een aanzienlijke versnelling der beweging het gevolg moeten zijn. Omgekeerd, zou een dergelijke versnelling der beweging door gemakkelijker wateropneming een bewijs zijn, dat werkelijk de wateraantrekkende kracht grooter geworden was, ja zelfs zou men in de grootte dezer ver-

snelling een, alhoewel ruwe, maatstaf van de verandering der bedoelde kracht kunnen vinden.

Deze afhankelijkheid van de turgorkracht van de aanwezigheid van water, verdient eene nadere toelichting. Volgens de beschouwingen toch, die het uitgangspunt voor mijne onderzoekingen op dit gebied vormen *), is het protoplasma onder gewone omstandigheden impermeabel voor de vloeistof in de vacuole; de elastische spanning van den celwand kan deze vloeistof niet naar buiten persen. Slechts langs osmotischen weg kan een uitwisseling van stoffen plaats vinden. Van die stoffen, welke hier in aanmerking komen, kan zich echter alleen het water met voldoende snelheid door het protoplasma heen bewegen, de andere in den celinhoud voorkomende stoffen gaan, zoover mijne onderzoekingen toelaten daarover te oordeelen †), in korte tijden niet in waarneembare hoeveelheden door het protoplasma heen. Zoodra dus een parenchymatische cel met water in aanraking komt, zal zij trachten dit water op te nemen en zich daardoor te vergrooten. Maar bij toenemend volumen wordt ook de elastische spanning van den wand grooter, en eindelijk zal er tusschen de turgorkracht en deze elastische spanning een toestand van evenwicht intreden. Een watermolecule, dat dan door de turgorkracht naar den inhoud wordt getrokken, wordt door de drukking der celwanden met dezelfde kracht teruggedrukt; een vermeerdering van volume zal dus niet plaats vinden. In dezen toestand is dus de geheele turgorkracht actief.

Veronderstellen wij nu dat de turgorkracht door eenige oorzaak plotseling toeneemt, terwijl de cel niet door een vloeistof of door andere cellen omgeven is. Dan kan zij dus toch haar volumen niet vergrooten. In dezen toestand kan men dus zeggen, dat de turgorkracht gedeeltelijk inactief is. Eerst wanneer nu opnieuw water wordt toegevoerd, kan de turgorkracht geheel in werking treden, eerst dan wordt zij geheel actief §).

Hieruit volgt dus, dat wanneer aan een weefsel water niet

---

*) Zie mijn opstel in *Archiv. Néerl.* 1871, VI, p. 117.

†) Ibidem p. 124.

§) De elastische spanning der celwanden is dus alleen dan een maatstaf voor de turgorkracht, wanneer een vrije toevoer van water verzekerd is.

in voldoende hoeveelheid wordt toegevoerd, de turgorkracht der cellen onder bepaalde omstandigheden gedeeltelijk inactief zal kunnen zijn. In dit geval zal een kunstmatige toevoer van water plotseling de geheele turgorkracht actief maken en zoodoende een vergrooting veroorzaken.

Omgekeerd, zal men uit de waarneming van een snelle uitzetting door toevoer van water mogen afleiden, dat de turgorkracht der cellen gedeeltelijk inactief was.

In de onverwonde ranken, houdt de elastische spanning der passief gerekte weefsels en die der celwanden van het parenchym evenwicht met de turgorkracht van het parenchym; dit verandert echter aan de vraag of de turgorkracht in een gegeven geval geheel of slechts ten deele actief is, volstrekt niets.

Deze overwegingen hebben mij er toe geleid, te trachten, de zooeven besproken omstandigheden te verwezenlijken.

Ik vond daartoe het middel in de bekende injectieproeven van DUTROCHET. Deze uitstekende onderzoeker toch leerde, dat men uit verschillende plantendeelen door middel der luchtpomp de intercellulaire lucht grootendeels kan verwijderen, en men deze, zoo het voorwerp onder de luchtpomp onder water wordt gehouden, bij het openen der kraan door water kan doen vervangen. Reeds een geringe luchtverdunning is in den regel voldoende om het gewenschte resultaat te verkrijgen; ook bij de ranken van Sicyos is dit het geval.

De vraag, die ik had te beantwoorden, was dus de volgende: *Worden de bewegingen, die ranken tengevolge van prikkeling maken, door injectie met water versneld?*

Vóórdat ik deze vraag met goed gevolg kon beantwoorden, moest natuurlijk nog een andere beslist worden, n.l. die, *welken invloed injectie met water op niet geprikkelde ranken heeft?* Het zou toch zeer goed denkbaar zijn, dat in de niet geprikkelde ranken de turgorkracht der cellen niet altijd geheel actief was, en dus in staat zou zijn met een sterkere elastische spanning der passief gerekte weefsels dan de voorhandene, evenwicht te houden.

Hieruit volgt dat de proeven, in dit hoofdstuk te beschrijven, zich onder twee rubrieken laten brengen.

A. *De epinastische bewegingen.*

B. *De prikkelbewegingen.*

In elk dezer rubrieken kunnen dan weer drie onderafdeelingen onderscheiden worden, op dezelfde wijze als in hoofdstuk IV.

Aan het slot heb ik eindelijk nog eenige proeven over de werking van een injectie met slappe zoutoplossingen medegedeeld.

De methode der proeven was in alle gevallen dezelfde. De ranken werden, nadat zij het te onderzoeken stadium bereikt hadden, geteekend en voorzichtig in een laag en wijd cylinderglas in water gebracht. Daarbij moest alle prikkeling volkomen vermeden worden; de ranken werden daarom steeds met een pincet in het onderst deel vastgehouden; het bovenste in 't geheel niet aangeraakt. Om ze in het cylinderglas onder te houden en te beletten te drijven, plaats ik een metalen gaas, dat met vier veeren in het glas klemmend op en neer geschoven kan worden, even onder de oppervlakte van het water. Hierbij is de grootste zorg noodig om te maken, dat de aanraking met dit gaas geen prikkeling veroorzaakt. Gelukkig, dat gekromde ranken er natuurlijk slechts met de bovenzijde of een der zijkanten mede in aanraking kunnen komen, dus niet met de prikkelbare zijde. Eveneens moet men tijdens het pompen zorgen, prikkeling der ranken te vermijden. Na het pompen werden de ranken voorzichtig uit het cylinderglas genomen en in vlakke schaaltjes met water gelegd, ook daarbij werden ze met een pincet slechts aan het ondereinde aangevat.

Dat bij al deze voorzorgen prikkeling der ranken tijdens de bewerking volkomen vermeden kan worden, leeren die proeven uit de eerste afdeeling, bij welke de injectie van rechte ranken volstrekt geen kromming veroorzaakte.

De vraag, of injectie met water onder de gegeven omstandigheden nadeelig voor het leven der ranken is, verdiende, vooral met het oog op de nadeelige resultaten der injectie, door DUTROCHET in sommige gevallen waargenomen, door een rechtstreeksche proef beantwoord te worden. Hiertoe koos ik jonge ranken, alle nog hyponastisch gekromd, doch in verschillende stadiën der strekking, injiciëerde ze onder de luchtpomp bij denzelfden graad van luchtverdunning, die ook in alle overige proeven gebruikt werd, bracht ze in een vlak schaaltje onder water, en liet ze zoo gedurende 12 dagen aan haar lot over.

Onder deze omstandigheden gingen ze voort te groeien, strekten zich recht, bleven een poos recht en begonnen daarna zich epinastisch te krommen, tot ze geheel in enge windingen opgerold waren. Ze doorliepen dus de gewone phasen van het leven, zonder dat een andere schadelijke invloed dan hoogstens een vertraging tengevolge van de geringere toetreding der zuurstof, kon worden waargenomen. Het aantal windingen bedroeg bij:

	N°. 1.	N°. 2.	N°. 3	N°. 4	N°. 5.
9 Aug. (begin)	— $^3/_8$	— $1^1/_4$	— $2^1/_8$	— $2^1/_2$	— $^3/_4$
11 〃	0	0	0	— $^1/_2$	+ $^3/_4$
12 〃	$2^1/_2$	0	0	0	$^3/_4$
13 〃	7	$2^1/_2$	0	0	1
14 〃	7	4	$^1/_2$	0	$4^1/_2$
15 〃	$8^1/_2$	$4^1/_2$	2	3	5
16 〃	$8^1/_2$	$4^1/_2$	$3^1/_4$	5	6
21 〃	$8^1/_2$	$4^1/_2$	5	6	$6^1/_2$

N°. 1 en 2 waren hoofdranken, N°. 3—5 zijranken. Het teeken — geeft de nog overgebleven hyponastische windingen aan; bij de overigen is de bovenzijde convex.

Men ziet dat de ranken na injectie, onder water, de verschillende phasen van het leven op de gewone wijze doorliepen.

Ik ga thans over tot de beschrijving der proeven.

A. EPINASTISCHE BEWEGINGEN.

α. Periode der strekking.

I. Een jonge hoofdrank met $3^1/_4$ hyponastische windingen werd met water geïnjicieerd. Na drie kwartier waren de windingen tot $2^3/_4$ gedaald, ruim drie uur later tot 2, nog 14 uur later tot $^1/_4$ w.

Vlak na de injectie bedroeg dus de vermindering in drie kwartier $^1/_2$ w., later in ruim drie uur slechts $^3/_4$ en in 14 uur slechts $1^3/_4$. De injectie had dus een duidelijke versnelling der beweging tengevolge.

II. Twee oudere hoofdranken met nog $1^1/_4$, resp. $^3/_8$ hyponastische winding, werden geïnjicieerd. Na $^5/_4$ uur hadden ze

nog slechts $^3/_4$, resp. $^1/_8$ winding; anderhalf uur later nog $^3/_4$, resp 0, nog drie uur later $^1/_2$, resp. 0 w.

Dus terstond na de injectie in $^5/_4$ uur $^1/_2$, resp. $^1/_4$ verloren, daarna in $1^1/_2$ uur 0, resp. $^1/_8$, later in drie uur $^1/_4$, resp. 0 verloren. Dus ook hier een duidelijke versnelling der beweging tengevolge der injectie.

III. Drie zijranken werden op gelijke wijze behandeld. Aantal windingen:

	Vóór.	Na $^5/_4$ uur.	Na $2^3/_4$ uur.	Na 6 uur.
N^0. 1	$2^1/_8$	$1^1/_2$	$1^1/_4$	$1^1/_8$
„ 2	$2^1/_2$	2	$1^7/_8$	$1^5/_8$
„ 3	$^3/_4$	$^1/_2$	$^1/_2$	$^1/_2$

Deze proef bevestigt het resultaat der beide vorige.

Contrôle-proeven leerden, dat ranken zonder injectie, aan de plant gelaten, gewoonlijk 2—3 dagen noodig hebben om de laatste 1—3 windingen te strekken.

De versnellende werking der injectie strekte zich dus in de medegedeelde proeven wellicht over den geheelen duur der proef uit.

Conclusie.

Tijdens de epinastische strekking wordt de beweging door injectie met water tijdelijk versneld.

β. Tweede periode, rechte ranken.

IV. Twee rechte ranken werden geïnjicieerd, daarbij bleven zij gedurende geruimen tijd geheel recht.

Bij herhaling dezer proef geschiedt het soms, dat ondanks alle voorzorgen de ranken geprikkeld worden. Zij maken dan een meestal zwakke kromming aan den top, doch worden dan binnen zeer korten tijd weer recht Ik nam zulke krommingen waar van $^1/_4$, $^5/_8$ en $^3/_4$ winding, na een paar uur waren de ranken weer recht.

Conclusie.

Bij volkomen vermijding van prikkeling, blijven rechte ranken bij injectie recht,

γ. Periode der epinastische oprolling.

V. Een rank van een in de kamer staande plant was juist begonnen zich epinastisch op te rollen en had in de onderhelft $1^1/_8$ winding gemaakt; de top van meer dan 3 cM. was nog recht. Toen werd zij voorzichtig geinjicieerd. Het aantal windingen bedroeg:

		Toeneming.
Vóór de injectie	$1^1/_8$	
Na 5 minuten	$1^1/_4$	$^1/_8$
〃 12 〃	$1^1/_2$	$^1/_4$
〃 40 〃	$1^1/_2$	0
〃 2 uur	$1^3/_4$	$^1/_4$
〃 4 〃	$2^1/_2$	$^3/_4$
〃 8 〃	$3^1/_2$	1.

De top bleef gedurende al dien tijd recht.

In de eerste twaalf minuten na de injectie bedroeg de toeneming van het aantal windingen $^3/_8$ w., daarna per uur slechts $^1/_8$—$^3/_8$.

De injectie versnelde dus de epinastische beweging tijdelijk zeer aanzienlijk. Het schijnt, alsof op de versnelling eerst een periode van vertraging volgt, vóór de beweging weer haar gewonen voortgang neemt.

IV. Ranken, die aan planten in de kamer begonnen waren zich epinastisch te krommen, werden voorzichtig afgeknipt en geinjicieerd. Het aantal windingen bedroeg:

	N°. 1.	N°. 2.	N°. 3.
Vóór de injectie	$1^3/_4$	$2^1/_2$	$7^1/_2$
10 minuten daarna	$1^3/_8$	3	$8^1/_2$
$^1/_2$ uur later	2	3	$8^1/_2$
$1^1/_2$ 〃 〃	2	3	$8^1/_2$.

De toppen dezer ranken waren recht.

De injectie had dus eerst een snelle toeneming der windingen, daarna gedurende eenigen tijd stilstand der beweging ten gevolge.

Niet altijd vertoonen ranken de versnelling der beweging door injectie; soms schijnt de injectie volstrekt geen invloed

uit te oefenen; ik nam dit bij een aantal ranken met zeer trage beweging bij lage temperatuur (17° C.) waar.

VII. Een zeer groote rank, in de kamer gegroeid, had $1^1/_2$ epinastische windingen gemaakt, die ongeveer $^2/_3$ van de rank omvatten, één derde deel aan den top was nog recht. Deze rank werd nu geinjicieerd, de windingen werden talrijker en enger; het derde gedeelte aan den top bleef geheel recht.

Het aantal windingen bedroeg:

		Toeneming.
Vóór de injectie	$1^1/_2$	
Na 7 minuten	$2^1/_2$	1
〃 45 〃	3	$^1/_2$
〃 $4^1/_2$ uur	$4^1/_2$	$1^1/_2$

Men ziet dat de versnelling der beweging door injectie zeer aanzienlijk was.

VIII. Een rank, die reeds $2^3/_4$ winding epinastisch gemaakt had, doch wier top nog recht was, werd met water geinjiciëerd. Na $^3/_4$ uur toonde zij $4^1/_4$ winding, na 4 uur $5^1/_4$ winding. Toeneming in de eerste $^3/_4$ uur dus $^1/_2$ w., in de volgende $3^1/_4$ uur 1 w. Een versnelling door de injectie is dus duidelijk.

Conclusie.

Tijdens den aanvang der epinastische oprolling heeft injectie met water een voorbijgaande versnelling der beweging ten gevolge.

B. PRIKKELBEWEGINGEN.

δ. Beweging ten gevolge van wrijven, enz.

IX. Twee ranken werden door wrijven aan de onderzijde geprikkeld en terstond daarop met water geinjiciëerd. Daardoor rolden zij zich snel op en vertoonden de volgende aantallen windingen:

	N°. 1.	N°. 2.
Na 1 minuut	$2^1/_4$	4
〃 4 minuten	$4^1/_4$	$5^3/_4$
〃 40 〃	5	13.

N°. 1 werd toen geplasmolyseerd, en verloor dien ten gevolge $2^1/_4$ winding; de overblijvende $2^3/_4$ waren wijder dan vóór de plasmolyse. Bij het snelle winden ten gevolge der injectie, vond dus ook een blijvende verlenging plaats.

X. Een zeer prikkelbare rank, geheel recht en alleen aan den top een weinig omgekruld, werd door tienmaal herhaald wrijven met een metalen staaf langs de onderzijde geprikkeld; dien ten gevolge krulde zij zich zeer snel op, en werd toen na eenige minuten met water geinjicieërd. Het aantal windingen veranderde daarbij als volgt:

Vóór de injectie	$2^1/_4$
Na 3 minuten	$2^3/_4$
〃 20 〃	$4^3/_4$
〃 60 〃	5.

Het aantal windingen nam dus veel sterker toe dan dit zonder injectie het geval zou zijn geweest. Door plasmolyse bleek, dat van de vijf gemaakte windingen $2^1/_2$ op blijvende verlenging, en evenveel op turgoruitrekking berustten.

XI. Een rank werd met al haar zijtakken afgesneden en bij het overbrengen uit den tuin naar het laboratorium door toevallige oorzaken geprikkeld en terstond daarop met water geinjicieerd. De hoofdrank was ± 20, de twee grootste zijranken 9 resp. 6 cM. lang. Vóór de injectie waren alle drie bijna recht, terstond na de injectie begonnen zij van den top af zich in zeer enge windingen op te rollen. Na een kwartier waren 5, 4, 1 cM. aan den top geheel opgerold, het overige nog recht. Zie hier de toeneming van het aantal windingen:

	N°. 1.	N°. 2.	N°. 3.
Vóór de injectie	$^1/_4$	0	0
Na 8 minuten	$2^3/_4$	$^3/_4$	$^5/_8$
〃 10 〃	$4^1/_4$	1	—
〃 15 〃	$6^1/_2$	$1^3/_4$	$^7/_8$
〃 25 〃	8	$2^1/_2$	—
〃 40 〃	$9^1/_4$	—	1
〃 $2^1/_4$ uur	12	—	$1^1/_4$

N°. 1 is de hoofdrank, N°. 2 en 3 de beide zijranken.

N°. 2 werd toen zij $2^1/_2$ winding bereikt had geplasmolyseerd, en verloor daardoor 2 windingen.

N°. 1 en 3 bleven in het water; dáár verloor N°. 3 in den loop van 20 uren alle windingen en werd recht; de hoofdrank verloor er 4 en behield er 8.

Conclusie.

Krommingen, door wrijven ontstaan, worden door injectie zeer aanzienlijk versterkt.

ε. Omwinding van steunsels.

XII. Potplanten, die sedert een paar dagen in het laboratorium stonden, hadden den 9den Augustus een aantal rechte ranken gemaakt. Ik plaatste tegen den achterkant van deze, op geringen afstand van den top, ijzerdraden van 2 mM. dikte en liet ze zich hierom krommen. Na korter of langer tijd werden dan de ranken afgesneden en voorzichtig met water geinjiciëerd.

N°. 1 maakte in 10 minuten om het steunsel $3^1/_8$ losse windingen. Deze vermeerderden door injectie als volgt:

Na	8	minuten	tot	$4^1/_2$	w.
„	12	„	„	$6^1/_4$	„
„	18	„	„	$7^1/_2$	„
„	35	„	„	10	„
„	70	„	„	12	„ .

Daarna ging de beweging terug en vertoonde de rank:

Na	2	uur	9	w.
„	4	„	$6^1/_2$	„
„	5	„	6	„ .

N°. 2 maakte in $^1/_2$ uur $1^1/_4$ winding om het steunsel; toen werd zij geïnjicieerd. Aantal windingen:

Na	3	minuten	$1^3/_4$
„	18	„	$3^1/_4$
„	40	„	$3^1/_2$.

Toen keerde de rank terug en werd in drie uren weer geheel recht.

N⁰. 3 maakte in $^1/_2$ uur $1^1/_4$ winding om het steunsel; deze vermeerderden door injectie in $^1/_2$ uur tot $3^1/_2$ w.; toen ging de rank terug en werd na vier uur weer recht.

N⁰. 4 had om het steunsel $^1/_2$ winding gemaakt en werd toen geïnjicieerd. Aantal windingen:

Na	20 minuten	$7^1/_4$
〃	$1^1/_2$ uur	$7^3/_4$
〃	3 〃	6
〃	5 〃	$4^1/_2$
〃	8 〃	3 .

In al deze gevallen had dus de injectie een plotselinge en zeer aanzienlijke versnelling der beweging ten gevolge; deze is in den beginne zoo snel, dat men haar zeer gemakkelijk met het oog kan volgen en wordt dan allengs langzamer. Na eenigen tijd houdt zij op, en daar ook de prikkel sints de injectie heeft opgehouden te werken, strekt de rank zich nu langzamerhand weer, soms geheel, soms slechts ten deele. Dit laatste hangt natuurlijk van den ouderdom der rank af.

XIII. Ranken van potplanten in de kamer, geheel recht, werden den 13den Augustus bij 21⁰ C. gedurende drie minuten met ijzerdraden in aanraking gebracht; zij bogen zich om deze, en werden terstond daarna afgeknipt en met water geïnjicieerd. Het aantal windingen bedroeg:

	N⁰. 1.	N⁰. 2.	N⁰. 3.
Vóór de injectie	1	1	$^3/_4$
Na 1 minuut	2	$2^1/_4$	1
〃 20 minuten	$5^3/_4$	$5^1/_2$	4
〃 5 kwartier	6	$4^3/_4$	$3^3/_4$
〃 5 uur	$2^1/_2$	—	— .

Na 5 kwartier werden N⁰. 2 en 3 geplasmolyseerd, en verloren daardoor slechts $2^3/_4$ resp. $1^1/_2$ van hunne windingen; deze bleken dus ten deele op blijvende verandering te berusten.

N⁰. 1 bleef in het water en had zich na 24 uur epinastisch tot 13 windingen opgerold.

De injectie had dus een aanzienlijke versterking der krommingen ten gevolge. Zonder injectie zouden deze, na de wegneming van het steunsel, slechts langzaam en weinig zijn toegenomen, ten gevolge der nawerking. Na korter of langer tijd houden de werking van den prikkel en die der injectie op, en beginnen de ranken zich allengs weer te strekken, even als ze dit ook zonder injectie zouden gedaan hebben.

XIV. Twee rechte ranken werden uit den tuin gehaald en gedurende 5 minuten op een paar cM. afstand van hun top aan de achterzijde met een dun koperdraad in aanraking gebracht en daarna terstond geïnjicieerd. Het aantal windingen bedroeg:

	N°. 1.	N°. 2.
Vóór de injectie	$^1/_4$	$^1/_8$
5 minuten daarna	1	—
8 〃 〃	2	$^3/_4$
9 〃 〃	3	—
10 〃 〃	$3^1/_2$	$^7/_8$
14 〃 〃	5	—
22 〃 〃	7	$1^1/_4$
42 〃 〃	—	$1^1/_2$.

Na 22 minuten werd N^0. 1 in sterke zoutoplossing gebracht en verloor daar 4 van de 7 windingen. N^0. 2 bleef in water, ontwond zich in eenige uren tot $^1/_4$ w. en wond zich toen weer epinastisch op.

Men ziet dat de injectie de kromming versterkt, en wel zeer aanzienlijk bij N^0. 1. Verder, dat de krommingen in zooverre voorbijgaande zijn als de rank, bij voortdurend verblijf in water, zich later weer strekken kan; dat ze echter (blijkens N^0. 1) met eene bij plasmolyse blijvende verlenging gepaard gaan.

XV. Twee ranken van kamerplanten maakten om dikke ijzerdraden in omstreeks een uur $^3/_4$, resp. $2^3/_8$ windingen, deze lagen vast tegen het steunsel aan. Toen werden ze geïnjicieerd. Aantal windingen:

	N°. 1.	N°. 2.
Vóór de injectie	$^3/_4$	$2^3/_8$
Na $^3/_4$ uur	$3^1/_2$	$3^1/_2$
〃 4 〃	$^3/_4$	$2^1/_2$
〃 20 〃	7	11 .

Dus, terstond na de injectie een snelle kromming, daarna eerst afneming, dan weer toeneming van het aantal windingen; het laatste ten gevolge van epinastie.

XVI. Ranken van potplanten maakten om steunsels windingen en werden daarna met water geïnjicieerd (13 Augustus). Het aantal windingen bedroeg:

	N°. 1.	N°. 2.
Vóór de injectie	1	$3^1/_2$
Na $^1/_2$ uur	3	14 .

Nu werden beiden in sterke zoutoplossing geplasmolyseerd; het aantal windingen bedroeg na 20 uur bij N°. 1: 1 w., bij N°. 2: 7 w.

De injectie had dus een snelle toeneming der windingen ten gevolge; deze windingen berustten voor een groot deel op turgoruitrekking, voor het overige echter op blijvende verlenging.

XVII. Een rechte rank, uit den tuin gehaald en in een glas met water gezet, maakte om een 3 mM. dikken koperdraad in omstreeks $1^1/_2$ uur $4^1/_4$ winding. Toen werd zij geïnjicieerd, waardoor de windingen in 10 minuten tot $5^1/_2$, in 50 minuten tot $8^1/_2$ toenamen. Van deze verloor zij nu door plasmolyse slechts $3^1/_2$; 5 windingen bleven daarbij over.

Het resultaat is hetzelfde als in de vorige proeven.

XVIII. In de laatste plaats heb ik een aantal ranken, die een steunsel gevat hadden, en zich tusschen dit en haar basis in schroefwindingen hadden opgerold, met water geïnjicieerd. Daar ze keerpunten hadden, wordt het aantal windingen door meerdere cijfers aangegeven; de teekens + geven de ligging der keerpunten aan, het eerste cijfer het aantal windingen tusschen de basis en het eerste keerpunt.

Een jonge rank werd den 30sten Augustus geïnjicieerd. Het aantal windingen bedroeg vóór de injectie $1^1/_2 + 1^1/_2 + 1^1/_4$, na 20 minuten $2 + 2 + 1^3/_4$, en na 4 uur $2 + 2 + 2$.

Een jonge rank, een weinig ouder dan de vorige, met $5 + 7$ windingen werd geïnjicieerd; het aantal steeg in 8 minuten tot $5 + 8$, en bleef toen gedurende $1^1/_2$ uur onveranderd (29 Aug.).

Een aantal oude ranken werden met de volgende aantallen windingen geïnjicieerd:

N°. 1.	$6^1/_2 + 5^1/_2$
" 2.	$5 + 6$
" 3.	$6 + 6^1/_2$
" 4.	$2 + 2$
" 5.	$4^1/_2 + 3 + 2.$

Zij veranderden noch terstond na de injectie, noch in den loop van eenige uren daarna, het aantal hunner windingen.

Deze proef leert dus, dat in jonge ranken alle windingen tusschen het steunsel en de basis door injectie een weinig toenemen, in iets oudere, alleen die in 't jongste deel der rank; op oude ranken heeft injectie geen merkbaren invloed.

Conclusiën.

1. De krommingen van ranken om steunsels worden door injectie soms meer, soms minder, meestal zeer aanzienlijk versterkt. De bewegingen der ranken zijn kort na de injectie gewoonlijk als zoodanig zichtbaar.

2. Deze versterking is tijdelijk, na meestal korten tijd beginnen de ranken zich weer te strekken.

3. Deze krommingen bestaan steeds ten deele in turgoruitrekking, ten deele in een bij plasmolyse blijvende verandering.

4. De schroefwindingen van ranken tusschen het steunsel en de basis der rank worden aanvankelijk door injectie versterkt, als zij ouder zijn niet meer.

ζ. Teruggaande beweging na wegneming van het steunsel.

XIX. Den 14den Augustus, bij 20° C., werden aan potplanten in de kamer twee prachtig ontwikkelde rechte ranken uitgezocht, en op de gebruikelijke wijze met steunsels in aanraking gebracht. Als steunsels dienden ijzerdraden van 2 mM. dikte. Na $^1/_4$ uur werden deze weggenomen; de beweging duurde nog een poos voort, en keerde daarna langzaam terug; midden in de teruggaande beweging werden ze zeer voorzichtig afgeknipt, onder de luchtpomp gebracht en geïnjicieerd. Het aantal windingen bedroeg:

	No. 1.	No. 2.
Na 1/4 uur	7/8	2
〃 25 minuten	1 1/2	2 1/2
〃 45 〃	1	2 1/2
〃 65 〃	1/2	1 1/4
〃 1 1/4 uur	1/4	1/2 .

Nu werden beiden geïnjicieerd:

8 minuten daarna	1/4	1/2
15 〃 〃	1/4	1/2
30 〃 〃	1/4	1/2
1 1/2 uur 〃	1/4	1/4
2 1/2 〃 〃	0	0 .

Daarna bleven ze recht, tot ze zich epinastisch gingen opwinden.

Conclusie.

De injectie had dus geen versnelling der beweging tengevolge, integendeel, zij schijnt haar vertraagd te hebben.

C. INJECTIE MET ZWAKKE ZOUTOPLOSSINGEN.

XX. Rechte ranken uit den tuin werden met 5 pCt. chloornatriumoplossing onder de luchtpomp geïnjicieerd. Vlak vóór de injectie waren ze langs een maatstaf gelegd om ze te meten, en daardoor geprikkeld. Ten gevolge hiervan maakten zij aan hun top enge windingen, die, nadat de prikkel opgehouden had te werken, weer gedeeltelijk verloren gingen. Het aantal windingen bedroeg:

	Na 1/2 uur.	Na 70 minuten.	Na 1 1/2 uur.
No. 1.	1/4	1/8	1/8
〃 2.	2 1/4	1 3/4	1/2
〃 3.	2 1/2	1	1/2
〃 4.	1/4	0	0
〃 5.	1 1/4	1/4	1/4 .

No. 2 en 3 wonden zich later, in omstreeks 20 uur, nog eens tot 2 1/2, resp. 2 windingen op.

XXI. Ook zonder injectie door middel van de luchtpomp, vertoonen ranken, die door verschillende oorzaken geprikkeld zijn, in zwakke zoutoplossingen het verschijnsel der topkrulling. Zoo maakten rechte ranken :

In 4 pCt. in eenige dagen $4^1/_2$ en $3^1/_2$ w. aan hun top.

In 5 pCt. in drie uur 3 en 2 w. aan den top; het eerste exemplaar, daarna in 20 pCt. gebracht, verloor daar slechts $1^1/_2$ van de 3 windingen.

In 7—8 pCt. wordt daarentegen de bovenzijde concaaf, evenals in 20 pCt.

XXII. Drie ranken, uit den tuin gehaald, werden gedurende korten tijd bij 31° C. met een steunsel in aanraking gebracht, en één (N°. 2) van een potplant werd bij 22°·C. op dezelfde wijze behandeld. Nadat ze om het steunsel eenige windingen gemaakt hadden, werden twee (N°. 1 en 2) met 1 pCt., de twee andere (N°. 3 en 4) met 2 pCt. chloornatriumoplossing onder de luchtpomp geïnjicieerd. Het aantal windingen bedroeg, bij de injectie met 1 pCt. chloornatrium:

	N°. 1.	N°. 2.
Vóór de injectie	1	2
Na 4 minuten	$1^1/_2$	$3^1/_4$
〃 6 〃	$1^3/_4$	$3^1/_2$
〃 17 〃	2	$3^1/_2$
〃 40 〃	$2^3/_4$	$3^1/_2$
〃 $1^3/_4$ uur	$2^3/_4$	$2^1/_4$
〃 $4^1/_2$ 〃	$1^1/_2$	$7^1/_4$
〃 24 〃	6	11 .

De aanraking met het steunsel had 10 minuten geduurd.

Bij N°. 3 en 4, injectie met 2 pCt. chloornatrium, duurde de aanraking met het steunsel 25 minuten. Het aantal windingen bedroeg :

	N°. 3.	N°. 4.
Vóór de injectie	$1^3/_4$	$1^5/_8$
Na 2 minuten	$2^3/_4$	$3^1/_2$
〃 25 〃	4	$4^1/_2$
〃 $1^1/_2$ uur	4	$3^1/_4$
〃 $4^1/_2$ 〃	$8^1/_4$	6
〃 24 〃	14	11 .

De ranken waren in beide oplossingen frisch en stijf.

Deze proef toont aan, dat injectie met 1 en 2 pCt. chloornatrium de kromming om een steunsel aanzienlijk versnelt, evenals injectie met water dit doet. Ook de verdere verschijnselen zijn dezelfde als bij de injectie met water: eerst vermindering der windingen en daarna weer epinastische oprolling der ranken.

De versnellende werking der zoutoplossingen is echter geringer dan die van water.

Het zij mij vergund, er aan te herinneren, dat rechte ranken, in 1 pCt. oplossing gebracht, haar lengte aanvankelijk niet veranderen, terwijl zij in 2 pCt. zich verkorten. Na eenigen tijd verlengen zij zich in beide gevallen door groei. Zie blz. 86.

XXIII. Twee ranken uit den tuin werden, bij 31° C., in glaasjes met water staande, met een steunsel in aanraking gebracht, en kromden zich daarom in een kwartier tot $^1/_4$ en $^3/_8$ winding. Toen werden ze met 4 pCt. chloornatriumoplossing geïnjicieerd. Het aantal windingen bedroeg:

	N°. 1.	N°. 2.
Vóór de injectie	$^1/_4$	$^3/_8$
Na 5 minuten	$^3/_4$	$1^7/_8$
〃 1 uur	$^3/_4$	$1^3/_4$
〃 4 〃	$^3/_8$	0
〃 20 〃	$^1/_4$	$^3/_4$

De injectie had dus een versnelling der beweging tengevolge; hierop volgde een teruggaande beweging, en bij N°. 2 later weer een begin van epinastische oprolling.

XXIV. Vier rechte ranken, uit den tuin gehaald en in cylinderglaasjes met water staande, werden bij 31° C. met steunsels in aanraking gebracht, zij kromden zich om deze in $^1/_2$—1 uur en werden daarna onder de luchtpomp met 5 pCt. chloornatriumoplossing geïnjicieerd. Het aantal windingen bedroeg:

	N°. 1.	N°. 2.
Vóór de injectie	1	$1^5/_8$
Na 5 minuten	$^1/_2$	$1^3/_4$
〃 1 uur	$^1/_4$	$1^1/_8$
〃 3—4 uur	0	1

	N°. 3.	N°. 4.
Vóór de injectie	3/8	3 1/4
Na 3 minuten	—	4 1/4
〃 10 〃	1/8	3 3/4
〃 2 1/2 uur	1/8	3
〃 20 〃	1/8	1/2

N⁰. 1—3 waren aan 't eind der proef vrij slap, N⁰. 4 vrij stijf.

Het resultaat was, dat bij N⁰. 1 en 3 de zoutoplossing de kromming terstond en blijvend verminderde, evenals een veel sterkere oplossing dit gedaan zou hebben, terwijl N⁰. 2 en 4 zich gedroegen alsof zij met een zwakkere oplossing geinjicieerd waren; wellicht is dit verschil daaraan toe te schrijven, dat N⁰. 2 en 4 onder den invloed van het steunsel zich reeds sterker gekromd hadden dan N⁰. 1 en 3.

Conclusie.

1. In zoutoplossingen van 4—5 pCt. maken ranken topkrulling.

2. Zoutoplossingen van 1—2 pCt. versnellen de beweging om een steunsel op dezelfde wijze als injectie met water.

3. Zoutoplossingen van 4 pCt., en in enkele gevallen van 5 pCt. doen dat eveneens, doch veel minder sterk; in de meeste gevallen werkt een oplossing van 5 pCt. even als sterke zoutoplossingen, den turgor opheffend.

Deze feiten winnen aan belangrijkheid, wanneer men bedenkt, dat niet geprikkelde ranken in 2—5 pCt. zoutoplossing een gedeelte van haren turgor verliezen en zich verkorten, terwijl bij 4—5 pCt. bij zulke ranken in de cellen van het parenchym reeds de plasmolyse begint.

Algemeene Conclusie.

Trachten wij thans uit de beschreven proeven de algemeene empirische resultaten af te leiden.

1. Alle bewegingen der ranken worden door injectie met water voorbijgaande versterkt; alleen de teruggaande beweging,

na wegneming van het steunsel, maakt hierop in het onderzochte stadium een uitzondering.

2. Rechte, niet geprikkelde, ranken blijven bij injectie met water recht.

3. De versnelling is bij de prikkelbewegingen veel aanzienlijker dan bij de epinastische bewegingen; de ranken bereiken bij korten duur van de prikkeling een veel aanzienlijker graad van kromming dan ze onder de gegeven omstandigheden ooit zonder injectie zouden kunnen bereiken.

Overeenkomstig met de beschouwingen, in het begin van dit hoofdstuk uitéèngezet, kunnen wij dus thans als bewezen beschouwen:

4. Dat de turgorkracht van het parenchym der ranken, tijdens de epinastische strekking, en later tijdens de epinastische oprolling, ten deele inactief is.

5. Dat prikkels de turgorkracht plotseling zeer aanzienlijk verhoogen, veel meer dan door de onder gewone omstandigheden tot stand komende bewegingen aangeduid wordt.

VII. *Over het aandeel van turgor en groei aan de bewegingen van andere ranken.*

De onderzoekingen, in de vorige hoofdstukken beschreven, hadden geenszins ten doel, eenvoudig de bewegingsverschijnselen van de ranken van Sicyos nader te leeren kennen; deze ranken dienden mij slechts als een geschikt voorbeeld, om het aandeel dat turgor en groei aan de groeikrommingen van veelcellige organen in het algemeen bezitten, te bestudeeren. De snelheid der bewegingen deed mij deze ranken boven andere voorwerpen kiezen, daar het te verwachten was dat de moeilijkheden, die aan het onderzoek in den weg stonden, bij snelle bewegingen het gemakkelijkst te overwinnen zouden zijn.

Ik zou echter den weg van het zuiver experimenteele onderzoek verlaten, zoo ik de voor Sicyos gevonden resultaten, zonder verdere proeven, voor alle groeikrommingen geldig verklaarde.

Ook is het algemeene resultaat van te groot belang, om

thans, nu de methoden voor het experimenteele onderzoek gevonden zijn, alleen naar analogie te beslissen. Zulk een handelwijze moge vroeger geoorloofd en doelmatig geweest zijn, thans is zij dit voorzeker niet meer.

Ik heb daarom in de eerste plaats de bewegingen van ranken van andere planten, met het oog op de hier behandelde vragen, bestudeerd, in de tweede plaats echter ook de groeikrommingen van andere organen. Deze laatsten zullen in het volgende hoofdstuk besproken worden.

Daar de proeven met ranken slechts herhalingen van die met Sicyos waren, kan ik voor de algemeene beschrijving en de in acht te nemen voorzorgen verwijzen naar de in de vorige hoofdstukken gegeven beschrijving der methode, en ga ik dus terstond tot de behandeling der proeven zelven over.

A. CUCURBITA PEPO.

I. *Plasmolyse tijdens de epinastische strekking.*

Een jonge hoofdrank en een zijrank, beiden nog hyponastisch gewonden (bovenzijde concaaf) werden in de zoutoplossing gebracht. Als zoutoplossing gebruikte ik in deze en alle volgende proeven dezelfde oplossing als in de proeven met Sicyos, namelijk 20 pCt. chloornatrium. Het aantal windingen bedroeg:

	N°. 1.	N°. 2.
Vóór de plasmolyse	$1^1/_4$	$1^1/_8$
Na $^1/_2$ uur	$1^1/_2$	$1^1/_2$
〃 20 〃	2	$1^1/_2$

In beide gevallen nam dus het aantal windingen, ten gevolge van de opheffing van den turgor, toe. De turgoruitrekking was dus aan de bovenzijde grooter dan aan de onderzijde.

II. *Plasmolyse tijdens de epinastische oprolling.*

Drie op elkander volgende ranken van een zelfden tak, allen reeds beginnende de epinastische krommingen in de onderste helft te maken, en een eveneens epinastisch opgerolde zijrank,

(N^0. 4) werden in de zoutoplossing gebracht. Het aantal windingen bedroeg:

	N^0. 1.	N^0. 2.	N^0. 3.	N^0. 4.
Vóór de plasmolyse	$1^1/_4$	$3^1/_8$	$3^1/_2$	$2^1/_4$
Na 40 minuten	$^3/_4$	$2^3/_4$	$3^1/_4$	2
„ 5 uur	—	—	$2^7/_8$	$1^3/_4$
„ 20 „	$^3/_4$	$2^3/_4$	$2^3/_4$	$1^1/_2$
Totale vermindering	$^1/_2$	$^3/_8$	$^3/_4$	$^3/_4$.

In alle exemplaren nam dus het aantal windingen ten gevolge van de opheffing van den turgor af. De turgoruitrekking was dus aan de bovenzijde grooter dan aan de onderzijde.

III. *Plasmolyse tijdens de kromming om een steunsel.*

Drie rechte ranken aan potplanten, die den vorigen dag in de kamer gebracht waren, werden voor dit doel uitgekozen. Des morgens om half tien (5 Augustus) werd de onderzijde met een 2 m.M. dik ijzerdraad in aanraking gebracht; na korten tijd begon de beweging. Zij duurde bij N^0. 1: 20 minuten, bij N^0. 2: 70 min. en bij N^0. 3: $4^1/_2$ uur. Daarna werden de ranken geplasmolyseerd. Het aantal windingen bedroeg:

	N^0. 1.	N^0 2.	N^0. 3.
Vóór de plasmolyse	$1^1/_4$	$^3/_8$	$^7/_8$
Daarna	0	0	$^1/_4$

Bij N^0. 1 en 2, die zich snel bewogen hadden, werd de rank bij opheffing van den turgor geheel recht; bij N^0. 3, die een langzame beweging had gehad, was reeds een belangrijk deel der kromming door groei gefixeerd.

De beweging bestond dus grootendeels in een eenzijdige vermeerdering der turgoruitrekking.

IV. *Injectie tijdens de epinastische strekking.*

Twee jonge, nog met de bovenzijde concaaf opgerolde ranken werden uit den tuin genomen, en onder water onder de luchtpomp geinjicieerd. Het aantal windingen bedroeg:

	N°. 1.	N°. 2.
Vóór de injectie	$2^1/_2$	$1^1/_2$
Na $1^3/_4$ uur	2	1
〃 $3^1/_2$ 〃	$1^3/_4$	1
〃 7 〃	—	1
〃 24 〃	1	0

De injectie met water had dus tijdelijk een versnelling der beweging ten gevolge.

V. *Injectie tijdens de kromming om een steunsel.*

Twee ranken, die in den tuin om een steunsel even begonnen waren zich te krommen, werden afgeknipt en onder de luchtpomp geinjicieerd. Het aantal windingen bedroeg:

	N°. 1.	N°. 2.
Vóór de injectie	$^1/_4$	$^1/_8$
Na $1^3/_4$ uur	$^3/_4$	1
〃 $3^1/_2$ 〃	$^1/_4$	$^1/_8$
〃 7 〃	0	0

Bedenkt men, dat de nawerking na wegneming van het steunsel steeds slechts zwak is, dan ziet men dat de injectie met water de kromming in beide gevallen aanzienlijk versterkt heeft. Nadat de werking der injectie had opgehouden, strekten zich de ranken weer recht.

VI. *Injectie tijdens de kromming om een steunsel.*

Drie ranken hadden in den tuin om steunsels een aantal windingen gemaakt, en werden toen geinjicieerd. Het aantal windingen bedroeg:

	N°. 1.	N°. 2.	N°. 3.
Vóór de injectie	4	$1^5/_8$	$2^1/_4$
Na $1^3/_4$ uur	$7^1/_2$	3	$7^1/_2$
〃 $3^1/_2$ 〃	$8^3/_4$	3	$7^1/_2$
〃 7 〃	$8^1/_2$	$2^5/_8$	—
〃 20 〃	$6^1/_2$	1	—

De windingen werden bij de injectie talrijker en enger, ze

strekten zich niet over een grooter deel der rank uit; top en basis bleven recht. N°. 3 werd na $3^1/_2$ uur geplasmolyseerd, en verloor daardoor slechts $1^1/_2$ van de $7^1/_2$ windingen.

De versterking der kromming door injectie was in al deze drie exemplaren zeer aanzienlijk.

Conclusiën.

Bij *Cucurbita Pepo:*

1. is de turgoruitrekking tijdens de epinastische bewegingen aan de bovenzijde grooter dan aan de onderzijde der ranken;
2. berust de kromming der ranken ten gevolge van prikkeling, aanvankelijk ten minste, grootendeels op vermeerderde turgoruitrekking der bovenzijde;
3. is de turgorkracht, tijdens de epinastische strekking, niet geheel verzadigd;
4. vermeerdert de prikkel de turgorkracht der bovenzijde tijdelijk zeer aanzienlijk.

B. ECHINOCYSTIS LOBATA.

VII. *Plasmolyse van een rank met topkrulling.*

Een rank, die zich ten gevolge van onbekende prikkeling aan haar top tot $1^3/_4$ winding had opgewonden, werd in de zoutoplossing gebracht en verloor daar in één uur $1^1/_4$ winding; daarna bleef zij onveranderd en had ook na 4 uur nog $^1/_2$ winding. De opheffing van den turgor had dus een gedeeltelijk verlies der kromming ten gevolge.

VIII. *Plasmolyse tijdens de kromming om een steunsel.*

Een rank eener potplant, die in de kamer stond, maakte in $^1/_2$ uur om een ijzerdraad van 2 mM. dikte $^1/_4$ winding. Toen geplasmolyseerd, strekte zij zich in een uur recht, zoodat alle spoor van buiging op de aangeraakte plaats verdween. Daarna kromde zij zich met den bovenkant concaaf tot bijna $^1/_2$ w. in

zeer groote bocht. De prikkeling had dus nog geen, bij plasmolyse blijvende, verandering teweeggebracht.

IX. *Injectie tijdens de epinastische strekking.*

Een rank had zich met de bovenzijde convex over haar geheele lengte in wijde windingen opgerold. Het aantal windingen bedroeg:

Vóór de injectie	$3^1/_4$
Na 45 minuten	$4^3/_4$
〃 4 uur	$5^3/_4$.

De injectie had dus tijdelijk een aanzienlijke versnelling der beweging ten gevolge.

X. *Injectie van een rank met topkrulling.*

Een rank had zich, ten gevolge van toevallige aanraking met andere voorwerpen, aan haar top tot $^3/_4$ winding gebogen. Toen werd zij met water geïnjicieerd en veranderde daarna hare kromming als volgt:

Vóór de injectie	$^3/_4$
Na 20 minuten	$1^1/_4$
〃 1 uur	$1^1/_4$
〃 2 〃	$^1/_4$
〃 4 〃	0.

Dus eerst een snelle toeneming der beweging, daarna werd de rank weer geheel recht.

XI. *Injectie tijdens de kromming om een steunsel.*

Een rank eener potplant had in omstreeks zes uur om een steunsel een aantal zeer losse windingen gemaakt; de top was nog geheel recht. Toen werd zij geïnjicieerd. Het aantal windingen bedroeg:

Vóór de injectie		$2^7/_8$
Na 6 minuten		$4^1/_4$
〃 2 uur		$4^1/_4$
〃 5 〃		$8^1/_4$
〃 20 〃		24 .

De injectie had dus eerst een zeer aanzienlijke versnelling, daarna echter een periode van vertraging der beweging ten gevolge. Aan het eind combineerde zich de epinastische oprolling met de reeds voorhanden windingen.

Conclusiën.

De ranken van Echinocystis lobata, die in den knooptoestand niet hyponastisch opgerold zijn, gedragen zich tijdens de epinastische oprolling en de prikkelbewegingen in de onderzochte punten juist zooals die van Sicyos angulatus:

1. tijdens de epinastische oprolling is de wateraantrekkende kracht van het parenchym der bovenzijde niet verzadigd;

2. bij krommingen om steunsels of ten gevolge van onbekende prikkels, neemt de turgor van het parenchym der bovenzijde aanzienlijk toe; deze krommingen bestaan aanvankelijk geheel uit turgoruitrekking, later ten deele ook uit een bij plasmolyse blijvende verandering (groei).

C. BRYONIA DIOICA.

XII. *Plasmolyse tijdens de epinastische strekking.*

Drie jonge ranken, nog met de bovenzijde concaaf gekruld, werden geplasmolyseerd. Zij veranderden daardoor het aantal windingen op de volgende wijze:

	N°. 1.	N°. 2.	N°. 3.
Vóór de plasmolyse	3	$1^1/_4$	$^1/_2$
Na $2^1/_2$ uur	$3^1/_4$	$1^1/_2$	$^3/_4$
〃 20 〃	$3^1/_4$	$1^1/_2$	$^3/_4$.

Bij allen nam dus het aantal windingen ten gevolge van de

opheffing van den turgor toe: de turgoruitrekking was dus aan de sneller groeiende bovenzijde grooter dan aan de onderzijde.

XIII. *Plasmolyse tijdens de epinastische kromming.*

Een rank die reeds $2^1/_4$ epinastische windingen gemaakt had, werd geplasmolyseerd; na korten tijd bedroeg het aantal windingen $1^1/_2$, en bleef sedert onveranderd. De epinastische windingen berustten dus ten deele op turgoruitrekking.

XIV. *Plasmolyse tijdens de kromming om een steunsel.*

Een rank had om een steunsel 3 windingen gemaakt; de top was nog bijna recht. In de zoutoplossing werden de windingen allengs wijder en minder; na twee uur was er nog slechts éène winding overgebleven.

Conclusiën.

1. Bij de epinastische bewegingen is de turgoruitrekking der bovenzijde grooter dan die der onderzijde.
2. Hetzelfde is het geval bij de prikkelbewegingen.

D. PASSIFLORA GRACILIS.

XV. *Plasmolyse tijdens de epinastische kromming.*

Drie ranken, die de epinastische beweging in de onderste helft reeds begonnen hadden, werden in den tuin afgesneden en geplasmolyseerd. Het aantal windingen bedroeg:

	N°. 1.	N°. 2.	N°. 3.
Vóór de plasmolyse	$^3/_4$	$3^1/_4$	$7^1/_2$
Na 20 uur	$^1/_4$	$1^5/_8$	$5^1/_4$.

Ofschoon het stadium der epinastische beweging zeer verschillend was, berustte deze toch in alle gevallen ten deele op turgoruitrekking, ten deele op een bij plasmolyse blijvende verandering.

Algemeene conclusie.

De medegedeelde proeven bewijzen, dat de rol van den turgor en den groei bij de bewegingen der ranken van andere planten in hoofdzaken dezelfde is als bij de bewegingen der ranken van Sicyos.

VIII. *Over het aandeel van turgor en groei aan eenige andere groeikrommingen.*

Nu wij weten, dat de voor de bewegingen der ranken van Sicyos gevonden betrekking tusschen turgor en groei ook voor de bewegingen der ranken in het algemeen geldt, krijgt het vermoeden, dat ook bij andere groeikrommingen van veelcellige organen dezelfde betrekking zal bestaan, een groote waarschijnlijkheid. Te meer is dit het geval, wanneer men bedenkt, dat de beide hoofdtypen der groeikrommingen, de door uitwendige en de door inwendige oorzaken veroorzaakte, bij de ranken vertegenwoordigd zijn, en in hoofdzaken geheel op dezelfde wijze tot stand komen.

Ik heb getracht, omtrent de juistheid van dit vermoeden langs experimenteelen weg zekerheid te verkrijgen. Daarbij heb ik mij bijna uitsluitend bepaald tot de beantwoording der vraag naar het aandeel van turgoruitrekking en groei aan de groeikrommingen. Deze vraag toch kon, volgens de plasmolytische methode, met volkomen zekerheid beantwoord worden. Zij vormt de basis van mijne geheele onderzoeking: het punt waarom, om zoo te zeggen, alles draait. Op dit punt heerscht tegenwoordig de meeste onzekerheid en het grootste verschil in gevoelen tusschen de verschillende onderzoekers. Zijn deze onzekerheid en deze oneenigheid eenmaal verdreven door een experimenteel bewijs, en is daardoor de innige verwantschap van al deze verschijnselen onderling duidelijk gebleken, dan zal men ook wel geen bezwaar hebben tegen de meening, dat ook op de overige punten dezelfde overeenkomst tusschen alle groeikrommingen van veelcellige organen bestaat, en dat het dus geoorloofd is, de voor Sicyos gewonnen resultaten op de groei-

krommingen van veelcellige organen in het algemeen toe te passen.

Aan het slot zal ik enkele injectieproeven met geotropisch gekromde organen vermelden. Ik heb deze volledigheidshalve gedaan, en ook om een oordeel daarover te hebben, of de versterking der beweging in deze gevallen even aanzienlijk zou zijn als bij de ranken van Sicyos. Daar dit op verre na niet het geval was, waren de resultaten niet zoo sprekend, dat zij mij aanspoorden tot een herhaling der injectieproeven met organen, die zich tengevolge van andere oorzaken kromden.

Omtrent de vraag, of bij de groeikrommingen van andere organen de turgorkracht van het parenchym, of wel de rekbaarheid van vaatbundels, hypoderm en epidermis toeneemt, heb ik geen proeven genomen. Ik heb reeds bij gelegenheid mijner kritiek van HOFMEISTER's beschouwingswijze (pag. 7) aangetoond, dat een isoleering van het merg van de peripherische lagen deze vraag niet kan beslissen; alles leidt er toe om aan te nemen dat, wanneer een toeneming van de turgorkracht van het parenchym de krommingen veroorzaakt, deze toeneming niet in het centrale, maar in het peripherische gedeelte zal plaats vinden. Eene verwijdering van opperhuid, hypoderm en vaatbundels, zonder beschadiging van het schorsparenchym, is bij verreweg de meeste stengelorganen eenvoudig onuitvoerbaar; mij stonden geene voorwerpen ten dienste, welke ik met succes aan deze operatie had kunnen onderwerpen *).

Maar tal van gronden maken het meer dan waarschijnlijk, dat ook hier de uitkomsten van het onderzoek, als het mogelijk was, slechts de met Sicyos verkregen resultaten zouden bevestigen. Een aantal dezer argumenten heb ik reeds in de inleiding tot het V^e hoofdstuk uiteengezet. Thans wijs ik er op, dat bij de geotropische en heliotropische krommingen van wortels reeds uit den anatomischen bouw ten duidelijkste blijkt, dat de vaatbundels slechts een passieve rol spelen en dat het peripherisch parenchym daarentegen door actieve werkzaamheid de kromming veroorzaakt.

*) Wellicht zal men bij eenig zoeken onder bilaterale organen, bijv. bladstelen, geschikte voorwerpen voor deze proef vinden.

De methode, die ik bij de in dit hoofdstuk te beschrijven proeven gevolgd ben, bestaat in het algemeen in een combinatie van de reeds vroeger door mij voor het onderzoek van groeikrommingen gebruikte methode *), met de plasmolytische. Daar de meting van den graad van kromming en van de verandering daarvan door de plasmoyse in de meeste gevallen op dezelfde wijze geschiedde, wil ik deze, om herhalingen te vermijden, vooraf beschrijven.

De bepaling van den graad van kromming geschiedde door middel van den cyclometer †), een papier, waarop een aantal concentrische kringen met stralen van bekende grootte getrokken zijn. De stralen waren 1, 2, 3 enz. cM. lang; de langste 25 cM. Het gekromde voorwerp wordt op dit papier zoolang verschoven, tot zijn kromming met een der cirkels samenvalt; men kent dan zijn krommingsradius. Daarna wordt het voorwerp in een vlak schaaltje met de zoutoplossing gebracht; deze was steeds 20 pCt. chloornatrium. Het vocht staat meestal slechts 1 cM. hoog in het schaaltje, de gekromde voorwerpen liggen er dus van zelf ongeveer horizontaal in. Om nu na eenige uren de kromming in plasmolytischen toestand te bepalen, wordt het schaaltje op den cyclometer gezet en het voorwerp daarin verschoven, tot het, horizontaal liggende, met een der cirkels samenvalt; men leest dan den krommingsradius weer af. Wegens de buigzaamheid der plasmolytische takken, is het beter ze in de zoutoplossing te onderzoeken, dan ze er uit te nemen; dezelfde omstandigheid maakt ook dat alle toevallige mechanische kromming zeer voorzichtig vermeden moet worden.

De beschreven uiterst eenvoudige methode bleek ook voor dit doel volkomen voldoende te zijn; de resultaten zijn in verreweg de meeste gevallen verre boven allen twijfel verheven. Een nauwkeuriger methode heeft, bij de dikwijls onregelmatige krommingen, weinig kans van doelmatig te zijn; ook zouden daarbij storende invloeden, welke bij mijne methode slechts weinig in het gewicht vallen, allicht de grootere nauwkeurig-

*) Zie mijn opstel: „Ueber einige Ursachen der Richtung bilateralsymmetrischer Pflanzentheile," in *Arb. d. Bot. Inst.* in Würzburg, Heft II, p. 228.

†) l. c. p. 247.

heid geheel denkbeeldig maken. Onder deze storende invloeden noem ik o. a. deze, dat dikkere organen, die den turgor slechts langzaam verliezen, daarbij soms een langzaam schommelende beweging maken, vóór ze, geheel plasmolytisch, een constante kromming aannemen. De oorzaak van dit verschijnsel is mij onbekend.

In de tabellen vindt men dus, als maat der kromming, steeds de krommingsradiën in cM. opgegeven; hoe grooter de krommingsradius, des te zwakker is natuurlijk de kromming.

Ik ga thans over tot de beschrijving der proeven.

I. *Geotropische kromming van groeiende stengels.*

Jonge, volkomen rechte, bloemstelen met nog niet geopende knoppen of inflorescentiën, werden in den tuin afgesneden, terstond onder water gedompeld en zoo naar het laboratorium gebracht. Hier werden de knoppen er afgesneden en eveneens de ondereinden, zoodat de stukken een lengte van 10—20 cM. behielden. Deze werden nu in een zinken bak horizontaal gesteld, door ze met het ondereinde in een schuinen wal van nat zand te steken. De bak werd dan gesloten om de omgeving der plantendeelen donker en vochtig te houden. Na eenigen tijd werden de voorwerpen onderzocht, en telkens die, welke zich het snelst gekromd hadden, voor de proef bestemd.

In de volgende tabel vat ik de resultaten van eenige, op verschillende dagen genomen, proeven samen; groote vergelijkbaarheid der verschillende exemplaren derzelfde soort lag niet in mijn doel. De tabel bevat 1^{0}. opgave van den tijd, gedurende welken de bloemstelen in de horizontale stelling aan den invloed der zwaartekracht waren blootgesteld, in uren en minuten; 2^{0}. de krommingsradiën na afloop van dien tijd, en die na een verblijf van 20 uur in de zoutoplossing; 3^{0}. het verschil tusschen deze beiden. De temperatuur bedroeg 21—22^{0} C.

Van de 7 eerste soorten gebruikte ik jonge bloemstelen, van Phaseolus multiflorus den jongen stengel van kiemplanten.

		Duur der geotropische kromming, in uren.	Krommingsradius in turgescenten toestand.	Krommingsradius in plasmolytischen toestand.	Diff.
Plantago lanceolata	I	1.36	10	22	12
	II	1.36	9	12	3
	III	24	3	3	0
	IV	24	3	3	0
Papaver Rhoeas *)	I	1.36	4	7	3
	II	1.36	4	12	8
	III	3.25	4	8	4
	IV	3.25	2	3	1
	V	24	1	1	0
	VI	24	1	1	0
Agrostemma Githago.	I	1.36	7	15	8
	II	1.36	9	17	8
	III	3.25	5	8	3
	IV	5.05	4	4 1/2	1/2
	V	5.05	5	6	1
	VI	24	2	3	1
	VII	24	2	3	1
Knautia orientalis.	I	1.36	3	4	1
	II	5.05	1	1 1/2	1/2
	III	5.05	2	3	1
	IV	24	1	1	0
Tropaeolum majus	I	1.36	6	7	1
	II	1.36	4	5	1
	III	5.05	2 1/2	3	1/2
	IV	24	3	3	0
	V	24	2	2	0
Silaus pratensis.	I	1.36	15	20	5
	II	2.50	12	15	3
	III	5.05	5	9	4
	IV	5.05	6	20	14
	V	24	5	6	1
Cephalaria leucantha	I	5.05	5	7	2
	II	5.05	7	12	5
Phaseolus multiflorus, kiemplant	I	45 min.	2 1/2	3	1/2
	II	3	3 1/2	4	1/2

*) Het nutatievlak werd horizontaal gelegd; de nutatiekromming verdween tijdens de proef geheel.

Uit deze tabel blijkt:

1. Geotropisch gekromde stengels verliezen, als zij tijdens de kromming geplasmolyseerd worden, een deel der kromming.

2. Heeft de geotropische kromming 24 uur geduurd, dan verandert bij vele exemplaren de plasmolyse den graad van kromming niet meer.

Hieruit volgt:

3. Bij de geotropische kromming nemen aanvankelijk zoowel de turgoruitrekking als de groei aan de convex wordende zijde toe; later verdwijnt het verschil der beide zijden in turgoruitrekking en wordt de geheele kromming door groei gefixeerd.

Of ook:

4. De geotropische krommingen worden door een versterkte turgoruitrekking aan de onderzijde veroorzaakt, die harerzijds op den lengtegroei dier zijde versnellend inwerkt.

Vergelijkt men de gevonden resultaten met de bij de ranken waargenomen verschijnselen, zoo ziet men in hoofdzaak een volkomen overeenkomst. Maar tevens loopt het in het oog, hoe spoedig hier de elastische turgoruitrekking blijvende veranderingen (groei) ten gevolge heeft. Aan deze omstandigheid is het ook toe te schrijven, dat het mij niet gelukt is, in enkele gevallen de ontstane kromming door plasmolyse geheel te doen verdwijnen.

II. *Geotropische kromming van stengelgewrichten.*

Voor deze proef werden steeds jonge gewrichten gekozen, daar deze zich veel sneller geotropisch krommen dan andere. De stengel werd aan beide zijden op een afstand van 3— 5 cM. van den knoop afgesneden, en het zoo geïsoleerde stuk in denzelfden zinken bak en op dezelfde wijze horizontaal gesteld als in de vorige proef. Na de kromming werden de hoeken op papier geteekend; na de plasmolyse werden de stengelstukken uit het zout genomen en op een glasplaat liggende op hetzelfde papier geteekend. Na afloop der proef werden beide hoeken met een graadboog opgemeten; in de tabellen is steeds het supplement der hoeken d. i. dus de door het zich verheffende stengeldeel doorloopen boog, opgegeven.

De stengelgewrichten liggen bij Galeopsis onder, bij Polygonum en de granen boven den knoop.

Gewrichten van:		Duur der geotropische kromming.	Vóór de plasmolyse.	Na de plasmolyse.	Diff.
Avena sativa.	I	23.	30⁰	22⁰	8⁰
	II	〃	27⁰	18⁰	9⁰
	III	〃	26⁰	20⁰	6⁰
Lolium perenne	I	〃	36⁰	27⁰	9⁰
	II	〃	40⁰	34⁰	6⁰
	III	〃	30⁰	26⁰	4⁰
Polygonum nodosum .	I	3.30	40⁰	25⁰	15⁰
	II	〃	15⁰	10⁰	5⁰
	III	〃	30⁰	20⁰	10⁰
	IV	〃	22⁰	0⁰	22⁰
Galeopsis Tetrahit. . .	I	25	47⁰	42⁰	5⁰
	II	〃	34⁰	30⁰	4⁰
	III	〃	42⁰	37⁰	5⁰

Deze tabel leert ons, dat de nog niet voltooide geotropische kromming der stengelgewrichten ten deele op turgoruitrekking, ten deele op groei berust, in een enkel geval zelfs geheel op turgoruitrekking. Gewrichten, die reeds vóór langeren tijd zich gekromd hadden, heb ik niet onderzocht.

III. *Heliotropische kromming van stengeldeelen.*

Voor deze proeven werden deels jonge bloemstelen, deels kiemplanten gebruikt. Zij stonden in een kast, die van binnen zwart geverfd en van voren met glas gesloten was; de glasplaat reikte niet hooger dan de plantendeelen. Door een horizontalen of een weinig hellenden spiegel werd het licht, meest zonlicht, in schuins omhoog gaande richting op de plantendeelen geworpen. De bloemstelen waren afgesneden en in nat zand rechtop geplaatst; de kiemplanten stonden in een pot, en werden eerst na de heliotropische kromming afgesneden. De tabel is geheel op dezelfde wijze ingericht als in proef I.

Soorten.	Duur der heliotropische kromming.	Krommingsradius in turgescenten toestand.	Krommingsradius in plasmolytischen toestand.	Diff.
Sanguisorba officinalis, bloemsteel I	$2^1/_4$ uur	6	7	1
II	4 〃	5	6	1
Knautia orientalis, bloemsteel .	$3^1/_4$ 〃	6	12	6
Silaus pratensis, bloemsteel. .	4 〃	5	8	3
Pisum sativum, half geëtioleerde kiemplant	2 〃	2	3	1
Brassica Napus, hypocotyle internodiën van kiemplanten. I	2 〃	$2^1/_2$	3	$^1/_2$
II	2 〃	2	3	1

Heliotropische krommingen berusten dus, zoolang zij nog niet voltooid zijn, ten deele op turgoruitrekking, ten deele op groei.

IV. *Nutatie en slingeren.*

Nuteerende toppen van slingerplanten, deels uit den tuin, deels van kamerplanten, werden geplasmolyseerd; zij verloren daarbij een deel van hunne kromming, gelijk uit de volgende tabel blijkt. De krommingsradiën bedroegen in cM. bij

		Vóór de plasmolyse.	Daarna.
Phaseolus multiflorus	I	2	4
	II	2	5
	III	7	20
Humulus Lupulus		$1^1/_2$	2.

Slingerende toppen werden eveneens, deels met, deels zonder het steunsel in zoutoplossingen gebracht. Van Phaseolus multiflorus strekten daarbij twee toppen de jongste winding bijna geheel recht, de oudere deelen behielden hunne winding. Evenzoo strekte zich van twee exemplaren van Polygonum Convolvulus en een van Humulus Lupulus de top min of meer recht.

Slingerende toppen van Ipomoea purpurea en Dioscorea Batatas verminderden bij plasmolyse hun kromming.

Zoowel de nuteerende, alsook de slingerende beweging berust dus ten deele op turgoruitrekking.

V. *Epinastische kromming van bladstelen.*

Bladstelen en middennerven, van de bladschijf beroofd, werden als in proef I beschreven is, in een zinken bak horizontaal gesteld, en wel zoo, dat het mediaanvlak horizontaal lag. Ze waren oorspronkelijk recht, en kromden zich in korten tijd sterk epinastisch, zonder nog geotropische beweging te toonen.

Daarop werden zij geplasmolyseerd. De metingen, op dezelfde wijze in tabel gebracht als in proef I, gaven de volgende resultaten :

		Duur der epinastische kromming.	Krommingsradius	
			in turgescenten toestand.	in plasmolytischen toestand.
Malva sylvestris, bladsteel . . .	I	1^{u}·05	2	∞
	II	〃	1	∞
	III	〃	3	∞
	IV	2. 10	2	∞
	V	〃	3	8
	VI	4. 30	3	7
Cannabis sativa, bladsteel		0. 55	3	4
Nicotiana Tabacum, middennerf . .		4. 30	2	∞
〃 rustica 〃 . . .		〃	6	7
Helianthus tuberosus 〃 . . .		2. 30	4	10
Xanthium echinatum 〃 . . .		4. 30	5	∞

Het teeken ∞ beduidt, dat de voorwerpen weer ongeveer recht geworden waren.

De epinastische krommingen, in den korten tijd van enkele uren verkregen, gaan dus bij plasmolyse geheel of ten deele verloren, en berusten dus geheel of tendeele op turgoruitrekking.

Verder heb ik de bladstelen van Leonurus Cardiaca onderzocht. De bladen zijn tegenovergesteld, en de kleine bladstelen behouden in hun onderste gedeelte, dicht bij de plaats van vasthechting aan den stengel, het vermogen om zich te krommen eenigen tijd, nadat het overige deel van den bladsteel dit verloren heeft. Knipt men uit een stengel een internodium met den daarboven liggenden knoop en zijn twee bladstelen, snijdt men dan de bladschijven af, en steekt het voorwerp zóó in den zandwal van den voor proef I gebruikten zinken bak, dat het vlak der beide bladstelen horizontaal ligt, dan ziet men in zeer korten tijd den hoek, dien de beide bladstelen met elkander maken, grooter worden.

Dit is klaarblijkelijk een gevolg daarvan, dat, na opheffing van den invloed der geotropie, de bovenkant zich sneller gaat verlengen dan de onderkant. Deze epinastische beweging vindt echter uitsluitend in de basis der bladstelen plaats, het overige blijft recht.

Vier zulke voorwerpen, die zich in één uur zeer sterk epinastisch bewogen hadden, werden daarop geplasmolyseerd. Daarbij werden de hoeken der bladstelen kleiner, en wel

bij	N°.	I	van	100°	tot	70°
"	"	II	"	90°	"	60°
"	"	III	"	90°	"	50°
"	"	IV	"	80°	"	55°

Een zeer belangrijk gedeelte der epinastische beweging berustte dus op turgoruitrekking.

IV. *Injectie van geotropisch gekromde bloemstelen.*

Om te zien of de geotropische kromming door injectie met water versterkt wordt, werden bloemstelen op dezelfde wijze in een zinken bak horizontaal geplaatst als bij proef I beschreven is. In plaats van daarna in een sterke zoutoplossing gebracht

te worden, werden ze onder de luchtpomp met water geïnjicieerd, en bleven daarna in vlakke schaaltjes met water.

De vergelijking van de kromming vóór en na de injectie toonde in de meeste gevallen een duidelijke versnelling der beweging aan, zoo b.v. bij jonge bloemstelen van Plantago lanceolata, Agrostemma Githago, Knautia orientalis, e. a.; in andere gevallen was de toeneming der kromming niet zoo aanzienlijk, dat zij met zekerheid van de gewone nawerking kon onderscheiden worden. Het kwam mij voor, dat de gevolgen der injectie, alhoewel hier niet zoo gemakkelijk waar te nemen als bij de ranken, in vele opzichten een nader onderzoek waard waren, en dat van zulk een onderzoek wellicht resultaten mogen verwacht worden, die tot opheldering van belangrijke vragen over de oorzaken der groeikrommingen kunnen bijdragen.

Algemeene conclusiën.

1. In eenige gevallen gelukte het mij aan te toonen, dat de krommingsbeweging aanvankelijk uitsluitend op eenzijdige toeneming der turgoruitrekking berust (epinastische kromming van bladstelen en bladmiddelnerven, geotropie der knoopen van Polygonum).

2. In eenige andere gevallen bleek de kromming ten slotte uitsluitend op groei te berusten (geotropie van stengels).

3. In verreweg de meeste gevallen onderzocht ik voorwerpen, wier kromming reeds eenigen tijd geduurd had, maar nog niet voltooid was: het bleek dat hierbij de kromming steeds ten deele op turgoruitrekking en ten deele op groei berust, onverschillig welke de oorzaak der beweging was.

In alle onderzochte punten bestaat dus een volkomen overeenkomst tusschen al deze verschijnselen en de bewegingen der ranken van Sicyos. Dit geeft ons het recht om aan te nemen, dat ook in de overige essentieele opzichten zulk een overeenkomst bestaat.

IX. *Overzicht der resultaten.*

Mijne onderzoekingen hadden voornamelijk ten doel, het antwoord op de in den aanvang gestelde vraag te geven, *welk het aandeel van turgor en groei aan de groeikrommingen van veelcellige organen is.* Deze voor de leer van den groei in het algemeen zoo belangrijke vraag had men tot nu toe steeds slechts naar analogie trachten te beantwoorden. Mijne proeven geven op haar ten antwoord:

De oorzaak van groeikrommingen ligt in een vergrooting van de turgorkracht in de cellen der later convex wordende zijde.

Deze vergrooting van de turgorkracht heeft natuurlijk ten gevolge, dat de cellen dezer zijde meer water opnemen, zich dus sterker vergrooten. Hiermede begint de kromming.

De vergrooting der cellen heeft een uitrekking der celwanden tengevolge, en deze versnelt den lengtegroei. Hierdoor wordt de ontstane kromming als het ware gefixeerd.

Uit dit antwoord blijkt, dat de groeikrommingen zich op een zeer eenvoudige wijze aansluiten aan de door SACHS opgestelde theorie van den groei, want, is eenmaal de toeneming der turgorkracht als oorzaak der krommingen bekend, dan laat zich de verdere toedracht zonder moeite uit deze theorie afleiden.

De medegedeelde proeven veroorloven ons echter nog dieper in het mechanisme der groeikrommingen in te dringen, en nog nader het verband tusschen deze verschijnselen en den lengtegroei zelven te leeren kennen. Het is hiertoe noodig, de turgorkracht zelve nader te beschouwen.

De turgorkracht is de wateraantrekkende kracht van de in het celvocht opgeloste stoffen, zooals deze zich door het levend protoplasma heen op de omgeving kan doen gelden. Het levend protoplasma laat het water gemakkelijk door zich heen gaan, de in het celvocht opgeloste stoffen echter niet of zeer moeilijk. Het gevolg hiervan is, dat levende cellen wel water uit hare omgeving opzuigen, maar daarvoor geen andere stoffen afgeven, tenminste niet in merkbare hoeveelheid.

Het is duidelijk dat de grootte der turgorkracht, bij gegeven eigenschappen van het protoplasma en den celwand, voornamelijk van den aard en de hoeveelheid der in het celvocht opge-

loste stoffen zal afhangen. Elke verandering van de hoeveelheid dezer stoffen, en vooral van diegene onder haar, die de grootste aantrekkingskracht voor water hebben, zal natuurlijk de turgorkracht veranderen.

De grootte der turgorkracht hangt echter niet eenvoudig van de absolute hoeveelheid dezer osmotisch werkzame stoffen af, maar van den concentratiegraad, waarin zij in het celvocht voorkomen. Wanneer dus de turgorkracht werkzaam is, en door wateropneming de cel vergroot, zal zij daarbij noodzakelijkerwijze zich zelve kleiner maken. Omgekeerd zal elk verlies van water, dat de cel ondergaat, de turgorkracht vergrooten.

De turgorkracht hangt dus, onder de gegeven omstandigheden, af:

1. van de hoeveelheid en den aard der osmotisch werkzame stoffen.

2. van het watergehalte der cellen.

Bij den groei, en eveneens bij de groeikrommingen, neemt het volumen der cellen onder wateropneming steeds toe; ten gevolge daarvan zou dus de turgorkracht steeds af moeten nemen. Waar dit nu niet geschiedt, kan de oorzaak alleen in een vermeerdering van de hoeveelheid der osmotisch werkzame stoffen in het celvocht liggen.

Deze conclusie volgt, gelijk men ziet, met noodzakelijkheid uit mijne beschouwingswijze van den turgor *). Beschouwen wij thans de in de vorige hoofdstukken beschreven feiten van dit standpunt uit. Ik kies daartoe enkele gevallen als voorbeelden uit.

I. *Werking van den prikkel op ranken.* Ik kies hiertoe de rank van Sicyos, op pag. 133 in proef XII als N^{0}. 4 beschreven is. Deze rank was recht, en boog zich om een steunsel tot $^{1}/_{2}$ winding. Het gekromde deel was 5 mM. lang, daaronder en daarboven was de rank recht gebleven. Toen werd zij geïnjicieerd en rolde zich in twintig minuten tot $7^{1}/_{4}$ enge windingen op; daarbij werden de vóór de injectie rechte deelen der rank gekromd, en wel des te sterker naarmate zij dichter bij het punt lagen, waar het steunsel de rank aanraakte.

*) *Archiv. Néerl.* 1871 VI, p. 117.

Gaan wij de verandering na, die de prikkel in de beide rechtgebleven deelen naast het gekromde deel teweeg gebracht had. Het gevolg van deze verandering was het vermogen zich bij injectie met water tot enge windingen op te rollen, dus het vermogen van het parenchym om zich in dat geval zeer sterk uit te zetten, in een woord, blijkens onze vroegere uiteenzettingen, een toeneming van de turgorkracht van het parenchym. Daar nu de rechtblijvende deelen onder den invloed van den prikkel geen uitwendig zichtbare verandering ondergaan, is het duidelijk dat deze toeneming der turgorkracht niet op een vermindering van het watergehalte, maar alleen op een toeneming van de hoeveelheid der osmotisch werkzame stoffen kan berusten. De werking van den prikkel op de beide rechtblijvende deelen naast het gekromde deel, bestaat dus daarin, dat de hoeveelheid der osmotisch werkzame stoffen in het parenchym toeneemt, d. i. dus, dat een nieuwe hoeveelheid van die stoffen geproduceerd wordt.

Het is duidelijk, dat de prikkel dezelfde werking ook op dat deel uitoefent, dat rechtstreeks met het steunsel in aanraking is. Verder leert het resultaat der injectie, dat de werking van den prikkel op zekeren afstand van het steunsel geringer wordt en eindelijk ophoudt. Wij mogen dus met zekerheid besluiten:

De prikkel veroorzaakt een productie van osmotisch werkzame inhoudsstoffen in de cellen van het parenchym.

Deze productie is des te aanzienlijker, naarmate de cellen minder ver van de aangeraakte plaats verwijderd zijn.

Het is duidelijk dat ook voor de overige gevallen deze conclusie geldig is.

II. *Het begin der epinastische oprolling.* De in proef VII blz. 130 beschreven rank had $1^1/_2$ epinastische winding gemaakt, zij werd toen geïnjicieerd. Het reeds gekromde deel kromde zich daardoor zooveel sterker, dat het na 7 minuten $2^1/_2$ winding vormde.

In een rechte rank veroorzaakt injectie met water geen kromming.

Tijdens het begin der epinastische beweging waren dus de cellen van het parenchym van het zich krommende deel grooter geworden; tegelijkertijd was haar turgorkracht toegenomen. Er

was dus tijdens deze beweging een zekere hoeveelheid osmotisch werkzame stoffen gevormd, waarvan, om het zoo eens uit te drukken, een deel door wateropneming de kromming had veroorzaakt; terwijl een ander deel nog inactief was, en eerst door de injectie als actieve turgorkracht optrad.

De oorzaak van het begin der epinastische beweging bestaat dus in een afzondering van osmotisch werkzame stoffen in het parenchym.

III. *Oorzaak der epinastische krommingen.* Rechte ranken krommen zich door injectie met water niet. Daaruit blijkt dat de toevoer van water door de weefsels der rank in dezen tijd groot genoeg is om de turgorkracht geheel actief te maken. Ranken, die zich geheel en al opgerold hebben, en opgehouden hebben zich te bewegen, veranderen hare kromming bij injectie met water evenmin. Ook bij haar is de turgorkracht geheel actief. In beide toestanden verkeeren de ranken ten opzichte der epinastische bewegingen in rust. Tijdens de epinastische strekking van jonge ranken en de oprolling van oudere ranken, heeft injectie met water steeds een versnelling der beweging ten gevolge. Een gedeelte der turgorkracht is dan dus inactief.

Hieruit volgt nu rechtstreeks, overeenkomstig de uiteengezette beschouwingen, *dat, tijdens de epinastische bewegingen, voortdurend osmotisch werkzame stoffen in het parenchym worden afgezonderd,* dat de hoeveelheid dezer stoffen voortdurend toeneemt. Want alleen hierdoor kan steeds een gedeelte inactief gehouden worden; hield de productie op, dan zou spoedig door den normalen toevoer van water alle turgorkracht actief worden.

Niettegenstaande deze voortdurende productie van osmotisch werkzame stoffen, behoeft de turgorkracht tijdens de epinastische krommingen niet toe te nemen. Dit wordt duidelijk, als men bedenkt, dat de concentratie der osmotisch werkzame stoffen, door de voortdurende opneming van water, steeds verminderd wordt.

IV. *Lengtegroei der ranken.* Onafhankelijk van de besproken bewegingen, groeien de ranken ook in haar geheel in de lengte, zoowel tijdens de epinastische strekking, als daarna, wanneer zij recht zijn. Het is echter duidelijk, dat deze groei in het algemeen op dezelfde oorzaken moet berusten als de groeikrommin-

gen. Ook hier mogen wij dus aannemen, dat voortdurend osmotisch werkzame stoffen in het parenchym worden afgezonderd, die de vergrooting van dit weefsel door wateropneming, en zoodoende den groei der rank, veroorzaken. Of daarbij de turgorkracht op den duur toe- of afneemt, is voor onze beschouwingen voorloopig onverschillig.

De conclusie uit de medegedeelde redeneeringen ligt thans voor de hand:

De oorzaak van den groei, van de epinastische en van de prikkelbewegingen, is gelegen in de productie van osmotisch werkzame stoffen in het parenchym.

En hieruit volgt dan als van zelf, dat de prikkel niets anders doet, dan het proces van afzondering dezer stoffen, dat in de niet geprikkelde rank langzaam voortgaat, plotseling te versnellen. Deze versnelling is, blijkens alle medegedeelde feiten, slechts van voorbijgaanden aard, eveneens is zij plaatselijk beperkt. Wij kunnen dus zeggen:

Door den prikkel wordt het proces van afzondering van osmotisch werkzame stoffen, dat de oorzaak van den groei is, tijdelijk en plaatselijk versneld.

Passen wij thans, hetgeen wij zoo even voor de ranken van Sicyos gevonden hebben, op den groei en de groeikrommingen van andere plantendeelen toe. De overeenkomst tusschen al deze verschijnselen is ons in de beide vorige hoofdstukken gebleken een zeer groote te zijn, zoo groot, dat er geen reden bestaat om niet voor allen dezelfde verklaring waarschijnlijk te achten.

De krommingen van groeiende plantendeelen, hetzij zij door uitwendige of door inwendige oorzaken worden te voorschijn geroepen, worden door eene vergrooting van de turgorkracht aan de eene zijde van het plantendeel veroorzaakt. Deze vergrooting van de turgorkracht kan natuurlijk slechts door de vorming van een zekere hoeveelheid osmotisch werkzame stoffen tot stand komen.

In jeugdige, snelgroeiende stengelorganen is de grootte van de turgorkracht volgens mijne waarnemingen slechts aan geringe veranderingen onderhevig *). Hieruit volgt, daar het volu-

*) *Untersuchungen über die mechanischen Ursachen der Zellstreckung* 1877, p. 120.

men der cellen gedurende den groei voortdurend toeneemt, dat er voortdurend productie van osmotisch werkzame stoffen moet plaats vinden om de osmotische kracht van het celvocht steeds ongeveer op dezelfde hoogte te houden.

Bij geotropische, heliotropische en andere groeikrommingen wordt dus, evenals bij de prikkelbewegingen der ranken, een proces, dat anders langzaam en gelijkmatig verloopt, tijdelijk aan de eene zijde van het plantendeel versneld, of wel:

De zwaartekracht en het licht veroorzaken, evenals andere prikkels, daardoor krommingen van groeiende veelcellige plantendeelen, dat zij de productie van osmotisch werkzame stoffen in de cellen, waardoor de lengtegroei veroorzaakt wordt, tijdelijk aan de eene zijde van het plantendeel versnellen.

Tot nu toe heb ik de in het celvocht voorkomende, opgeloste stoffen in het algemeen als osmotisch werkzaam beschouwd, zonder in nadere beschouwingen omtrent de natuur dezer stoffen te treden, en zonder te vragen, of wellicht bepaalde stoffen daarbij een belangrijker rol spelen dan andere. Bij het groote belang, dat deze stoffen krachtens de medegedeelde redeneeringen voor de mechanische theorie van den groei blijken te bezitten, is het wenschelijk ook op deze vraag een antwoord te vinden.

De onderzoekingen over de oorzaken van de bewegingen der ranken van Sicyos, veroorloven mij in dit opzicht een stap verder te gaan dan vroeger.

De waarneming, dat oplossingen van sommige anorganische zouten met veel grooter kracht water aan levende cellen onttrekken kunnen dan suikeroplossingen van gelijke concentratie, en andere daarmede samenhangende feiten, deden mij vroeger de meening huldigen, dat het voornamelijk zulke zouten of andere, met hen in deze eigenschap overeenkomende stoffen zijn, die de voornaamste rol bij den turgor spelen *). Suiker, eiwit, gom en dergelijke stoffen konden daaraan toch slechts een ondergeschikt aandeel nemen.

In het celvocht van de parenchymcellen van groeiende plantendeelen komen, behalve suiker en anorganische zouten, algemeen ook nog de plantenzuren voor, en deze komen met de

*) *Archiv Néerl.* VI, 1871, p. 117 en *Zellstreckung* 1877, p. 34.

bedoelde anorganische zouten juist in de bedoelde eigenschap, namelijk in hunne zeer groote aantrekkingskracht voor water, overeen. Van de aanwezigheid van een vrij zuur (of van zure zouten) in het parenchym van de ranken van Sicyos, kan men zich zeer gemakkelijk overtuigen, als men overlangs doorgesneden stukken, na verwijdering van het niet merkbaar zure vocht dat uit de vaatbundels komt, op blauw lakmoes-papier sterk drukt. De parenchymcellen worden dan gekneusd, en een roode indruk van het voorwerp is op het papier zichtbaar. Geen andere opgeloste inhoudsstoffen dan suikersoorten, anorganische zouten en organische zuren en zouten komen in parenchymcellen van groeiende plantendeelen zoo algemeen voor, dat zij hier in aanmerking zoude kunnen komen.

Vestigen wij thans onze aandacht op de snelle bewegingen, die ranken van Sicyos na prikkeling maken, of op de zeer aanzienlijke versnelling, die deze bewegingen na injectie der rank met water vertoonen. Welke stoffen kunnen in zoo korten tijd in voldoende hoeveelheid geproduceerd worden, om dit verschijnsel te verklaren? Natuurlijk de suiker niet. Evenmin de anorganische zouten, die slechts uiterst langzaam van buiten in de cellen diffundeeren. Er blijven dus alleen de plantenzuren *) over, en een plotselinge productie van deze in levende cellen kan uit geen enkel oogpunt als onwaarschijnlijk beschouwd worden. Men mag dus, met zekeren graad van waarschijnlijkheid, het vermoeden uitspreken, dat de osmotisch werkzame stoffen, die tengevolge van prikkeling in het parenchym der ranken van Sicyos afgezonderd worden, plantenzuren zijn.

Daar nu echter, volgens hetgeen wij hierboven zagen, de werking van de prikkels eenvoudig in de tijdelijke versnelling van een proces bestaat, dat anders langzaam verloopt, en de voor den groei benoodigde krachten levert, zoo leidt het uitgesproken vermoeden noodzakelijk tot een tweede vermoeden, dat namelijk de osmotisch werkzame stoffen, door welker voortdurende afzondering in de cellen de geheele groei der ranken veroorzaakt wordt, eveneens hoofdzakelijk, zoo niet uitsluitend, plantenzuren zijn.

---

*) Om herhalingen te vermijden, versta ik onder plantenzuren zoowel de zure organisch-zure zouten, als de vrije organische zuren.

Men zal nu reeds inzien, dat wij deze redeneeringen met hetzelfde recht op de geotropische en heliotropische groeikrommingen, ja op de verschijnselen van groei in het algemeen, kunnen toepassen. En wanneer de turgor in groeiende deelen op de zuren berust, zullen deze in den volwassen toestand, zoolang zij voorhanden zijn, nog wel dezelfde rol spelen.

Deze beschouwingen wettigen naar mijne meening het vermoeden, dat onder de osmotisch werkzame stoffen, die in plantencellen den turgor veroorzaken, de plantenzuren de voornaamste rol spelen, en dat de eenzijdige versnelling van den groei door uitwendige krachten op een versnelling van het proces van afzondering van deze plantenzuren berust *).

Ik erken, dat ik aan dit vermoeden waarde hecht, eensdeels om de reeds besproken redenen, maar anderdeels ook, omdat het een licht werpt op de beteekenis van het algemeene voorkomen van organische zuren in de planten, waaromtrent men tot heden toe, afgezien van een oude en reeds geheel weerlegde hypothese, niet de allerminste voorstelling had.

Het is mijn voornemen, de juistheid mijner hypothese zoodra mogelijk aan proeven te toetsen, en te trachten omtrent de beteekenis der organische zuren in het algemeen experimenteele zekerheid te erlangen.

Ten slotte wil ik nog enkele verschijnselen bespreken, welke bij de krommingen van groeiende veelcellige organen werden opgemerkt, en voor welke men tot heden toe te vergeefs naar eene voldoende verklaring gezocht heeft. Van eenige daaronder ligt die verklaring thans voor de hand; voor andere kan ten minste de weg aangegeven worden, langs welken men tot een verklaring geraken kan.

1. *Nawerking van groeikrommingen.*

Sachs plaatste jeugdige takken, nadat zij korten tijd horizontaal gelegen hadden, en aangevangen hadden zich geotropisch opwaarts te krommen, rechtop, of wel zóó, dat het krommings-

*) Zie mijne voorloopige mededeeling: *Ueber die Bedeutung der Pflanzensäuren für den Turgor der Zellen* in Bot. Zeitung, 1879, N°. 52.

vlak horizontaal lag. In beide gevallen was de richting van den tak ten opzichte der zwaartekracht veranderd, toch ging de geotropische kromming in het oorspronkelijke krommingsvlak nog een tijd. lang voort *). Een analoog verschijnsel nam ik bij ranken waar: als deze aangevangen hebben zich om een steunsel te krommen, en men neemt dan het steunsel weg, gaat de beweging toch nog eenigen tijd voort †).

De verklaring dezer empirische feiten is zeer eenvoudig. De zwaartekracht en de prikkel versnellen de afzondering van osmotisch werkzame stoffen in de parenchymcellen der convex wordende kant; daardoor trekken deze cellen water aan en vergrooten zich. Maar de toevoer van water geschiedt langzaam, en een tijd lang is de wateraantrekkende kracht, gelijk ook uit onze injectieproeven blijkt, onverzadigd. Al houdt dus, na het omleggen der geotropische takken of het wegnemen van het steunsel der ranken, de productie dier stoffen terstond op, toch zullen de cellen nog een tijd lang voortgaan water op te zuigen en zich te vergrooten. De kromming zal dus natuurlijk nog een tijdlang voortduren, na het ophouden van de werking van den prikkel.

2. *Kromming zonder wateropneming.*

Sachs nam waar dat groeiende stengeldeelen, van de volwassen deelen en alle aanhangsels afgesneden, in een vochtige ruimte horizontaal geplaatst, en zóó bevestigd dat ze geen water konden opnemen, zich toch geotropisch opwaarts kromden §). Daarbij werd de onderzijde langer, de bovenzijde gewoonlijk korter. Evenzoo vond ik dat stukjes, uit ranken van Sicyos gesneden, na verwijdering van het vocht dat uit de vaatbundels treedt, na prikkeling zich kunnen krommen zonder water op te nemen. (Zie pag. 122).

De verklaring is deze: oorspronkelijk zijn de turgorkrachten der cellen aan alle zijden van den tak of de rank met elkander

---

*) *Flora* 1873, p. 325.

†) *Arbeiten des Botan. Inst. in Würzb.* III 1878, p. 307.

§) *Flora*. 1873, p. 329.

in evenwicht, geen cel onttrekt aan een andere water. Nu wordt door den prikkel of door de zwaartekracht plotseling de turgorkracht aan eene zijde vergroot, het evenwicht in dus verbroken, en de geprikkelde cellen kunen water aan de andere cellen onttrekken. De eerste vergrooten zich, de laatste worden kleiner, en het plantendeel moet zich dus krommen.

3. *Verkorting van de concave zijde.*

Sachs toonde aan, dat de knoopen van grassen, als zij zich geotropisch krommen, zich veelal aan de concaaf wordende zijde verkorten, en soms zoo sterk, dat deze zijde diepe plooien vertoont *). Bij ranken, die zich om steunsels of epinastisch winden, vond ik dat de concave kant nu eens in lengte toeneemt, dan weer niet verandert, of eindelijk ook korter wordt. Het laatste geschiedt voornamelijk dan, wanneer de totale groeisnelheid der rank tijdens de kromming zeer gering is †).

De verkorting der concave zijde is in beide gevallen ten deele aan waterverlies, ten deele aan een mechanische samendrukking toe te schrijven. Het eerste is een natuurlijk gevolg van de werking van den prikkel, die het oorspronkelijk evenwicht tusschen de turgorkrachten der cellen verbreekt. De toeneming der turgorkracht in de cellen der eene zijde, bij onvoldoenden toevoer van water, maakt dat deze cellen water aan de overige onttrekken; deze verliezen hierdoor aan volumen, en de elastisch gespannen celwanden contraheeren zich §).

Of een mechanische samendrukking der concave zijde zal plaats vinden, hangt natuurlijk van de relatieve plaats der uitzettende en der passief gerekte weefsels, en van de grootte der ontwikkelde krachten af; daaromtrent ontbreken echter nog de noodige onderzoekingen.

De verkorting der concave zijde is slechts een bizonder geval van den algemeenen regel, dat de concave zijde bij de daarop onderzochte groeikrommingen langzamer groeit dan zij gegroeid

---

*) *Arb. d. Bot. Instt. in Würzb.* II, 1872, p. 204.

†) Ibidem, Heft III, 1873, p. 304.

§) Vergelijk Sachs, *Lehrbuch d. Botanik* 4 Ed. p. 841, 842,

zou zijn, als het orgaan recht gebleven ware. Bij ranken, stengels, en evenzoo bij wortels *), geldt deze regel, zoover men weet, zonder uitzondering. Het is duidelijk, dat hier dezelfde verklaring geldt en dat de oorzaak der verkorting in waterverlies te zoeken is, veroorzaakt door de toeneming van de turgorkracht in de cellen der convex wordende zijde. Of bij groeikrommingen de totale groeisnelheid anders zal zijn dan bij rechtblijvende organen, hangt ten deele van den toevoer van water, ten deele van den weêrstand der passief gerekte weefsels af.

4. *Onafhankelijkheid van de krommingen van ranken van de dikte van het steunsel.*

De meeste ranken kunnen zich om de allerdunste steunsels krommen, en vormen dan uiterst enge windingen. Krommen zij zich om dikkere steunsels, dan leggen zij zich niet eenvoudig aan deze aan, maar trachten zich nog sterker te krommen. Is het steunsel een blad, of een papieren cylinder, dan wordt het door de rank feitelijk samengedrukt. Is het harder, dan ziet men niet zelden, vooral bij zeer dikke steunsels, de rank zich zijdelings buigen en daardoor een zigzaglijn vormen. In één woord, het verschil in groei tusschen boven- en onderzijde hangt geenszins van de dikte van het steunsel, maar van inwendige oorzaken af †). Dit is trouwens te verwachten, na hetgeen wij thans omtrent de werking van den prikkel weten. De sterkte der kromming kan afhangen van den duur der aanraking met het steunsel, maar geenszins van zijn vorm; de aanraking van een gegeven punt der oppervlakte der rank met het steunsel is onafhankelijk van de dikte van het steunsel, en alleen deze aanraking bepaalt de mate, waarin de groei versneld wordt.

5. *Potentieele kromming.*

Plaatst men groeiende stengels horizontaal, en bevestigt men ze zoodanig, dat zij zich volstrekt niet krommen kunnen, en

*) Sachs. *Arbeiten d. Bot. Inst. in Würzb.* III, p. 471.

†) *Arbeiten Würzb.* III, p. 309.

laat ze dan na verloop van eenige uren los, zoo krommen zij zich plotseling zeer sterk; daarbij wordt de onderzijde convex. Men kan dit bijvoorbeeld daardoor bereiken, dat men ze met gebogen spelden op kurkplaten bevestigt. Legt men rechte ranken van Sicyos met haar onderzijde op een glasplaat, en bedekt haar dan eveneens met een glasplaat, dan zal zij, als na eenigen tijd de glasplaten weggenomen worden, zich plotseling sterk krommen.

In beide gevallen hebben dus de plantendeelen het vermogen om zich te krommen erlangd onder omstandigheden, waaronder zij de kromming zelve niet konden uitvoeren. Dit is trouwens natuurlijk. In de cellen der later convex wordende zijde is, ten gevolge van den prikkel (zwaartekracht, aanraking met een vast lichaam), de turgorkracht toegenomen, de cellen hebben langzamerhand water opgenomen en, daar ze zich niet in de lengte konden uitzetten, hare celwanden in andere richtingen uitgezet en gespannen. Verdwijnt de hinderpaal, dan zullen zij plotseling dien vorm aannemen, die met de rekbaarheid en elasticiteit der celwanden overeenkomt. Dit feit wijst ons tegelijkertijd op de merkwaardig geringe rekbaarheid en groote elasticiteit, die de celwanden van het parenchym van groeiende plantendeelen in de dwarsrichting moeten bezitten, om een samendrukking door de passief gerekte weefsels te beletten.

Bindt men halmstukken van grassen, die een jongen knoop in hun midden bevatten, zóó horizontaal, dat buiging niet mogelijk is, en maakt men ze na eenigen tijd los, zoo neemt de knoop terstond een zwakke buiging aan. Duurt de proef langer, zoo plooit zich de bladscheede in den knoop aan de onderzijde; dit kan somwijlen zoo sterk geschieden dat de knoop barst. Wij zien dus ook hier, dat verlenging en kromming een gevolg zijn van spanningen, die zich onder de gegeven ongunstige omstandigheden, tot een aanzienlijk bedrag kunnen ophoopen.

6. *Teruggaan na tijdelijke prikkeling.*

Asa Gray en Darwin *) beschreven het feit, dat ranken, na tengevolge van eenigen prikkel een kromming gemaakt te heb-

*) Climbing plants p. 130.

ben, zich weer volkomen kunnen strekken als de prikkel heeft opgehouden te werken. Deze teruggaande beweging is steeds langzaam, ook bij ranken van Sicyos, die zich na wrijven der onderzijde in weinige minuten zeer sterk gekromd hebben. Dit feit vindt waarschijnlijk zijn verklaring daarin, dat op de snelle afzondering van osmotisch werkzame stoffen een tijd volgt, waarin dit proces langzamer verloopt dan gewoonlijk. Het is alsof het materiaal voor deze productie tijdelijk grootendeels verbruikt werd, en het aanvoeren van nieuw materiaal slechts langzaam geschiedt. Zulk een periode van vertraging hebben wij bij onze injectie-proeven meermalen aangetroffen. Terwijl dus de groei van het parenchym der bovenzijde in deze vertragingsperiode verkeert, gaat de groei aan de onderzijde ongestoord voort; het gevolg zal zijn, dat na eenigen tijd beiden weer even lang worden.

Ik erken, dat deze verklaring nog geenszins alle bezwaren oplost, maar hiertoe is een nauwkeuriger studie van het proces van teruggaan noodig. Zulk een studie zal wellicht voor de aangenomen periode van vertraging rechtstreeksche bewijzen kunnen brengen, en zoodoende een uitgangspunt voor belangrijke onderzoekingen over de mechanica der groeikrommingen worden.

7. *Kromming van gespleten organen.*

Sachs toonde aan, dat als axiel gespleten worteltoppen met de snijvlakte horizontaal geplaatst worden, beide helften zich geotropisch afwaarts krommen, en dat daarbij de bovenzijde sterker groeit dan de onderzijde *). Daar de turgorkracht in de bovenzijde door de zwaartekracht is toegenomen, is dit verschil in groeisnelheid zeer natuurlijk.

De geotropische kromming der onderzijde leert, dat de werking van den prikkel zich niet tot de bovenste helft beperkt, maar ook nog tot onder het middenvlak uitstrekt. Hetzelfde leert het feit, dat, van gespleten stengels en grasknoopen, beide helften zich geotropisch kunnen krommen †). Splijt men gras-

*) *Arb. Würzb.*, Heft III, p. 471.

†) Sachs, *Lehrbuch d. Botan.*, 4e Ed., p. 822.

knoopen overlangs in vier gelijke deelen, en plaatst men ze horizontaal, zóó dat een deel boven, één onder, en twee zijdelings liggen, dan krommen zij zich alle vier geotropisch omhoog. SACHS isoleerde uit groeiende stengels middenlamellen, die in het midden uit het merg, beiderzijds uit schorsweefsel en opperhuid bestaande. Plaatste hij zulk een middenlamel horizontaal, met de wondvlakten vertikaal, dus op den smallen kant liggend, dan kromde zij zich geotropisch omhoog, legde hij haar op den breeden kant horizontaal, dan ondervond zij meestal geen werking der zwaartekracht. Geïsoleerde mergprismen zijn niet geotropisch.

Deze waarnemingen, hoe belangrijk ook, zijn nog niet volledig genoeg om een voldoende verklaring toe te laten. Maar zij banen den weg, langs welken men tot de kennis van twee zaken zal kunnen geraken: ten eerste de kennis van de verspreiding van de werking van den prikkel op de dwarsdoorsnede.

Bij de beschrijving van mijne proeven met ranken, heb ik steeds eenvoudigheidshalve het parenchym in zijn geheel beschouwd als de plaats waar de turgorkrachten, die de bewegingen veroorzaakten, werden ontwikkeld. Ik heb het in het midden gelaten, of in alle cellen daarbij de turgorkracht even sterk toenam, dan wel of in dit opzicht eene differentieering bestond (zie p. 122); het laatste is niet onwaarschijnlijk, doch mijne proeven leeren hieromtrent niets, en voor de getrokken conclusiën was het niet noodig dit te weten. Bij de overige bewegingen heb ik steeds gesproken van een toeneming der turgorkracht aan de convex wordende zijde. Ik acht deze uitdrukking, om der wille van de eenvoudigheid, geoorloofd, niettegenstaande de werking der prikkels zich zoowel boven als onder het middenvlak doet gelden. Maar hoever deze werking zich doet gelden, kan natuurlijk alleen door het onderzoek van geïsoleerde deelen uitgemaakt worden.

Ten tweede kunnen de bedoelde proeven leiden tot de oplossing van een veel belangrijker vraag. Volgens de in het begin van dit hoofdstuk uiteengezette resultaten van mijn onderzoek toch, vergrooten de prikkels de turgorkracht in bepaalde groepen van cellen. Een kromming kan daardoor alleen tot stand komen, als deze cellen met andere, die zich minder sterk trachten uit te zetten, in verbinding zijn. Veronderstellen wij nu, dat het mo-

gelijk ware, alle ongelijksoortige weefsels van elkander te isoleeren, en in dien toestand hun groei te onderzoeken. Zal dan de zwaartekracht nog als prikkel op het parenchym werken, of is de vereeniging met andere weefsels daartoe noodzakelijk? M. a. w.: Werkt de zwaartekracht als prikkel op elke afzonderlijke cel, of is daartoe de superpositie van meerdere, wellicht van verschillende cellen noodig? Hoe hangt, in het laatste geval, de werking van den prikkel van den aard der superpositie af?

Mocht het gelukken op deze vragen een experimenteel antwoord te vinden, dan is wellicht de weg gebaand, om op het verschil tusschen positief en negatief geotropische organen licht te werpen.

8. *Verschil tusschen groeikrommingen van één- en veelcellige organen.*

Bij de geotropische en heliotropische bewegingen van Vaucheria, Mucor, wortelharen van Marchantia e. a. eencellige organen, kan de oorzaak, volgens de heldere uiteenzetting van SACHS *), niet op een verandering van den turgor berusten, zij moet in een verandering van den groei (of de rekbaarheid) van den celwand haar oorzaak hebben. Bij de bewegingen der groeiende deelen van hoogere planten, met name van de vaatplanten, komt de differentieering in actieve en passief gespannen weefsels als een belangrijke factor op den voorgrond. Onder de laatsten spelen vooral het collenchym en het xyleem der vaatbundels een voorname rol; beiden munten door de zeer geringe energie van hunne levensprocessen uit. Om den weêrstand dezer deelen bij groeikrommingen te overwinnen, is een zeer aanzienlijke kracht noodig, en deze kracht wordt door de toeneming van de turgorkracht van het parenchymweefsel geleverd.

Bij de groeikrommingen van veelcellige organen werken de prikkels direct op het proces van afzondering van osmotisch werkzame stoffen in bepaalde cellen; alle overige verschijnselen laten zich hieruit, aan de hand van de theorie van SACHS over den groei, afleiden.

---

*) *Lehrbuch d. Botanik*, 4e Ed. p. 813.

RAPPORT

VAN DE HEEREN

TH. W. ENGELMANN EN C. K. HOFFMANN

OVER EENE VERHANDELING VAN DEN HEER

A. A. W. HUBRECHT.

(Uitgebracht in de Vergadering van 31 Januari 1880).



De ondergeteekenden, uitgenoodigd om der Afdeeling voor Wis- en Natuurkunde der Koninklijke Akademie van Wetenschappen van advies te dienen ten opzichte van eene door den Heer A. A. W. HUBRECHT geschrevene en voor de werken der Akademie aangebodene verhandeling, getiteld: *Zur Anatomie und Physiologie des Nervensystems bei den Nemertinen*, hebben de eer hierover het volgend rapport uit te brengen.

De verhandeling, in het Hoogduitsch geschreven, omvat 93 halve foliobladzijden tekst en 33 gedeeltelijk met veel zorg, gedeeltelijk in kleuren uitgevoerde afbeeldingen, die gezamenlijk de ruimte van omstreeks 4 platen in 4⁰ zullen innemen. Het onderwerp der verhandeling verdient zeker in hooge mate de belangstelling van morpholoog en physioloog. De Nemertinen immers vormen een der merkwaardigste groepen in de groote, aan biologische problemen zoo rijke afdeeling der Wormen. Aan den eenen kant nederdalende tot aan vormen, die tot de laagst georganiseerde Metazoa naderen, verheffen zich de Nemertinen aan den anderen kant tot aan de hoogst ontwikkelde vormen en bieden zij zelfs sommige punten van aanraking met Vertebraten. Talrijke onderzoekingen uit vroegeren en lateren tijd, daaronder niet weinigen verricht door voortreffe-

lijke waarnemers, hebben de kennis dezer dierengroep helpen bevorderen. Zij is evenwel nog verre van voldoende. Niet het minst geldt dit ten opzichte van den bouw en de functie der organen, die het bijzonder onderwerp van den arbeid des Heeren HUBRECHT uitmaken: het zenuwstelsel en de zoogenoemde „Seitenorgane". De resultaten van het onderzoek, in de aangeboden verhandeling nedergelegd, voorzien in de bestaande leemten op zeer belangrijke punten.

Het zal voldoende zijn, den gang en de voornaamste uitkomsten van het onderzoek des Heeren HUBRECHT in 't kort aan te duiden. De verhandeling is in drie afdeelingen gesplitst. De eerste en meest omvangrijke (blz. 2—65) bevat eene, voornamelijk op uitgebreide eigen waarnemingen steunende, nauwkeurige morphologische beschrijving van het zenuwstelsel. De schrijver gaat telkens uit van de eenvoudigste vormen en klimt van dezen allengs tot de hoogere typen op.

In de eerste plaats (blz. 2—19) worden vorm, ligging, enz., van het centrale zenuwstelsel en van de Seitenorgane uitvoerig beschreven. De Heer HUBRECHT toont aan, dat het eerste bestaat uit twee groote, overlangs door het lichaam verloopende zenuwstrengen, die door een ganglieuse laag als door een scheede omhuld worden, aan het vooreinde tot meer of minder zamengestelde organen (hersenen) aanzwellen en door uitsluitend dorsale zenuw-commissuren met elkander samenhangen. Zij worden zenuwmergstrengen genoemd. Belangrijk is de ontdekking van den Heer HUBRECHT, dat zij bij sommige vormen ook aan het aborale einde door een dorsale commissuur van zenuwvezelen vereenigd zijn, iets dat a priori te verwachten was, nadat VON KENNEL deze commissuur het eerst bij Malacobdella had aangetoond.

Ten aanzien der Seitenorgane blijkt o. a., dat zij met stijgende differentiatie der hersenen, bepaaldelijk met klimmende ontwikkeling en afsnoering van een derde hersenaanzwelling, meer en meer samengesteld worden en inniger met de hersenen, in 't bijzonder met de derde aanzwelling, in verband treden.

Op blz. 19—43 volgt een breedvoerige beschrijving van den histiologischen bouw van het centraal zenuwstelsel. Uitvoerig bespreekt de schrijver het voorkomen van haemoglobine

in de gangliën der verschillende soorten. Uit een physiologisch oogpunt verdient opmerking, dat bij weinig ontwikkelde Seitenorgane, alsook bij die hoogere vormen, wier bloed haemoglobine-houdende cellen bevat, betrekkelijk weinig haemoglobine in de zenuwcentra wordt gevonden.

Eene gedetailleerde, niet weinig nieuwe feiten bevattende, beschrijving van het peripherisch zenuwstelsel vormt het slot van het eerste hoofdstuk der verhandeling. Achtereenvolgens behandelt de schrijver: 1°. de zenuwstammen, loopende naar de oogen, de punt van den kop, eventueel de kopspleten, 2°. de zenuwen van den snuit, 3°. de stammen, gaande naar den oesophagus en den voordarm, 4°. de ongepaarde in de dorsale mediaanlijn loopende zenuw, 5°. (meer aphoristisch) de peripherische zenuwen, die van de overlangsche zenuwmergstammen ontspringen.

In het tweede hoofdstuk (blz. 66—87) tracht de Heer HUBRECHT de vraag naar de functie der „Seitenorgane" te beantwoorden. Ten aanzien hiervan heerschten tot dusverre de meest uiteenloopende meeningen. RATHKE en QUATREFAGES o. a. beschouwden ze als gevoelswerktuigen, GOODSIR als openingen van het genitaal-apparaat, VAN BENEDEN als openingen van een watervaatstelsel; de laatste onderzoeker, MAC INTOSH, laat hunne verrichting geheel onbeslist. De Heer HUBRECHT nu levert langs proefondervindelijken weg het bewijs, dat zij, in verband met de haemoglobine van het centraal zenuwstelsel, een belangrijke rol bij de ademhaling spelen en bevestigt alzoo een reeds vijf jaren geleden door hem uitgesproken vermoeden.

De proeven werden genomen op Cerebratulus marginatus, een soort, die het gemakkelijkst te verkrijgen en om haar groote kopspleten en rijk haemoglobine-gehalte voor de waarneming bijzonder geschikt is. De voornaamste feiten, door den Heer HUBRECHT gevonden, zijn de volgende.

Terwijl de Cerebratulus in gewoon O.houdend zeewater zich rustig gedraagt, de kopspleten zich slechts nauwelijks merkbaar afwisselend sluiten en openen, wordt het dier, na in uitgekookt zeewater overgebracht te zijn, al ras in klimmende mate onrustig en geraken de kopspleten in hevige rhythmische bewegingen van openen en sluiten. In O.houdend water teruggebracht, bedaart het dier en vindt men spoedig de spleten wijd

lijke waarnemers, hebben de h ... ijke toestand v
bevorderen. Zij is evenwel ... r tot aanh
het minst geldt dit ten op ... ken de
der organen, die het bijz ... nge
Heeren HUBRECHT uitmak ...
„Seitenorgane". De r ... a.
geboden verhandeling ... stelsel in
leemten op zeer bel ... erug verplaatst, opent
Het zal voldoe ... rna volgen hevige rhyth-
komsten van he ... egingen, die na eenigen tijd
aan te duiden. ...
De eerste en ... ezer verschijnselen met die, welke bij
namelijk op ... oortgelijke voorwaarden bij de ademhalings-
keurige n ... n waargenomen, is zóó groot, dat aan een
schrijver ... functie der Seitenorgane niet wel getwijfeld kan
van de ...

In ...
van ... ontogenetische en vergelijkend ontleedkundige feiten wor-
be ... door den Heer HUBRECHT tot steun dezer opvatting bijeen-
gebracht en eindelijk nog het vraagstuk uit een phylogenetisch
oogpunt uitvoerig beschouwd.

Het derde en laatste hoofdstuk der verhandeling bevat, uitgaande van de resultaten die het anatomisch onderzoek van het zenuwstelsel heeft opgeleverd, vergelijkend morphologische opmerkingen over de verwantschap der Neimertinen tot andere vormenreeksen van dieren, bepaaldelijk tot die der Anneliden en Vertebraten.

Uit het medegedeelde zal zijn gebleken, dat de Heer HUBRECHT zijne taak breed heeft opgevat. Zijn onderzoek draagt overal de kenmerken van goede wetenschappelijke methode. Is het niet op alle punten tot dezelfde mate van rijpheid gekomen, blijven hier en daar nog twijfel of wenschen aangaande inhoud of vorm bestaan, het geheel is van zoodanig gehalte, dat de ondergeteekendenden het gaarne in de werken der Koninklijke Akademie zullen zien opgenomen.

TH. W. ENGELMANN.
C. K. HOFFMANN.

d, aber bloss häutig,
gen der Sehnen-
ng der Streck-
ich geachtet
und eines
mit der
tor)

M

KOSTE

in der Sitzung von 31 Januar 1880).

Nur wenige Monate sind verflossen seit ich meinen Aufsatz: „De genetische beteekenis der vingerstrekspieren" *), in einer Sitzung unserer Akademie vortrug. Die Frage nach der Bedeutung einer am menschlichen Körper von mir beobachteten Anomalie der Streckmuskeln von Daumen und Zeigefinger brachte mich dazu, die Homologie der Handmuskeln beim Menschen und den höheren Affen im Allgemeinen zu untersuchen. Es stellte sich heraus dass, bei richtiger Erwägung aller Thatsachen, kein specifischer Unterschied in der Muskulatur der Hände bei den Anthropoïden und dem Menschen anzunehmen war. Im Gegentheil, es schien mir dass nur die phylogenetische Theorie befriedigend die Eigenthümlichkeiten der menschlichen Organisation, auch der von mir beschriebenen Anomalie, zu erklären im Stande war.

Ich konnte nicht vermuthen dass, während ich mit meiner Untersuchung beschäftigt war, gleichzeitig in Wien ein Orang und in München ein Gorilla zergliedert wurde. So gern hätte ich selbst die Muskeln der Vorderextremitäten eines Orang oder Gorilla genau untersucht.

Als die dies bezüglichen Arbeiten von LANGER †) und VON

---

*) *Verslagen en Mededeelingen*, Afd. Natuurkunde, 2de Reeks, Deel XIV.

†) C. LANGER, Die Musculatur der Extremitäten des Orang als Grundlage einer vergleichend-myologischen Untersuchung. Mit 2 Tafeln. *Sitzungsberichte der K. Akad. d. Wiss.* III Abth. Jahrg. 1879.

BISCHOFF *) erschienen, suchte ich voller Erwartung was in Bezug auf die in meiner Abhandlung erwähnten der näheren Untersuchung bedürfenden Punkte von beiden Forschern gefunden sein möchte.

Wie in meiner Abhandlung gezeigt wurde, hängen bei Cercopithecus die Sehnen vom M. extensor poll. longus und die Strecksehnen des zweiten Fingers aponeurotisch zusammen; und ist der musculus indicator vertreten durch einen starken Muskel, der ganz wie der indicator des Menschen verläuft, Daumenstrecker wird, theilweise aber auch zum Zeigefinger geht, und mit den Sehnen des Extensor communis überhaupt innig zusammenhängt. Für die in meiner Abhandlung vertheidigten Ansichten über die genetische Bedeutung der Finger-streckmuskeln war dies der erste Punkt, weszhalb ich die Verhältnisse bei den höheren Affen genauer zu kennen wünschte. Möglicherweise bestand auch da noch mehr Zusammenhang zwischen dem geraden und dem schiefen System der Fingerstrecker, wie beim Menschen.

Der zweite Punkt betraf den eigenen Beugemuskel des Daumens, der beim Orang fehlt; wenigstens mit keiner Sehne zum Endgliede des Daumens gelangt. Gleichfalls sehr erwünscht waren mir gewesen: genauere (spezielle) Untersuchungen über das Verhalten der Fingerbeuger, namentlich über das der Sehne des radialen Theiles des tiefen Fingerbeugers in den Fällen wie beim Orang, und dem entsprechenden beim Chimpanzé, und über das *Verhalten des Ursprunges dieses radialen Theiles*, der beim Menschen, wie ich finde, regelmässig mit dem ulnar entspringenden allgemeinen tiefen Fingerbeuger und oft mit dem oberflächlichen Beuger zusammenhängt.

Bezüglich der Streckmuskeln finde ich nun bei LANGER folgende Beschreibung: „Dass der Extensor pollicis brevis fehlt, der Extensor pollicis longus sehr schwach ist, sich aber sonst wie beim Menschen verhält, ist bekannt" (S. 6 des Separatabdrucks). Das ist alles was über die Strecker von Daumen und zweitem Finger gesagt wird. Nur wird noch, etwas weiter, vom Extensor communis erwähnt: „dass sie, wie beim Menschen, auf

*) v. BISCHOFF, Beiträge zur Anatomie des Gorilla, in *Abhandl. d. Kön. Bayerischen Akademie der Wissensch.* II Cl. XIII Bd., 3te Abtheil.

dem Handrücken mit einander vereinigt sind, aber bloss häutig, ohne Verbindung durch eigentliche Abzweigungen der Sehnenstränge." Es fragt sich aber ob auf Zusammenhang der Strecksehnen von Daumen und zweitem Finger ausdrücklich geachtet worden ist. Des Ursprunges der schiefen Muskeln, und eines etwaigen Zusammenhanges eines Theiles dieses Systems mit der Strecksehne des zweiten Fingers (analogon des m. indicator) wird gar keine Erwähnung gethan.

Dass beim Gorilla ein musculus Indicator nicht fehlt, geht aus v. BISCHOFF's citirten Abhandlung hervor. Er sagt (S. 16 des Separatabdruckes) : „Der Extensor indicis proprius ist bei meinem Gorilla ausserordentlich schwach, die Sehne so dünn, und legte sich so an die Sehne von dem Extensor digitorum communis an, dass ich sie anfangs übersah. Doch ist ihre Gegenwart und ihr Verhalten interessant, weil, wie ich schon früher angegeben habe, der Gorilla der einzige Affe ist, welcher einen eigenen nur für den Zeigefinger bestimmten Streckmuskel hat, während bei den übrigen mehr oder weniger ein Extensor digitorum communis sich findet, welcher ausser für den Zeigefinger auch noch für andere Finger bestimmt ist. Immerhin bleibt es aber bemerkenswerth dass der Muskel auch bei dem Gorilla so schwach ist, dass er schwerlich die characteristische indicatorische Bedeutung desselben bei dem Menschen besitzt."

In meiner früheren Abhandlung habe ich gezeigt was, meiner Ansicht nach, von dieser „characteristischen indicatorischen Bedeutung" des Muskels zu denken sei. Jedenfalls ist es aber bemerkenswerth, dass der Fall vorkommen könnte, dass beim gleichzeitigen Seciren eines Orangs und eines Menschen, beim ersteren der „spezifisch menschliche" Muskel hervorkäme, während er an der menschlichen Hand nicht zu zeigen wäre (denn er fehlt bisweilen beim Menschen).

Etwas mehr verbreitet sich LANGER über den, bei der Vergleichung von Menschen- und Affenhand so bedeutungsvollen eigenen Daumenbeuger. Zu meiner Freude finde ich bei ihm einen zweiten Fall von Sehnen-zusammenhang zwischen Flexor pollicis longus und Flexor digitorum communis profundus beim Menschen. Auf die Wichtigkeit dieser „Affenähnlichkeit", wovon

ich bei HENLE nur ein Beispiel fand, wurde in meiner Abhandlung schon gewiesen. Der Unterstützung wegen, welche meine Ansichten durch LANGER's Mittheilungen über den langen Daumenbeuger zu erhalten scheinen, führe ich hier an was er S. 4 und 5 sagt: „Betreffend den Flexor digitor. communis profundus ist bekannt, dass die am Radius fixirte von dem gemeinschaftlichen Fleischkörper isolirbare Partie eigentlich den Flexor pollicis longus des Menschen vertritt, obgleich die Sehne derselben nicht zum Pollex sondern zum Index geht. Es ist dies also ein Fall, wo ein Fleischkörper, welcher mit dem beim Menschen vorkommenden ganz identisch ist, auf ein anderes Glied herüber gelenkt wird, und zwar bedeutungsvoll vom Daumen weg zum Zeigefinger. Als vermittelndes Glied dieser Ablenkung könnte ein, gelegentlich beim Menschen vorkommender kleiner Muskel betrachtet werden, welcher gerade unter dem Ansatze des Pronator teres vom Radius abkommt, aufliegend auf dem Flexor pollicis longus, und angereiht an das letzte Radialbündel des Flexor digitorum communis sublimis, woraus die Sehne für den Mittelfinger entsteht. Die Sehne dieses kleinen überzähligen Muskels verbindet sich aber nicht mit der benachbarten Sehne des tiefen Beugers für den Mittelfinger, sondern legt sich an die aus dem Flexor communis sublimis entstehende Sehne für den Zeigefinger an. Das Muskelchen hat also gemeinsamen Ursprung mit dem Flexor longus pollicis, schickt aber seine Sehne an den Zeigefinger. Einen in dieser Hinsicht noch interessanteren Fall hat EILH. SCHULZE (*Zeitschrift für wissenschaftl. Zoologie*, XVII Band, p. 20) als Muskelvarietät beim Menschen beschrieben, wo ein beträchtlicher Sehnenstrang aus der Sehne des Flexor poll. longus zur Zeigefinger-Sehne des Flexor digitorum communis profundus übergetreten ist" *).

Obgleich LANGER sich mit der Frage nach der genetischen Bedeutung dieser Muskelvarietäten nicht beschäftigt, ist er offenbar der Meinung, welche ich in meiner Abhandlung vertheidigte: *die portio radialis des tiefen Fingerbeugers, selbstän-*

---

*) Dieses ist der oben gemeinte Zweite Fall der „Affenähnlichkeit" beim Menschen.

diger geworden beim Menschen wie bei den höheren Affen, ist der Flexor pollicis longus des Menschen.

Dieser Meinung ist aber VON BISCHOFF gewisz nicht. In seinem oben citirten Aufsatze finden wir S. 13 die Beschreibung des Musculus flexor digitorum profundus, welche so ziemlich mit der von DUVERNOY gefundenen Anordnung übereinstimmt. Dann aber lässt VON BISCHOFF folgen: „HUXLEY fand zwar auch eine wie er meint, den Flexor pollicis longus repräsentirende Sehne, welche aber nicht mit den andern Flexoren in Verbindung stand, sondern sich in die Fascia palmaris ausbreitete und theilweise an das Trapezium und os metacarpi primum ansetzte, so dass der Muskel, wie er selbst sagt, functionnell fehlte. MACALISTER fand diese Sehne ebenfalls nicht, sagt aber dennoch, dass in dem ganzen Flexor profundus „were easily discriminable the germs of the flexor profundus digitorum", und setzt dann noch hinzu: The flexor pollicis mainly supplied the Index in the Gorilla — eine etwas auffallende Auffassung die noch complizirter dadurch wird, dass MACALISTER gleich darauf von der Fasern der Handwurzel eine platte Sehne ausgehen lässt, welche er mit einem Streifen an die Basis der ersten, und mit ihrer Endausbreitung an die Basis der Zweiten Phalange des Daumens ansetzen lässt, und dieselbe als die wahre Sehne des Flexor pollicis longus betrachtet. CHAPMAN konnte, wie ich, keinen Flexor pollicis longus, weder Muskel noch Sehne, finden. Es bleibt also wohl dabei dass sich in dieser bemerkenswerthen Hinsicht der Gorilla, wie alle seine Stammverwandten (mit Ausnahme von Pithecia hirsuta) verhält, und wesentlich von dem Menschen unterscheidet."

Ueber das Verhalten der Streckmuskeln von Daumen und Zeigefinger sagt VON BISCHOFF nichts für meinen Zweck bemerkenswerthes.

Es ist nicht meine Absicht die ganze Frage von der Homologie der Muskeln welche Hand und Finger beim Menschen und den Affen bewegen hier noch einmal zu erörtern. Ausführlich habe ich in meiner früheren Abhandlung gezeigt, dass *die Thatsachen* nicht nur nicht gegen eine Darwinistische Auffassung der Handmusculatur beim Menschen und bei den Affen sprechen; sondern dass umgekehrt nur die phylogenetische Theorie es uns möglich macht uns die Thatsachen zurecht zu

legen. Ich meinte nur dass es nach dem Erscheinen der Arbeiten LANGER's und VON BISCHOFF's für mich geboten war, als Zusatz zu meiner früheren Arbeit, die Hauptsache der neuen Untersuchungen mit zu theilen. Wie man aus dem Mitgetheilten ersehen kann, geht aus diesen neuen Untersuchungen nichts hervor, das uns zwingen könnte irgend einen Theil der Musculatur der menschlichen Hand für neuhinzugekommen, für „spezifischmenschlich" zu halten. Zwar behauptet VON BISCHOFF das für den Musculus flexor pollicis longus, wie AEBY (siehe meine frühere Abhandlung) es thut für den Musculus indicator. Nun hat aber, wie gezeigt, der Gorilla einen Indicator, und der Mensch bisweilen keinen. Im Gegentheil hat der Mensch einen selbständigen M. flexor pollicis longus und bei dem Gorilla scheint dieser Muskel zu fehlen. *Scheint* — denn wenn mann alle anatomische Thatsachen genau erwägt, ist es doch in der That unmöglich den höheren Affen diesen langen Daumenbeuger ab zu sprechen. Nur dass die Verhältnisse einigermassen modifizirt sind, im Zusammenhang mit dem modifizirten Gebrauch der Hände. So kann wie beim Gorilla, factisch der lange Daumenbeuger fehlen, wenigstens physiologisch nicht leisten was er beim Menschen leistet. — Dagegen hat Pithecia hirsuta wieder den selbständigen Daumenbeuger; und fehlt er auch *morphologisch* beim Gorilla ebensowenig wie bei den übrigen Anthropoïden.

Es geht deutlich aus diesen neuen Arbeiten LANGER's und BISCHOFF's hervor, dass man bestimmte Pünkte nur dann mit der gebührenden Genauigkeit untersucht, wenn bestimmt gestellte Fragen einem Veranlassung geben seine Aufmerksamkeit darauf zu lenken. So finde ich weder bei LANGER noch bei VON BISCHOFF die genaueren Angaben über ganz geschieden sein oder zusammenhängen der *Streckmuskeln* des Daumens und des Zeigefingers, was eben für die Beurtheilung meiner Anomalie erwünscht wäre. Es ist zu bedauern dass ihnen meine Arbeit während ihrer Untersuchung noch unbekannt war; und für mich persönlich dass ich nicht selbst bisjetzt die Gelegenheit zur Zergliederung einer Gorilla- oder Orang-hand bekam. Ich zweifele keinen Augenblick daran, dass eine *genaue ausdrückliche* Untersuchung der Verhältnisse dieser Streckmuskeln mit meiner Auffassung in Einklang sein werde.

Für die Beugemuskeln scheint nur die weitere Untersuhung noch sehr nöthig. DUVERNOY fand beim Gorilla doch eine „schwache Sehne des tiefen Fingerbeugers zum Daumen"; VON BISCHOFF nichts. Weiter möchte ich gern selbst etwas sehen von „dem Zusammenhangen des nicht zum Daumen gehenden Theiles des Flexor profundus mit der Fascia palmaris" beim Gorilla; während von MACALISTER und Anderen auch muskulöse Streifen von der Fascia zum Daumen gehend beschrieben werden. Es ist sehr wohl möglich dass in dieser Anordnung der gleichsam „verirrte", modifizirt entwickelte Theil des Flexor profundus gegeben ist, welcher bei mehr selbständiger Entwicklung der menschliche Flexor pollicis longus wird. Oder in dem „kleinen Muskel" von LANGER steckt vielleicht ein Theil des langen menschlichen Daumenbeugers. Dem Allem wäre an zahlreichen Exemplaren der Anthropoiden genau nach zu forschen.

Auch in der Beschreibung welche VON BISCHOFF selbst (S. 17) giebt von „einem selbständigen kleinen Muskel, neben dem inneren Kopfe des Flexor brevis pollicis vorkommend, dessen Sehne an die zweite Phalange des Daumens sich ansetzt und die Stelle des Flexor longus vertritt" finde ich Veranlassung nicht mit seiner Meinung bezüglich des Fehlens des Flexor pollicis longus beim Gorilla oder beim Orang einzustimmen. Vorläufig möchte ich lieber seine oben citirten Worte so lesen: „Es bleibt also wohl dabei, dass sich in dieser bemerkenswerthen Hinsicht (M. flexor pollicis longus) der Mensch, wie alle seine Stammverwandten (Anthropoiden) verhält."

Utrecht, Dec. 1879.

BIJDRAGE TOT DE KENNIS

VAN DEN

LIPISTIUS DESULTOR SCHIÖDTE,

DOOR

A. W. M. VAN HASSELT.

Onder andere zeldzame araneïden in de collectie der jongste wetenschappelijke expeditie naar Sumatra, onder leiding van den Controleur der 1ste klasse in Oost-Indië A. L. VAN HASSELT, door de onvermoeide zorgen van den Leidschen Hoogleeraar VETH, Voorzitter van het *Aardrijkskundig Genootschap*, uitgezonden, en mij, namens Z.H.G., door één der reizigers, verzamelaars voor de zoölogie, den Heer JOH. F. SNELLEMAN (die de eer had der onderwerpelijke vangst), ter bewerking aangeboden, vond ik één volwassen vrouwelijk exemplaar der bovengenoemde, hoogst vreemde en voor de wetenschap uiterst belangrijke, tropische spin-soort.

Ofschoon zij, voor het overige, onmiskenbaar, den geheelen habitus naturalis der araneae verae vertoont, zoude zij toch geene „spin" mogen worden genoemd, in zooverre bij haar, volgens SCHIÖDTE, *de spin-organen*, althans de uitwendige, *ten eenenmale ontbreken*; een eenig noemenswaardig voorbeeld alzoo van eene spin *zonder* spintepels! *).

Haren geslachtsnaam ontleende de geleerde beschrijver aan de Grieksche woorden λείπω (deficio) en ἱστόσ (instrumentum textorium). De beroemde Zweedsche Hoogleeraar THORELL, op de uitspraak van het Grieksche woord ἱστοσ wijzende, heeft daarin later de verzuimde *h* tusschen gevoegd (*On European*

*) Zie mijn *Naschrift* over *Anetes*.

spiders, page 13), en sedert wordt niet meer *Lipistius*, maar *Liphistius* geschreven.

In den soort-naam, van het Latijnsche werkwoord desultare (overspringen) afgeleid, ligt de beteekenis opgesloten van eenen vermoedelijken „overgang" tot eene andere onderorde der Arachnoïdea.

De beschrijving in het Deensch, met eene voortreffelijke Latijnsche diagnose en met eene fraaije afbeelding, gaf Prof. SCHIÖDTE onder het opschrift, „Om en afvigende Sloegt af Spindlernes Orden" in het, bij ons te lande weinig bekende *) *Naturhistorisk Tidskrift af* HENRIK KROIJER, Kjobenhavn, 1846—1849, Ny (2), Raekke, Band II, pag. 617.

Van dit hoogst merkwaardig spinnengeslacht, dat tot de *Familie* der Mygalidae of Territelariae behoort, tot hiertoe het eenige in de onderafdeeling Liphistoidae, schijnen nog slechts *drie* exemplaren bekend te zijn, alle vrouwelijke, t. w. het oorspronkelijke, typische, Deensche, van SCHIÖDTE, één uit het Britsch Museum, door den beroemden araneoloog CAMBRIDGE beschreven in *Annals and Magazine of Natural History*, for April 1875, page 249, en het derde, boven genoemde, van de Hollandsche expeditie.

De beide eersten zijn afkomstig van het eiland Penang (of Pinang), het derde van Sumatra (Silago, op de West-kust van dit eiland), alzoo nagenoeg uit eene overeenkomstige hemelstreek der keerkringgewesten.

Vóór ongeveer dertig jaren vestigde de geleerde carcinoloog van Kopenhagen, in het aangehaald Tijdschrift, het eerst de aandacht op het bestaan van deze afwijkende spin-soort. Onder andere eigenaardigheden wees hij, behalve op *de afwezigheid der spintepels*, nog op eene tweede hoogst kenmerkende bijzonderheid, namelijk op *het bedekt zijn van den rug van het*

*) Na zeer vele vruchtelooze pogingen om dit Tijdschrift ter inzage te verkrijgen, ontving ik het eindelijk, op de aanwijzing van mijn' vriend C. RITSEMA: dat het, vóór jaren, uit de boekerij van wijlen onzen hooggeschatten JAN VAN DER HOEVEN, voor de bibliotheek van de Hollandsche Maatschappij der wetenschappen te Haarlem was aangekocht — van haren secretaris, ons geacht medelid VON BAUMHAUER, uit deze, ter leen. Aan beide H.H. mijnen meest hartelijken dank voor hunne behulpzaamheid.

achterlijf met 9 dwarsche, gelede, hoornachtige platen of schilden, die van voren naar achteren in grootte afnemen.

Met SCHIÖDTE, deed THORELL in 1870 (libr. cit. p.p. 39, 43, 122) in dit "wonderful East Indian genus" eenig verband ("a connexion") opmerken met de gesegmenteerde Phrynoidae en Scorpiones, terwijl in 1875 ook door CAMBRIDGE deze spin "eenig" wordt genoemd, wegens hare "articulated, corneous, transverse plates, similar to those found in the orders Scorpionidea and Thelyphonidea".

Wat deze hoorn- of liever chitine-schilden betreft, heb ik geene bemerkingen. Evenals bij het Engelsche exemplaar, zijn die ook bij het Sumatrasche volkomen zóó, als ze door SCHIÖDTE zeer duidelijk zijn beschreven en afgebeeld. Alleen bleken bij het laatste de lange stekelharen, die aan den voorrand op de schild-tubercula voorkomen, nagenoeg geheel te zijn verdwenen, zoogenaamd "abgerieben". Ook zou ik het SCHIÖDTE niet zoo beslist durven nazeggen, dat de scuta dorsalia "invicem *articulata*" zijn, althans op de 3 à 4 kleinere achtersten is zulks bij mijn exemplaar zeker niet toepasselijk en wellicht hebben ook de 5 à 6 grooteren er slechts den schijn van. Wegens de hooge zeldzaamheid van het voorwerp waag ik het niet, dit door ontleding uit te maken.

Bij het "ontbreken der spintepels" volgens SCHIÖDTE daarentegen, kan ik mij volstrekt niet nederleggen. Wèl zag ook ik, op den eersten aanblik, deze organen zelf over het hoofd! Niet alleen, omdat ik in het te voren opgevatte denkbeeld verkeerde, dat ze hier afwezig moesten zijn, maar niet minder, uit hoofde mijn specimen in alcohole hier en daar, en vooral aan het achterlijf, met eene geel-bruine aard- of klei-laag was overdekt. Ik was bepaald eenige dagen "dupe" en dacht den typischen *Lipistius desultor* voor mij te hebben.

Alvorens echter dit voorwerp als zoodanig voor de verzameling te etiketteeren, maakte ik het, ook om de bijzonderheden naauwkeuriger te kunnen bezichtigen, schoon, door het in water te weeken, de pooten en palpen uit te zetten en het lijf, zoo veel mogelijk, met een penseel van de vast aanhangende klei, met alle voorzichtigheid, te ontdoen.

Thans kwam, ook zonder behulp eener loupe, ten duidelijkste

onder en achter aan de buik-vlakte *een goed gekarakteriseerd spintepel-toestel* te voorschijn!

In de meening, hiermede eene niet onbelangrijke ontdekking te hebben gedaan, schreef ik er terstond gelijktijdig over aan mijne geachte vrienden SIMON en THORELL.

De eerste berichtte mij, dat hij *Liphistius* bij eigen aanschouwing niet kende en alleen wist, dat er twee soorten van beschreven waren.

Laatstgenoemde verwees mij, onder andere belangrijke wenken, voor de, mij toen niet bekende, tweede soort, naar den Heer O. P. CAMBRIDGE, den hiervoor reeds genoemden beschrijver van deze.

Deze beroemde Engelsche araneoloog had de groote goedheid, mij terstond, uit Blandford, een afdruk toe te zenden van zijn opstel over den door hem bekend gemaakten *Liphistius mammillanus*, in de boven aangehaalde Annalen, onder het opschrift „*On a new species of Liphistius*", wiens soort-naam alzoo reeds aanwees, dat die — even als het voorwerp uit Sumatra — wel degelijk van mamillae *) voorzien is.

Op dezen na, geleek dit exemplaar, wederom evenals het mijne, volkomen op het door SCHIÖDTE beschreven en afgebeeld specimen, in al de typische hoofdkenmerken van kleur, beharing, mandibels, oogenstand, vorm en grootte van den cephalothorax en van het zeer afwijkende smalle sternum, bouw en bekleeding van het achterlijf, plaatsing en gedaante van de long-tracheën en van den anus, betrekkelijke ontwikkeling en lengte der met stijve borstels en doornharen bedekte en met krachtige tarsaalklaauwen gewapende pooten, enz. Alleen de *ligchaamslengte*, zonder de pooten, loopt iets of wat uiteen, zijnde die bij het exemplaar van SCHIÖDTE nagenoeg 29, bij dat van CAMBRIDGE 42, bij het mijne ongeveer 32 millimeters. Ook omtrent het geringe onderscheid in vorm en grootte van het *labium*, door CAMBRIDGE opgemerkt, moet ik erkennen, dat dit, bij het mijne, meer overeenkomt met dat van hem, dan met dat

---

*) Daar ik niet weet, of de benaming „mammillae" van CAMBRIDGE juister is, dan die van „mamillae", behoud ik vooralsnog de meer algemeen in gebruik zijnde laatste schrijfwijze volgens WESTRING, THORELL en anderen,

van SCHIÖDTE; doch een en ander acht ik voor ons vraagstuk van eene zeer ondergeschikte beteekenis, en even onwezenlijk als het kleine verschil in de betrekkelijk meer voorwaartsche plaatsing van den *anus*, waarop CAMBRIDGE, voor zijn specimen, mede de aandacht vestigt. De vorm van dezen heeft overigens, bij het mijne, eene volmaakte overeenkomst met de naauwkeurige beschrijving daarvan door SCHIÖDTE: „apertura ani transversa, „valvulis corneis rufis; valvula inferior semicircularis", terwijl de afbeelding van CAMBRIDGE daarvan nog al veel afwijkt.

Wat nu de hoofdzaak, in casu de spintepels, aanbelangt, zoo passen zoowel de beschrijving als de teekening van den *mammillanus*, door CAMBRIDGE gegeven, nagenoeg geheel op hetgeen ik aan den *Liphistius* uit Sumatra kon waarnemen. Nogtans moet ik daarbij op enkele kleine afwijkingen bij mijn exemplaar wijzen; eerstens, dat zij, even als de tracheaalplaten, hoewel abnormaal (CAMBRIDGE), niet zóó ver naar boven of voorwaarts zijn geplaatst, althans niet „in het midden" van de buikvlakte, maar meer naar achteren zijn gelegen; ten tweede, dat de beide grootste of voorste spintepels niet binnenwaarts gekromd („curved") zijn, zoo als dit door CAMBRIDGE wordt gezegd en geteekend; en ten derde, dat de kleinste of achterste mamillae betrekkelijk minder sterk ontwikkeld zijn dan bij diens afbeelding daarvan. Maar ook deze geringe wijziging in vorm komt mij niet wezenlijk genoeg voor om daarin, evenmin als in de hiervoren genoemde kleinere verscheidenheden, eenige de minste aanleiding te vinden tot het aannemen van een soortelijk verschil. Niet alleen in deze, maar in vele andere organen, doen zich, ook bij de spinnen — gelijk bij alle andere dieren — soms veel grootere individueele variëteiten voor, dan de hier waargenomene.

Ik aarzel in het minst niet, te verklaren, dat onze Mygalide uit Sumatra gelijk mag worden gesteld met den *L. mammillanus* CAMBRIDGE, terwijl er bij mij een groot vermoeden bestaat, dat beide, op hunne beurt, overeenkomen met den *L. desultor* SCHIÖDTE.

Ten sterkste meen ik het te mogen betwijfelen, dat wij (CAMBRIDGE en ik) hier eene tweede „soort" voor ons hebben. Trouwens heeft CAMBRIDGE zelf, reeds vóór mij, dezen twijfel uit-

gesproken. Hij veronderstelde terstond de mogelijkheid, dat in het origineele Deensche exemplaar de spintepels over het hoofd waren gezien, of op de eene of andere wijze konden zijn vernietigd. Hij deed evenals ik, en schreef aan Prof. THORELL, met verzoek om dienaangaande nader bericht bij SCHIÖDTE te willen inwinnen. Laatstgenoemde evenwel wilde van de eene of andere dezer veronderstellingen niets weten; „de verzamelaar, „dr. VAN TEYLINGEN, was zelf een goed dierkundige en zou „zeker de spin-tepels bij het opzetten niet hebben voorbijgezien". Deze had den buik van het dier, in het midden, zeer voorzichtig opengesneden en de buikholte geledigd. Daarna was die met watten opgevuld en de spin toen in spiritus bewaard verzonden. SCHIÖDTE verzekerde, bij zijn onderzoek ter gezegder plaatse, waar zich niets dan eene zuivere lijnrechte snede vertoonde, geen het minste verlies van zelfstandigheid te hebben kunnen bespeuren.

Op deze stellige verzekering afgaande, meende CAMBRIDGE nu niet verder te mogen twijfelen en achtte zich daarom, »not „without some reluctance", genoodzaakt, om het exemplaar uit het Britsch museum als eene „tweede soort" van *Liphistius* te beschrijven.

De hooggeachte geleerde moge het mij ten goede houden, dat ik — op het later, door mij verkregen, standpunt en nu, evenals hij in het bezit van een derde, *ongeschonden* voorwerp — mij verplicht acht, ten dezen, d. i. omtrent zijne laatste gevolgtrekking en besluit, in gevoelen te verschillen.

Wanneer onder drie exemplaren van een en hetzelfde hoogst karakteristieke spinnen-geslacht, uit zeer analoge vindplaatsen in een gelijke hemelstreek, die, in alle andere opzichten, eene volkomen overeenkomst van hoofdkenmerken vertoonen, er twee voorkomen, die, *geenerlei ontleedkundige behandeling ondergaan hebbende,* ten duidelijkste een spintepel-toestel bezitten; wanneer dit bij het derde voorwerp — *waaraan eene anatomische bewerking is verricht*, en deze juist ter plaatse waar zich de spintepels bij de andere exemplaren bevinden — niet aanwezig is; dan is het vermoeden, dat het laatste, zij het dan onwillekeurig en onopgemerkt, *geschonden* is geworden, mijns inziens, allezins gewettigd.

Met OTTO HERMAN, die zelfs zonder nog bekend te zijn met deze bijdrage en zonder bepaalde studie over dit onderwerp te hebben gemaakt, in casu reeds „ein Irrthum" meende te zien *), neem ook ik ten minste hier veel liever eene „dwaling" van SCHIÖDTE aan, dan met CAMBRIDGE, eene „tweede soort" van *Liphistius*.

SCHIÖDTE's vermoedelijke dwaling is trouwens zeer vergefelijk, zoo wegens de beschrevene omstandigheden onder welke hij zijn onderzoek bewerkstelligde en wegens de van het familie-type zoo zeer verschillende plaatsing en bouw der mamillae, als uithoofde der bijkomende tweede merkwaardige afwijking bij onze spin, in hare oogenschijnlijk gearticuleerde structuur van het abdomen. In zijne geheele beschouwing van dit dier, uit het oogpunt der anatomia comparata, heeft dit hem het ontbreken der spinorganen bij eene zóó abnormale arachnoïde minder vreemd kunnen doen schijnen. Dit bleek mij bij de aandachtige lezing van den Deenschen tekst zijner verhandeling, nadat die door den heer C. D'ESTREE JR. te 's Hage, met de meeste bereidwilligheid, voor mij in het Hollandsch was overgebracht.

Als men schrijver's diagnose in haar verband met zijne geleerde bespiegelingen raadpleegt, dan moet erkend worden, niet slechts dat SCHIÖDTE's dwaling hem geenszins mag worden toegerekend, maar ook dat die door zijne voortreffelijke behandeling van het onderwerp geheel op den achtergrond en in de schaduw treedt. Bovendien zou altijd nog bewezen moeten worden, dat wij hier met eenen *error in diagnosi* te doen hebben. Immers is de mogelijkheid niet uitgesloten, dat het individu door SCHIÖDTE beschreven, bij eene *vroegere verwonding*, zijne spintepels verloren had, of wel dat hij eene individueele *monstrositas ex defectu* voor zich heeft gehad. De eerste omstandigheid, verlies van sommige ligchaamsdeelen door uitwendige beleediging, komt bij de spinnen, vooral aan de pooten en palpen, menigvuldig voor †). De tweede veronderstelling, omtrent een aangeboren gebrek, is van mindere beteekenis; onder duizenden

---

*) *Ungarn's Spinnen Fauna*. 1878, II Bd. S. 84.

†) Vergelijk ten dezen het *Naschrift*.

van andere spin-soorten is mij een dergelijk defect nooit voorgekomen.

Hoe dit zijn moge, in mijne overtuiging, dat de tot nu toe bekende specimina van *Liphistius* tot dezelfde soort behooren, sta ik niet alleen, daar THORELL mij onlangs schreef, het insgelijks daarvoor te houden: „que le *Liphistius mammillanus* CAMBRIDGE est probablement identique avec le *desultor* Sch.".

Bij het aannemen van deze twee als „verschillende" species, schijnt CAMBRIDGE overigens, hoezeer ter loops, ook nog de mogelijkheid te hebben verondersteld, dat de mamillae zijner soort wel eens geene normale of *ware* spin-tepels zouden kunnen zijn. Misschien zag hij daarin eenige toenadering tot, of verwantschap met den *Liphistius* van SCHIÖDTE „mamillis textoriis nullis". Beide zouden dan, deze in meerdere, gene in mindere mate, als abnormale, onvolledige of onechte, spinnen mogen worden beschouwd.

Hieromtrent schrijft hij: „whether the organs in the British-„Museum specimen are, or not, *true* spinning-organs seems „doubtful, in asmuch as an examination lately made under a „microscope bij mr. A. G. BUTLER has failed to reveal any „spinning-*tubes*".

Ofschoon ik deze uitspraak niet met zekerheid kan weder leggen, dewijl ik het exemplaar der Sumatra-expeditie niet heb willen of durven blootstellen aan beleediging door een mikroskopisch onderzoek der daartoe gedeeltelijk weg te nemen spintepels, kan ik toch aan de juistheid ook van deze waarneming geen onvoorwaardelijk vertrouwen schenken.

Wel is waar vertoonen de tepels van *Liphistius* een' geheel eigenaardigen bouw, en wijkt, althans het grootste of voorste paar, geheel af van dien bij vele andere Mygaliden; doch dáárin ligt volstrekt geene reden, om tot het bestaan van mamillae spuriae te besluiten; immers is in de uitwendige structuur en vorm der spintepels in het algemeen eene ongemeen groote verscheidenheid op te merken. En wanneer men de vier tusschenliggende kleine bij-tepels of penseelen (de „coluli" van MENGE) uitzondert, kan ik, bij bezichtiging met eene sterke loupe, ten minste in mijn exemplaar, geene aanleiding vinden, om eenen rudimentairen toestand der eigenlijke spin-tepels

aan te nemen; integendeel, schijnen deze mij al de uitwendige kenmerken van echte of ware mamillae te bezitten. Tal dezer organen, bij groote en kleine, in- en uitlandsche spinsoorten, of hunner vergroote afbeeldingen vergelijkende, ben ik meer geneigd tot de opvatting, dat die van den *Liphistius*, reeds bij geringe vergrootingen, het typische karakter van „ware" spin-tepels wel zoo duidelijk dragen, dan vele anderen, zoo in de concentrische ringen, de behaarde poriën en de papillen bij de grooteren, als in de drie geledingen met ligt omgebogen eindlid — dat aan de staartvormige kromming van de lange mamillae der gewone Mygale-soorten herinnert — bij de kleineren.

Fig. 1.

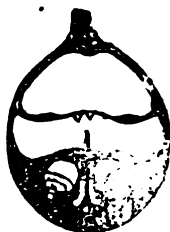


Fig. 2.



Fig. 3.

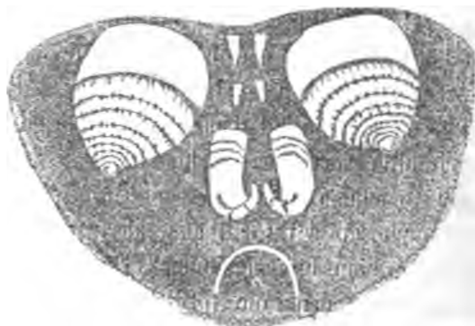


Fig. 1. Buikvlakte; voor de plaatsing der spin-tepels.
Fig. 2. Abdomen, omgekeerd in profiel; voor de plaatsing en den afstand der spin-tepels van den anus; even als Fig. 1 iets vergroot.
Fig. 3. Spin-tepels en anus; veel vergroot.

In de veronderstelling nu, dat de drie bekende *Liphistii* allen spintepels bezitten, kunnen ten slotte hier de volgende vragen

worden gesteld, wier oplossing ik overigens geheel aan meer bevoegde araneologen overlaat.

Kan deze geslachts-naam blijven?

De Grieksche afleiding schijnt mij wel eenig bezwaar daartegen op te leveren, als wijzende deze juist het ontbreken dier organen aan.

Kan de soort-naam „mammillanus" behouden worden?

Wanneer beide *Liphistii* van spintepels (het zij dan verae of spuriae) voorzien zijn, ligt in het geven dier benaming aan één van hen, dunkt mij, eene contradictio in terminis.

Moet ook de afdeeling *Liphistoidae* (sine mamillis), als onderfamilie der Mygalidae, niet mede vervallen?

Immers de in elk geval hoogst twijfelachtige *Liphistius* van SCHIÖDTE is daarvan nog altijd de eenige representant.

Zou dit genus niet gevoegelijk kunnen worden opgenomen in de verwante afdeeling *Atypinae* der Theraphosoidae (cum mamillis)?

Gelijk de type *Atypus* daarvan, is ook Liphistius zeer „atypisch", zij het dan niet wegens de afwezigheid van spinorganen, dan toch zeker wegens de uiterst vreemde rugge-schilden. En ook bij den *Atypus* wordt eene eigenaardigechitine-plaat op den rug van het achterlijf aangetroffen.

Is het, eindelijk, na de ontdekking van CAMBRIDGE, thans door mij gestaafd, nog gewettigd, in dit spinnengeslacht eenen *overgangs-vorm* te zien? Is dan ook de soortnaam van SCHIÖDTE „desultor" wel juist?

Dat door de zoölogen bij de eerste bekendmaking van een spinachtig dier *zonder* spintepels en *met* oogenschijnlijke abdominaal geledingen, aan een tusschen-toestand tusschen Araneïden, Scorpioniden en Phrynoïden of Thelyphoniden werd gedacht, lag wel voor de hand. Bestaat daarvoor nu nog een voldoende grond? Het eerste karakter schijnt te moeten wegvallen, en wat het tweede, den rug, betreft, dit is wel eenigzins gelijkvormig met, maar geenzins gelijk aan de ringvormige, ook de buikvlakte innemende, segmentatie der Scorpioniden, enz. Doch dit gewichtige vraagstuk zal door de volgelingen van DARWIN en HAECKÉL voorzeker niet onbeantwoord worden gelaten. Wellicht zullen wij het antwoord daarop, met nadere toelich-

tingen, eerlang wel van THORELL zelven kunnen vernemen. Misschien toch bevinden zich in de spinnen-collectie van den wereldvermaarden reiziger BECCARI, door dezen voor eenigen tijd uit Sumatra naar Italië overgebracht, en door THORELL voor het Museum te Genua te bewerken, meerdere *Liphistius*-exemplaren. Het met verlangen te gemoet gezien Derde Deel van diens klassieke „*Studi sui Ragni Malesi e Papuani*" zou daardoor gewis eene nog hoogere waarde, ook voor de algemeene en vergelijkende zoölogie, verkrijgen.

NASCHRIFT

OVER DEN

ANETES COELETRON MENGE.

Een jaar na de ontdekking van den *Liphistius*, is er nog eens sprake geweest van eene „spin zonder spin-tepels". 't Gold de bovengenoemde, wier Grieksche geslachtsnaam opnieuw deze kwalificatie in zich sloot. De Hoogleeraar MENGE had gelukkige vondst gedaan.

In het *Verzeichniss Danziger Spinnen*, in *Neueste Schriften der Naturforschenden Gesellschaft in Danzig*, 1850, gaf hij daarvan, in Band 4, S. 71, eene voorloopige, korte diagnose, die, naar mijn weten, later niet werd aangevuld!

Deze betrof, in tegenstelling met de vorige spin, slechts één, zeer klein, spinnenwijfje, van 4 à 5 millimeters, maar, met het oog op het hier behandelde vraagstuk, van nog wel zoo groot belang, daar het niet alleen verstoken was van mamillae, maar ook van de tarsaal-klaauwen, welke laatste, bij wijze van haakpen en kam, anders bij het weven van het spinsel worden gebezigd.

Ofschoon het diertje den oogenstand der *Epeirae* vertoonde, bleef, van den beginne af, onzekerheid bestaan, of de *Anetes* tot de Epeiroïdae, dan wel tot de Thomisoïdae behoorde.

Eerst vijf en twintig jaren daarna is dit een en ander gebleken ten eenenmale op een misverstand, of liever op eene waarnemings-fout, te berusten!

Prof. THORELL, die er in zijne algemeen beroemde *European Spiders*, 1870, pag. 175 en 186, aanteekening van had gehouden, gaf daarover later, in eene noot op zijne *Descriptions of several European and North-African Spiders*, 1875, pag. 6, de volgende rectificatie:

„Prof. MENGE has lately informed me, that his description „of *Anetes coeletron* doubtless is found on a young specimen „of an *Epeira*, probably *E. sollers* — eene gewone Euro„peesche, ook bij ons te lande voorkomende, soort — which „by some accident had lost its tarsal claws and mamillae".

Mijn jeugdige studie-vriend, Dr. PH. BERTKAU van Bonn, lichtte dit „accident", in zijn talentvol *Versuch einer natürlichen Anordnung der Spinnen*, 1878, S. 379, eenigzins nader toe, in deze bewoordingen:

„Wie mir nun MENGE, auf eine Anfrage, gütigst mittheilte, „ist *Anetes* eine Epeiride, die beim herbstlichen Laubkehren „gefangen wurde und, „wahrscheinlich" durch Hin- und Her„stossen mit dem Rechen, ihre *Krallen* verloren habe". In eene mij onlangs gedane schriftelijke mededeeling, noemt BERTKAU niet alleen de „Krallen", maar ook de „*Spinnwarzen*" als volgens MENGE bij dezelfde gelegenheid te loor gegaan!

Dat deze kleine organen bij een zoo teeder spinnetje door eene „hark" zoude *kunnen* worden verwijderd, met behoud van het diertje zelf, komt mij echter niet „wahrscheinlich" voor.

Dergelijke, men zou mogen zeggen, onrijpe „waarnemingen", en deze nog wel op één, niet éens volwassen, voorwerp gedaan, zijn inderdaad bepaalde cruces voor de systematici. Het is dan ook zeker alleen aan het hooge gezag van MENGE in de araneologie toe te schrijven, dat zelfs nu nog Graf E. KEYSERLING, in zijne *Spinnen Amerika's*, 1880, S. 2, polemiseeren kan tegen de plaatsing van *Anetes*, door THORELL, in de Familie der Laterigradae, en dezen, naar ik tot mijne bevreemding lees, ook thans nog „eine merkwürdige Spinne" blijft noemen!

Het is met de woorden van den Hongaarschen araneoloog

HERMAN, die, *libro supra cit.* p. 34, reeds voor twee jaren, zij het dan ook ter loops, er op heeft gewezen, hoe, „*hier* ein *defectes Exemplar* die *Merkwürdigkeit* hat geliefert", dat ik meen deze bijdrage te mogen besluiten:

„Das eindringliche Studium der Lebensweise hat mich zu „der Ueberzeugung geführt, dass man sich eine *Spinne* ohne „Spinn- und Web-organen gar nicht denken kann".

's Gravenhage, den 31sten Januarij, 1880.

DE BETREKKING

TUSSCHEN

SPANNING, VOLUMEN EN TEMPERATUUR BIJ DISSOCIATIE.

DOOR

J. D. VAN DER WAALS.

---

§ 1. De dissociatie, in meest algemeenen zin opgevat, omvat tal van verschijnselen, zoowel op physisch als op chemisch gebied. Op chemisch gebied betreft het steeds een andere groepeering der atomen tot minder samengestelde molekulen; op physisch gebied een andere groepeering der molekulen, een overgang in een anderen aggregaatstoestand. Het zou hieruit schijnen te volgen, dat die verschijnselen streng uit elkander te houden zijn en dat andere wetten te verwachten zijn, hetzij men te doen heeft met wat gewoonlijk dissociatie genoemd wordt, hetzij met die physische veranderingen, die er gewoonlijk niet toe gerekend worden, maar die ik volgens bovenstaande definitie zou wenschen er onder begrepen te zien. Uit het volgende zal echter blijken, dat al mocht er een grens zijn aan te wijzen, waardoor in alle gevallen scheiding werd aangegeven tusschen de chemische en physische verschijnselen der dissociatie, het mogelijk is, ze door de mechanische warmte-theorie uit *één* oogpunt te beschouwen, en dat soortgelijke wetten voor beiden geldig bevonden worden.

§ 2. Tot opsporing van de wet, die het verband aangeeft tusschen spanning, volumen en temperatuur eener in dissociatie verkeerende stof, en die de verhouding, waarin de afzonderlijke bestanddeelen in het heterogene mengsel voorkomen, doet vinden, kunnen twee wegen ingeslagen worden. De eene weg, die de wetten der mechanische warmte-theorie volgt, en die,

daar hij op vasten grondslag rust, tot een zekere uitkomst leidt; maar deze weg heeft tot schaduwzijde, dat hij gewoonlijk in het onzekere laat omtrent het mechanisme, waardoor het verschijnsel wordt voortgebracht. De andere weg, de beschouwingen der kinetische molekuul-theorie volgende, tracht bovenal het mechanisme te doen inzien; dien weg gaande, heeft men dus een veel hooger doel voor oogen. Maar daar die theorie zelve nog tal van niet opgeloste moeielijkheden aanbiedt, loopt men gevaar, een mechanisme te onderstellen, dat niet juist is. — Beide wegen zijn ingeslagen. De laatste, de moeielijkste weg, het eerst. Reeds sedert langeren tijd is onder de scheikundigen een theorie der dissociatie-verschijnselen gangbaar, die onmiddellijk in de taal der kinetische theorie kan omgezet worden, en die, wat de verhouding tusschen de afzonderlijke bestanddeelen van het mengsel betreft bij gelijke temperatuur maar afwisselend volumen, op zoo eenvoudigen grondslag rust, dat zij het kenmerk van waarheid in zich mededraagt. Maar de invloed der temperatuur is zij niet bij machte te bepalen. De poging, door HORSTMANN (*Berliner-Berichte* 1868 pag. 210) daartoe aangewend, berust op onvoldoende grondslagen.

De eerste weg is met uitstekend gevolg, ten minste wat mengsels van gassen betreft, ingeslagen door WILLARD GIBBS. In zijn belangrijk geschrift „On the equilibrium of heterogeneous Substances" (*Trans. Connecticut Acad.* Vol. III, Part. I enz.), leidt hij een formule af, die wij straks zullen terugvinden, en waardoor bij gasvormige dissocieërende mengsels met denzelfden graad van benadering de betrekking tusschen spanning, volumen en temperatuur wordt aangegeven, als waarmede de wetten van BOYLE en GAY-LUSSAC gelden.

§ 3. Die formule, welke hij later nog eens mededeelt en aan de proeven toetst (*On Vapor-densities*, *American Journal of science and arts* Vol. XVIII 1879) berust op een stelling in zijn eerst genoemd geschrift bewezen.

Die stelling luidt aldus „voor het evenwicht van een geïso-„leerd stelsel is het noodzakelijk en voldoende, dat bij alle „mogelijke veranderingen, waarbij de energie van het stelsel gelijk „blijft, de verandering der entropie óf gelijk 0 óf negatief is." Voor de afleiding van zijne formule moet GIBBS echter nog be-

wijzen, dat bij de dissociatie-verschijnselen de verandering der entropie gelijk 0 is, en aannemen, dat de energie en entropie van een gasmengsel, gelijk is aan de som dierzelfde grootheden voor de afzonderlijke bestanddeelen. Ik heb getracht om, onafhankelijk van de door GIBBS aan al zijn onderzoekingen ten grondslag gelegde stelling, de gezochte betrekking te vinden. Ik werd daar te eer toe gebracht, daar de temperatuurfunctie, die in de formule van GIBBS voorkomt, volkomen overeenstemt met de temperatuur-functie, die ik voor de spanning van verzadigden damp in het algemeen had gevonden, en waarvan ik in het voorbeeld van waterdamp de toepassing had gegeven (Over de continuïteit van den gas- en vloeistof-toestand pag. 123).

§ 4. Laat in een volumen $= V$ de eenheid van gewicht van een stof voorhanden zijn. Laat x het gedeelte zijn, dat in gedissociëerden toestand verkeert. Is de stof water, dan stelt x voor de hoeveelheid damp. Is de stof N_2O_4, dan stelt x voor de hoeveelheid NO_2. Is de stof koolzure kalk, dan stelt x voor de hoeveelheid koolzuur. Die hoeveelheid x is in den evenwichtstoestand natuurlijk een bepaalde hoeveelheid, geheel afhankelijk van de grootheden, die den toestand der stof bepalen, bijv. T en V. Noemen wij de energie, die de stof bij de gegeven omstandigheden bezit ε, dan kan ε beschouwd worden als een functie van T, V en x; maar daar x een functie van V en T is, is zij dus ook geheel bepaald door de waarde van volumen en temperatuur.

De grondvergelijking der mechanische warmtetheorie:

$$dQ = d\varepsilon + pdV \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

wordt dan

$$dQ = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right)_{V,X} dT + \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right)_{T,V} dx + \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial V}\right)_{T,X} dV + pdV. \quad (2)$$

en daar

$$dx = \left(\frac{\partial x}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial x}{\partial V}\right)_T dV$$

is, wordt (2)

$$dQ = \left\{\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right)_{V,x} + \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right)_{T,V}\left(\frac{\partial x}{\partial T}\right)_{V}\right\} dT +$$

$$+ \left\{\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right)_{T,V}\left(\frac{\partial x}{\partial V}\right)_{T} + \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial V}\right)_{x,T} + p\right\} dV. \ldots\ldots \quad (3)$$

In deze vergelijkingen zijn Q, ε, en de uitwendige arbeid in dezelfde eenheid, bijv. de calorische eenheid, uitgedrukt.

Passen wij nu op de vergelijking (3) het kenmerk toe, dat uit $\int_a^a \frac{dQ}{T} = 0$ voortvloeit; dus stellen wij, na ze door T gedeeld te hebben, het partieel-differentiaal quotient van den factor van dT volgens V, gelijk aan dat quotient van den factor van dV naar T, dan volgt na eenige herleidingen

$$T\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_{V,x} - \left[p + \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial V}\right)_{T,x}\right] =$$

$$= - T\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{V,T}\left(\frac{\partial x}{\partial T}\right)_{V} + \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right)_{V,T}\left(\frac{\partial x}{\partial V}\right)_{T} \ldots\ldots \quad (4)$$

In al de gevallen nu, waarin het eerste lid dezer vergelijking $= 0$ is, of bij al die berekeningen, waarbij wij met een benadering tevreden zijn, waarbij het eerste lid $= 0$ kan gesteld worden, geeft het tweede lid $= 0$ een partieele differentiaal-vergelijking, die x als een functie van V en T doet kennen, en dus:

$$T\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{V,T}\left(\frac{\partial x}{\partial T}\right)_{V} = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right)_{T,V}\left(\frac{\partial x}{\partial V}\right)_{T} \ldots\ldots \quad (5)$$

§ 5. Om er over te kunnen oordeelen of het eerste lid der vergelijking (4) gelijk 0 is, moeten wij in aanmerking nemen, dat dit het geval is voor een homogene stof, die het geheele volumen V zou vullen; ook voor een mengsel, waarvan de bestanddeelen het geheele volumen vullen, en waarvan de samenstelling niet zou veranderen bij de verandering, die wij óf volumen óf temperatuur zouden doen ondergaan. Immers, in dat

geval is x standvastig, en is dus het tweede lid, en bijgevolg ook het eerste lid, gelijk nul; trouwens, in die gevallen is die betrekking sinds lang bekend. Bij dissociatie, als de bestanddeelen het geheele volumen vullen, is nu wel een der voorwaarden vervuld; maar daar bij de veranderingen, die wij volumen of temperatuur doen ondergaan, ook de waarde van x verandert, zou men twijfel kunnen koesteren omtrent het gelijk nul zijn van het eerste lid der vergelijking (4).

De waarde $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{V,X}$ en $\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial V}\right)_{X,T}$ betreffen echter alleen de veranderingen in de onderstelling dat X standvastig blijft; en dan hebben die grootheden dus een waarde, die onafhankelijk is van de mogelijke of zelfs noodzakelijke verandering van x. Hieruit volgt dus, als bij een dissocieerende stof elk der bestanddeelen het geheele volumen vult:

$$T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{V,X} - \left[p + \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial V}\right)_{X,T}\right] = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

In gevallen, waarin niet elk der bestanddeelen het geheele volumen vult, zooals bij een volumen, waarin een vloeistof of een vast lichaam met afgegeven damp of uitgezonden gas aanwezig is, zal de vergelijking (5) wel niet streng vervuld zijn. Maar in die gevallen zal bij gelijke waarde van x en T een verandering van het totale volumen op de vloeistof of op het vaste lichaam slechts een onbeteekenenden invloed hebben. Zoo zal, als in een ruimte vloeistof en damp aanwezig is, en als door een of ander middel de verdamping belet wordt, ofschoon bij standvastige temperatuur het volumen vergroot wordt, de verminderde spanning het volumen van het vloeistofgedeelte niet merkbaar veranderen en dus ook de verandering der energie der vloeistof verwaarloosd kunnen worden. De geheele verandering dV kan dan gelijk gesteld worden aan de verandering van het volumen, dat het dampvormig gedeelte inneemt, en dan geldt dus de betrekking (6).

§ 6. Een der eenvoudigste voorbeelden van dissociatie zullen wij behandelen tot opheldering van de verkregen formule (5).

Stellen wij een stof, waarbij partieel splitsing der molekulen

in twee molekulen plaats grijpt, bijv. N_2O_4, waarbij zij steeds uiteenvallen tot NO_2 voorkomt. Zij, zooals hierboven, $1-x$ KG, N_2O_4 en x KG, NO_2 in het mengsel voorhanden, bij de temperatuur T in het volumen V. Het aantal molekulen der beide bestanddeelen staat tot elkander als $(1-x):2x$. En dus ook de partiëele drukking door elk der bestanddeelen uitgeoefend p_1 en p_2 heeft dezelfde verhouding. Bijgevolg

$$\frac{p_1}{1-x} = \frac{p_2}{2x} = \frac{p_1+p_2}{1+x}.$$

Nemen wij de juistheid van de wet van DALTON voor gasmengsels aan, dan is $p_1 + p_2 = p$ de gezamenlijke drukking. Dat die wet niet volkomen juist is, erkent iedereen; maar daar het nog niet gevonden is, hoe de constanten, die in de formule voorkomen, welke de betrekking tusschen druk, volumen en temperatuur bij een onveranderlijk samengesteld mengsel aangeeft, afhangen van de verhouding, waarin die bestanddeelen aanwezig zijn, moeten wij ons met deze benadering vergenoegen.

Wij hebben dan

$$p_1 = p\frac{1-x}{1+x} \quad \text{en} \quad p_2 = p\frac{2x}{1+x},$$

Onderstellen wij nu ook de juistheid der wet van BOYLE en GAY-LUSSAC, dan is

$$p_1 V = (1-x) R_1 T,$$

als R_1 de waarde is, welke die grootheid voor een KG, N_2O_4 moet hebben. Evenzoo hebben wij

$$p_2 V = x \,.\, R_2 T,$$

als R_2 die zelfde grootheid voor 1 KG, NO_2 voorstelt, welke tweemaal zoo groot is als R_1. Het product pV vinden wij dan gelijk aan

$$(1+x) R_1 T,$$

of

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{V,T} = \frac{R_1 T}{V} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Nemen wij ook voor een gasmengsel de formule aan,

$$\left(p+\frac{a_x}{V^2}\right)(V-b_x)=(1+x)R_1 T \;.\;.\;.\;.\; (7)$$

dan vinden wij, daar a_x en b_x van x afhangen

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{V,T}=\frac{R_1 T+\left(p+\frac{a_x}{V^2}\right)\frac{\partial b_x}{\partial x}}{V-b_x}-\frac{\frac{\partial a_x}{\partial x}}{V^2}\;.\;.\;.\; (8)$$

Ingeval nu beide gassen niet veel in hun afwijking van de wetten van BOYLE en GAY-LUSSAC verschillen, vindt men nagenoeg

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{V,T}=\frac{R_1 T}{V-b}$$

en dus in de meeste gevallen, tenzij het volumen zeer klein genomen werd, geeft

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{V,T}=\frac{R_1 T}{V}$$

een genoegzamen graad van benadering. Formule (6) toont ons echter, dat er 3 redenen van fout zijn, die in denzelfden zin werken. Daar $\frac{\partial b_x}{\partial x}>0$ zal zijn, en $\frac{\partial a_x}{\partial x}<0$, en er in den noemer $V-b_x$ in plaats van V staat, strekken zij allen om $\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{V,T}$ in werkelijkheid grooter te doen zijn dan de formule (6) uitdrukt.

De formule (7) kan strekken om door een voorbeeld te doen zien, dat de formule (5) bij een gasmengsel van veranderlijke samenstelling vervuld wordt. Immers

$$T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{V,X}=\frac{(1+x)R_1 T}{V-b_x}=p+\frac{a_x}{V^2},$$

en $\frac{a_x}{V^2}$ stelt ook voor de waarde van $\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial V}\right)_{X,T}$.

§ 7. Vóór wij de vergelijking:

$$T\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{V,T}\left(\frac{\partial x}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right)_{T,V}\left(\frac{\partial x}{\partial V}\right)_T$$

integreeren kunnen, moeten wij ook nog $\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right)_{T,V}$ kennen.

Wij moeten dus bepalen, hoeveel de energie toeneemt, als bij hetzelfde volumen en dezelfde temperatuur een zeker aantal molekulen zich splitst. Mochten wij die molekulen als alleen in het volumen voorhanden beschouwen, dan is de grootheid $\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right)_{V,T}$ niet moeielijk te bepalen. Dan is de energie der molekulen N_2O_4, per eenheid van gewicht, gelijk aan

$$\int_0^T C_v\, dT + E_1,$$

en der molekulen NO_2 gelijk aan

$$\int_0^T c_v\, dT + E_2,$$

en dus

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right)_{V,T} = \int (c_v - C_v)\, dT + (E_2 - E_1).$$

De onderstelling, dat zij alleen in het volumen voorkomen, geeft bij niet klein volumen een geringe onnauwkeurigheid. Immers, de molekulen van een gas hebben, doordat zij niet op oneindigen afstand van de anderen zich bevinden, energie verloren. En voor de molekulen, die zich splitsen, zal die hoeveelheid vóór en na de splitsing wel niet even groot zijn; maar is dat bedrag op zichzelf reeds gering, het verschil zullen wij hier te eer mogen verwaarloozen. Vergelijking (5) wordt dan

$$\frac{R_1 T^2}{V}\left(\frac{\partial x}{\partial T}\right)_V = \left\{\int (c_v - C_v)\, dT + (E_2 - E_1)\right\}\left(\frac{\partial x}{\partial V}\right)_T \quad . . . (9)$$

§ 8. Vergelijking (9) kan aldus geïntegreerd worden. Substitueëren wij in:

$$dx = \left(\frac{\partial x}{\partial T}\right)_V \partial T + \left(\frac{\partial x}{\partial V}\right)_T dV,$$

voor $\left(\frac{\partial x}{\partial T}\right)_V$ de waarde uit (9) af te leiden, dan vinden wij:

$$dx = \frac{V}{R_1}\left(\frac{\partial x}{\partial V}\right)_T \left\{ \frac{\int (c_v - C_v)\, dT + (E_2 - E_1)}{T^2} dT + \frac{R_1}{V} dV \right\}$$

en hiernit blijkt, dat x een functie moet zijn van de uitdrukking:

$$K + \int dT \frac{\int (c_v - C_v)\, dT + (E_2 - E_1)}{T^2} + R_1 \log_n V.$$

Zijn c_v en C_v standvastig, dan wordt dus

$$x = F\left\{K - \frac{E_2 - E_1}{T} + (c_v - C_v) \log_n T + R_1 \log_n V\right\} \quad . \; . \; (10)$$

Deze vergelijking veroorlooft ons reeds, zonder dat wij de bijzondere gedaante van F behoeven te kennen, de betrekking te vinden, die tusschen V en T moet bestaan, om de stof denzelfden graad van dissociatie te doen behouden. Die betrekking kan onder de volgende gedaante gebracht worden:

$$T^{\left(\frac{c_v}{C_v} - 1\right)} V^{\left(\frac{C_p}{C_v} - 1\right)} = K_1 e^{\frac{E_2 - E_1}{C_v T}}, \quad . \; . \; . \; (11)$$

Schrijven wij $\frac{c_v}{C_v} = \lambda$, $\frac{C_p}{C_v} = \gamma$ en $\frac{E_2 - E_1}{C_v} = \mu$, dan wordt zij

$$T^{\lambda - 1} V^{\gamma - 1} = K_1 e^{\frac{\mu}{T}}$$

§ 9. Om tot de kennis van de gedaante van F te geraken, schrijven wij eerst (10) liever omgekeerd en dus

$$K - \frac{E_2 - E_1}{T} + (c_v - C_v)\, log_n\, T + R_1\, log_n\, V = \varphi(x)\,,$$

en merken op, dat $\varphi(x) - R_1\, log_n\, V$ slechts een temperatuursfunctie is. Dus moet $\varphi(x) - R_1\, log_n\, V = K_2$ de wet zijn, die bij standvastige temperatuur het verband aangeeft tusschen het volumen en den graad van dissociatie. Die wet kan echter, zooals wij hiervoor in § 2 opmerkten, licht gevonden worden. Wij hebben dan slechts een vergelijking op te stellen, waarin in het eene lid voorkomt het aantal malen, dat in de tijdseenheid een molekuul N_2O_4 zich splitsen zal, en in het andere lid het aantal malen, dat twee molekulen NO_2 zich vereenigen zullen. De kans, dat van de molekulen N_2O_4 zich in de tijdseenheid er een splitse, is evenredig aan het aantal ongesplitste molekulen en evenredig aan zekere functie der temperatuur, en kan dus voorgesteld worden door:

$$(1 - x)\, \psi(T).$$

De kans, dat twee molekulen NO_2 zich vereenigen, is evenredig aan het aantal botsingen van zulke molekulen onderling en aan een tweede functie der temperatuur. Stelt n het aantal molekulen in de eenheid van volumen voor, dan is het aantal botsingen in de eenheid van volumen evenredig aan n^2, en daar het aantal in het volumen V voorhanden molekulen NO_2 door $2x$ kan voorgesteld worden, is dus het aantal botsingen in de eenheid van volumen evenredig aan $\frac{4x^2}{V^2}$ en dus in het volumen V evenredig aan $\frac{4x^2}{V}$. Wij vinden dus:

$$(1 - x)\, \psi(T) = \frac{4x^2}{V} \zeta(T) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

of

$$\frac{4x^2}{(1 - x)V} = \frac{\psi(T)}{\zeta(T)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

en

$$R_1 \log_n \frac{4x^2}{(1-x)V} = R_1 \log_n \frac{\psi(T)}{\zeta(T)} \quad \ldots\ldots (15)$$

Door vergelijking met $\varphi(x) - R_1 \log_n V = K_2$, vinden wij

$$\varphi(x) = R_1 \log_n \frac{4x^2}{1-x}$$

of

$$R_1 \log_n \frac{4x^2}{(1-x)V} = K' - \frac{E_2 - E_1}{T} + (c_v - C_v) \log_n T \,..(16)$$

Deze vergelijking is geheel gelijk aan die, welke GIBBS uit zijne stelling heeft afgeleid, ook in de onderstelling, dat de afwijkingen door molekulair volumen en molekulaire aantrekking teweeggebracht, kunnen verwaarloosd worden.

§ 10. Om deze formule te vergelijken met een door GULDBERG en WAAGE voor hetzelfde verschijnsel gegevene (*Journal für practische Chemie* 1879), zullen wij de partieele drukking der bestanddeelen invoeren. Daar volgens § 6

$$p_1 = p \frac{1-x}{1+x} \quad \text{en} \quad p_2 = p \frac{2x}{1+x}$$

is, vinden wij:

$$\frac{4x^2}{(1-x)V} = \frac{p_2^2}{p p_1 V}(1+x)$$

en $pV = R_1 T(1+x)$ stellende

$$R_1 \log_n \frac{p_2^2}{p_1} = K_3 - \frac{E_2 - E_1}{T} + (c_v - C_v + R_1) \log_n T \,..\, (17)$$

of korter

$$\frac{p_2^2}{p_1} = \psi(T) \ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

De vergelijking van GULDBERG en WAAGE heeft den vorm:

$$p_2^2 = \psi(T)\{p_1 + \varphi(T)\} \ldots\ldots\ldots (19)$$

Hier zijn $\psi(T)$ en $\varphi(T)$ onbekende functiën van de temperatuur; maar men ziet, dat alleen door $\varphi(T)$ gelijk nul te nemen, beide formulen met elkander in overeenstemming kunnen gebracht worden.

Ofschoon dan ook de wijze, waarop ik in § 9 tot de kennis van de gedaante van $\varphi(x)$ gekomen ben, in hoofdzaak de theorie is, door GULDBERG en WAAGE voorgestaan, maar overgebracht in de taal der kinetische theorie, is er toch ook een verschil op te merken.

Volgens GULDBERG en WAAGE is er bij elke temperatuur een zoodanige grootte aan het volumen te geven, dat de geheele stof in dissociatie verkeert. In de theorie, zooals die hier ontwikkeld is, geschiedt dit eerst bij oneindig groot volumen. Nu is het, dunkt mij, moeielijk in te zien, hoe bij een temperatuur, waarbij samengestelde molekulen bestaan kunnen, en dus waarbij er kans van vereeniging aanwezig is, een evenwichtsstand mogelijk is, bij welke geen enkel molekuul zich vereenigd heeft. Men zoeke geen analogie bij verdamping. Daar is ook wel bij een temperatuur, waarbij water bestaan kan, in genoegzaam groot volumen slechts damp aanwezig; maar ondanks al de overeenkomst, die er tusschen die twee verschijnselen is, is er genoeg verschil om dit bij waterdamp mogelijk, en bij de besproken dissociatie onmogelijk te verklaren. Uit een rechtstreeksche behandeling der verdamping zal dit blijken. Nu alleen deze aanwijzing. Bij de dampen hebben wij de tegen elkander opwegende verdamping van voorhanden water, en terugkeer van damp op voorhanden water. Is er onverzadigde damp, dan is ook de oorzaak van verlies van dampmolekulen weggenomen. Bij de besproken dissociatie daarentegen blijft de oorzaak van verlies, n.l. het in elkanders nabijheid komen van molekulen NO_2, steeds bestaan. Misschien heeft men bezwaar tegen de onderstelling, dat een botsing noodig is voor de vereeniging, en meent men, dat niet bepaald in aanraking komen noodig is, opdat de attractie, die vereeniging bewerkt, zich doe gevoelen. Maar dit zou alleen hierop nederkomen, dat men de molekulen een grooter volumen toekende, en dus het aantal malen, dat er vereeniging plaatsgrijpt in zekere standvastige verhouding doen toenemen — behoudens de correctie voor de molekulaire weglengte

van een gas, die van de afmeting volgens de relatieve beweging afhangt, en die ik hier voorloopig verwaarloos.

Afgezien van dit verschil meen ik, dat de voorstelling, die ik hier door de kinetische theorie heb gegeven, van wat bij dissociatie geschiedt, overal tot uitkomsten leidt, overeenkomende met de resultaten uit de door GULDBERG en WAAGE gevolgde wijze van berekening voortvloeiende.

§ 11. Nemen wij de temperatuur constant, dan geeft dus

$$\frac{x^2}{(1-x)V} = \text{Constant}$$

de betrekking aan, die den graad van dissociatie doet vinden als het volumen gegeven is.

Bij een volumen gelijk oneindig, is $x = 1$, of alles is gedissociëerd. Bij een volumen gelijk 0 — dat wil natuurlijk zeggen bij het limietvolumen, waarvoor de stof vatbaar is — is $x = 0$. Deze uitkomsten gelden voor alle temperaturen, waarvoor C een positieve waarde heeft. Bij toenemende temperatuur neemt de waarde van C toe; en dus bij hoogere temperatuur is in hetzelfde volumen een hoogere graad van dissociatie.

Als men x uit de beide vergelijkingen

$$pV = R_1 T(1+x)$$

en

$$\frac{x^2}{(1-x)V} = f(T)$$

elimineert, vindt men de betrekking tusschen spanning, volumen en temperatuur, evenwel slechts bij de reeds vroeger gemaakte onderstelling, dat molekulair volumen en molekulaire attractie verwaarloosd worden.

§ 12. Behandelen wij nu het vraagstuk der verdamping.

In de vergelijking:

$$T\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{V,T}\left(\frac{\partial x}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right)_{T,V}\left(\frac{\partial x}{\partial V}\right)_T$$

wordt $\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{V,T}$ uit de vergelijking $p\,[V-(1-x)\,\sigma] = x\,R_g\,T$

gevonden. In deze laatste vergelijking beteekend σ het spec. volumen der vloeistof. Wij vinden dan nagenoeg

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{V,\,T} = \frac{R_w T}{V - \sigma}.$$

Voor $\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right)_{T,\,V}$ vinden wij als vroeger

$$\int (c_v - C_v)\, d\, T + (E_2 - E_1).$$

De oplossing geeft:

$$\varphi(x) = \left\{ K - \frac{E_2 - E_1}{T} - (C_v - c_v)\, log_n\, T + R_w\, log_n\, (V - \sigma) \right\} \quad . \; . \; (20)$$

Om te vinden welke gedaante $\varphi\,(x)$ moet hebben, gaan wij op soortgelijke wijze als hiervoren te werk. Maar daar niet de botsing van telkens twee molekulen damp water doet ontstaan, maar de botsing van een molekuul op de oppervlakte van reeds gevormd water, hebben wij de vraag te stellen: hoeveel botsingen hebben in de tijdseenheid tegen een bepaald gedeelte der wand plaats? Dat getal is evenredig aan het aantal molekulen, en omgekeerd evenredig aan het volumen en aan zekere functie der temperatuur, en kan dus voorgesteld worden door $\frac{x}{V - \sigma} f\,(T)$. Dat aantal moet even groot zijn, als wat door een gelijk deel der oppervlakte vloeistof wordt uitgezonden, en alleen een temperatuur-functie is. Of dus de geheele wand nat is, heeft geen invloed op het resultaat. Was de wand van dien aard, dat de damp hem niet bevochtigt, dan geschieden de botsingen als bij een gas, n. l. dezelfde molekulen, die den wand naderen, keeren ook terug. Is een gedeelte van den wand nat, dan zal van de naderende molekulen een gedeelte opgenomen worden; maar een even groot aantal wordt daarvoor in de plaats uitgezonden. Is de damp eerst onverzadigd, dan kan bij kleiner wordend volumen oververzadiging plaats grijpen. Hier hebben wij slechts den gewonen evenwichtstoestand op het oog.

Daar $\frac{x}{V-\sigma}$ een temperatuurfunctie is, zal (20) dus veranderen in;

$$R_w \log_n \frac{x}{V-\sigma} = K - \frac{E_2 - E_1}{T} - (C_v - c_v) \log_n T \;.\;. \quad (21)$$

Daar bij gelijkblijvende temperatuur x evenredig is aan de beschikbare ruimte, is de densiteit en dus ook de spanning van den damp alleen een temperatuurfunctie.

§ 13. Wij zouden tot dezelfde uitkomst omtrent de dissociatie ook kunnen geraken op een wijze, die zeer nadert tot die, welke GIBBS heeft gevolgd; maar die, daar wij de hierboven genoemde stelling van GIBBS niet noodig hebben, mededeeling verdient. Schrijven wij n. l.:

$$dQ = d\varepsilon + p dv$$

$$T . \frac{dQ}{T} = d\varepsilon + p dv$$

en noemen wij $\frac{dQ}{T}$ de aangroeiing der entropie, en stellen wij die door $d\eta$ voor, dan zien wij in de vergelijking:

$$T d\eta = d\varepsilon + p dv ,$$

dat bij standvastig volumen de verhouding tusschen de aangroeiingen van energie en entropie gelijk aan T is.

Nemen wij in aanmerking, dat bij ε en η functiën van T en x zijn, dan krijgen wij de volgende vergelijking:

$$\left\{ \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right)_{X, V} + \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right)_{T, V} \left(\frac{\partial x}{\partial T}\right)_V \right\} =$$

$$= T \left\{ \left(\frac{\partial \eta}{\partial T}\right)_{X, V} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)_{T, V} \left(\frac{\partial x}{\partial T}\right)_V \right\} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (22)$$

Daar

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right)_{X, V} = T \left(\frac{\partial \eta}{\partial T}\right)_{X, V}$$

is, vindt men:

$$T = \frac{\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right)_{T,V}}{\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)_{T,V}} \ldots\ldots\ldots\ldots (23)$$

Passen wij deze vergelijking op het boven behandelde geval van dissociatie van N_2O_4 toe, dan hebben wij eerst de uitdrukking te zoeken voor $\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)_{T,V}$.

Voor 1 KG van het mengsel is (J. W. GIBBS Vapor-densities enz.)

$$\eta = (1-x)\left\{H_1 + C_v \log_n T - R_1 \log_n \frac{1-x}{V}\right\} + $$
$$+ x \left\{H_2 + c_v \log_n T - 2 R_1 \log_n \frac{x}{V}\right\} \ldots (24)$$

en dus

$$\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)_{T,V} = -\left\{H_1 + C_v \log_n T - R_1 \log_n \frac{1-x}{V} - R_1\right\} +$$
$$+ \left\{H_2 + c_v \log_n T - R_1 \log_n \frac{x^2}{V^2} - 2 R_1\right\}$$

Door substitutie in (23), vinden wij de vroegere vergelijking terug.

§ 14. Wij zullen nu nog een meer samengesteld geval van dissociatie volgens beide theoriën behandelen om uit de overeenstemming van beider resultaat tot de waarschijnlijke juistheid van den grondslag, waarop zij rusten, te doen besluiten. Nemen wij daartoe de dissociatie van waterdamp tot waterstof en zuurstof. Zij $(1 - 2x)$ het onveranderde gedeelte, dan is $\frac{2x}{9}$ het gehalte aan waterstof en $\frac{16x}{9}$ het gehalte aan zuurstof. Het aantal molekulen staat tot elkander als $(1 - 2x) : 2x : x$. Om uit de bestanddeelen weder waterdamp te vormen, moeten $2x$ molekulen

waterstof en 1 molekuul zuurstof in botsing komen; of, wil men liever, onder elkanders onmiddelijk bereik. Om uit den waterdamp de bestanddeelen te doen ontstaan, moeten 2 molekulen waterdamp met elkander in botsing komen, die zich dan splitsen in 2 molekulen H_2 en 1 molekuul O_2.

Nu is, bij gegeven temperatuur, het aantal botsingen van 2 molekulen H_2, in de een heidvan tijd in de eenheid van volumen, evenredig aan $\frac{4x^2}{V^2}$ en de kans, dat een dergelijke combinatie met een molekuul zuurstof in botsing kome, dus gelijk aan

$$\frac{4x^2}{V^2} \cdot \frac{x}{V} \psi(T).$$

Het aantal ontledingen is

$$\frac{(1-2x)^2}{V^2} \zeta(T),$$

en dus

$$\frac{x^3}{(1-2x)^2 V} = f(T) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

En deze zelfde betrekking vindt men door toepassing van (23), terwijl de temperatuurfunctie dezelfde gedaante heeft als in de vorige gevallen.

Men ziet uit deze gevallen, dat de temperatuurfunctie een algemeene, maar dat voor de bepaling van de wijze, waarop de graad van dissociatie in de formule voorkomt, de kennis van het proces noodig is, zooals het in het behandelde plaats grijpt. Misschien zijn er gevallen, waarbij het proces eenigszins onzeker is; dan hebben wij in de afleiding der formule, volgens de theorie van GIBBS of volgens formule (23), een kenmerk, waaraan de onderstelling, die men omtrent het proces gevormd had, kan getoetst worden.

§ 15. Een zwarigheid biedt in dat opzicht het geval aan, waar dissociatie plaats grijpt van een stof, die oorspronkelijk vast is, in bestanddeelen, die gasvormig zijn. Ik zal als voorbeeld dezelfde stof kiezen, die door GULDBERG en WAAGE in hun

vroeger genoemden arbeid als voorbeeld gekozen is, om daarop hun principe van de chemische werking met inachtneming der massa's toe te passen, n. l. de carbaminzure ammoniak, die zich splitst in 1 molekuul koolzuur en 2 molekulen ammonia. Zij komen tot het besluit, dat de spanning in dat geval alleen een temperatuurfunctie is, evenals dat bij de verdamping het geval is. De formule (23) leidt in dat geval tot hetzelfde besluit. Dus als bijv. x voorstelt de hoeveelheid van een der gedissocieërde bestanddeelen, moet $\frac{x}{V}$ een temperatuurfunctie zijn (V de beschikbare ruimte voorstellende).

Stel dat het evenwicht is ingetreden, en dat dan de nog aanwezige vaste stof, voor zoover die dus nog niet gedissocieërd is, wordt afgesloten. Dan zal natuurlijk het evenwicht blijven bestaan. In dat geval heeft men in de nu van de vaste stof afgesloten ruimte een aantal molekulen koolzuur en ammonia, die die wij door x en $2x$ zullen voorstellen. Het aantal malen, dat een combinatie van 1 molekuul koolzuur en 2 molekulen ammonia in de eenheid van volumen voorkomen zal, die tot verbinding overgaat, kan voorgesteld worden door $\frac{x^3}{V^3}\,\psi(T)$, en in het beschikbaar volumen door $V\frac{x^3}{V^3}\,\psi(T)$. In den tijd dt wordt dus gevormd een aantal molekulen van de verbinding gelijk aan $dt\,.\,V\frac{x^3}{V^3}\,\psi(T)$, terwijl er omgekeerd geen verbinding nog aangewezen is, die door dissociatie in denzelfden tijd een even groot aantal bestanddeelen terug oplevert, noodig om den stationairen toestand te doen voortduren. Men kan die niet vinden in den pasgevormden voorraad. Van dien zal toch in den tijd dt een hoeveelheid dissocieëren, evenredig aan die hoeveelheid en aan een zekere functie van de temperatuur, dus gelijk aan

$$dt\,V\frac{x^3}{V^3}\,\psi(T)\,\varphi(T)\,.$$

Alleen dus door $\varphi(T) = 1$ te nemen, zou de stationaire toestand behouden kunnen blijven. Maar $\varphi(T) = 1$ te nemen,

staat gelijk met het bestaan der verbinding onmogelijk te verklaren, en dan komt men dus in tegenspraak met het verschijnsel, als er overmaat van verbinding aanwezig is. Wij zijn dus genoodzaakt in dergelijke gevallen aan te nemen, dat behalve de gasvormige bestanddeelen, ook nog in de ruimte de verbinding aanwezig is, bijv. als nevel, of als afzonderlijke molekulen. Die hoeveelheid zal evenredig aan het volumen zijn, maar bij verschillende temperaturen verschillend. De hoeveelheid, die dus in den tijd dt dissociëeren zal, kan voorgesteld worden door $V\zeta(T)\,dt$. en dan geldt de betrekking

$$V\frac{x^3}{V^3}\varphi(T) = V\zeta(T)$$

of

$$\frac{x}{V} = f(T),$$

of de spanning slechts een temperatuursfunctie *).

Ofschoon de wijze, waarop de temperatuursfunctie der dissociatie verkregen is, nog buiten de beschouwingen der kinetische theorie ligt, geloof ik niet, dat tegen een afleiding uit deze theorie groote zwarigheden bestaan. Ik koester de hoop eerlang een proeve van afleiding dezer temperatuursfunctie uit de theorie der molekulaire bewegingen te kunnen geven.

Amsterdam, Januari 1880.

*) Mocht de verbinding alleen in vasten toestand bestaan kunnen, en niet in gasvorm, dan is zulk een geval geheel tot verdamping terug te brengen — een verdamping, waarbij het verdampende molekuul zich tegelijkertijd in eenvoudiger bestanddeelen splitst.

OVER DE METHODE VAN JAMIN

TER BEPALING VAN DE

SAMENDRUKBAARHEID DER VLOEISTOFFEN.

DOOR

R. A. MEES.

De bepaling van de samendrukbaarheid der vloeistoffen levert zooals bekend is groote moeielijkheden op. Vooreerst wegens de in het algemeen zoo kleine waarde dier samendrukbaarheid. Deze moeielijkheid laat zich echter door het inachtnemen van een zeer groote nauwkeurigheid wel overwinnen. Erger is een tweede bezwaar, hetgeen zich bij die bepaling voordoet. Wanneer men een vloeistof samendrukt, verandert namelijk niet alleen het volumen der vloeistof maar tevens dat van het vat, waarin de vloeistof besloten is. Men moet daarom aan de schijnbare verandering van volumen van de vloeistof een correctie aanbrengen wegens de verandering van volumen van het vat om tot de ware verandering van volumen der vloeistof te geraken. De juiste waarde dier correctie is nu echter zeer moeielijk experimenteel te bepalen. Bij al de bepalingen, welke vóór het jaar 1868 verricht zijn, heeft men bij de berekening dier aan te brengen correctie zich niet alleen bediend van direct door het experiment verworven data maar tegelijkertijd gebruik gemaakt van veronderstellingen uit de theorie der elasticiteit, waarvan de juistheid aan grooten twijfel onderhevig was, en die dan ook bij de verschillende experimentatoren niet geheel dezelfde waren. Wel is waar zou men theoretisch bij gebruikmaking van de methode, waarvan zich het eerst REGNAULT be-

diend heeft *), tot een juiste waarde dier correctie kunnen komen; maar daartoe zou men van het piëzometervat den vorm en van de stof, waaruit het bestaat, den lineairen samendrukbaarheids-coëfficiënt moeten kennen, en deze beide grootheden laten zich in de meeste gevallen niet met groote juistheid aangeven. Daarenboven zijn de formules, die tot de berekening der correctie uit de experimenteele data moeten dienen, zeer gecompliceerd, en tot een nauwkeurige berekening van de zoo kleine waarde dier correctie niet zeer geschikt.

Het was daarom dat JAMIN, in vereeniging met AMAURY en DESCAMPS, in 1868 met een nieuwe methode te voorschijn trad †), die aan al de bezwaren van de vroegere methoden zou tegemoet komen. Het beginsel dezer methode van JAMIN is zeer eenvoudig. Het bestaat hierin, dat men de verandering van volumen van het vat direct meet. Daartoe stelt JAMIN een piëzometer die het samen te drukken vocht bevat in een gesloten vat met water, hetwelk alleen door een nauwe gecalibreerde buis met de buitenlucht correspondeert. De buis des piëzometers gaat luchtdicht door den wand van het omringende vat, zoodat men op de vloeistof binnen den piëzometer een druk kan uitoefenen, en de schijnbare samendrukking der vloeistof uit het dalen van het niveau der vloeistof in de buis kan afleiden. Door de drukking binnen het piëzometervat zet echter dit vat zich uit en drukt het water in het omhullende vat in de daaraan verbonden buis. De grootte van de verplaatsing van het niveau van het water in die buis is een maat voor de uitzetting van het piëzometervat. Wij hebben de op deze wijze direct gevonden uitzetting van het piëzometervat slechts af te trekken van de waargenomen schijnbare volumenvermindering der vloeistof binnen het piëzometervat om de ware volumenvermindering der vloeistof te verkrijgen.

Daar deze methode geheel onafhankelijk is van eenige hypothese schrijft JAMIN aan haar een zeer groote waarde toe. Ook ik achtte haar én om deze reden én om hare betrek-

*) *Mémoires de l'Académie des sciences de l'Institut de France*, T. 81, p. 429. 1847.

†) *Comptes rendus*, t. 66, p. 1104. 1868.

kelijke eenvoudigheid verre te verkiezen boven de methode van REGNAULT. Toen ik haar uit JAMIN's *Petit Traité de Physique* *), waar hij er een zeer korte beschrijving van geeft, leerde kennen, besloot ik haar daarom bij een onderzoek hetgeen ik mij had voorgesteld te gebruiken. Ik heb mij dan ook van haar ter bepaling van de samendrukbaarheid van water en van andere stoffen bediend. De uitkomsten door mij bij water verkregen zijn reeds in de *Verslagen en Mededeelingen* dezer Academie gepubliceerd †); de overige door mij verkregen uitkomsten hoop ik spoedig te kunnen publiceeren.

Bij het berekenen en discussiëeren der nog niet gepubliceerde proeven ben ik echter tot de ontdekking gekomen, dat die schijnbaar zoo eenvoudige methode van JAMIN in wezenlijkheid niet zoo eenvoudig is; dat zij niet voortreffelijker is dan de methode van REGNAULT en met deze dezelfde gebreken deelt die wij hierboven met enkele woorden reeds hebben aangeduid.

Bij de methode van JAMIN wordt de drukking alleen aangebracht binnen het piëzometervat; buiten dat vat heerscht voortdurend de atmospherische druk. Gemeten moeten worden de schijnbare samendrukking van de vloeistof en de uitzetting van het *inwendig* volumen van het piëzometervat. In plaats van het laatste meet men echter iets anders, namelijk de uitzetting van het *uitwendig* volumen van het piëzometervat. Reeds vroeger was ik er op bedacht geweest, dat de uitzetting van het *inwendig* en die van het *uitwendig* volumen van het vat niet volkomen gelijk behoefden te zijn, maar het verschil tusschen deze beide uitzettingen kwam mij voor zoo klein te zijn, dat ik het met volkomen gerustheid meende te kunnen verwaarloozen. De berekening heeft mij echter geleerd, dat dit verschil volstrekt niet zoo klein is, dat het verwaarloosd mag worden, en dat de waarden voor de samendrukbaarheid der vloeistoffen volgens de methode van JAMIN verkregen dus alle een correctie behoeven. Die correctie blijkt juist gelijk te zijn aan den samendrukbaarheidscoëfficiënt der vaste stof waaruit het piëzometervat bestaat;

---

*) p. 42.

†) *Verslagen en Mededeelingen*, Afdeeling Natuurkunde, 2e Reeks, Deel 14, p. 108.

hiermede moet de berekende waarde voor den samendrukbaarheids-coëfficiënt der vloeistof vermeerderd worden om de ware waarde te verkrijgen.

Dat dit het geval is blijkt uit het volgende analytische onderzoek naar de bij de methode van JAMIN optredende volumenverandering van het piëzometervat.

WÜLLNER geeft in zijn *Lehrbuch der Experimentalphysik* *) de aan LAMÉ's *Théorie mathématique de l'élasticité des corps solides* ontleende formules ter berekening van de proeven van REGNAULT omtrent de samendrukbaarheid der vloeistoffen. Deze zelfde formules kunnen wij in ons geval toepassen.

Denken wij ons in de eerste plaats een door een bolvormige schaal ingesloten ruimte. De vaste stof, waaruit de schaal bestaat zij homogeen en van constante elasticiteit in alle richtingen. Oorspronkelijk heersche binnen en buiten de atmospherische druk; de straal van het bolvormig inwendig oppervlak der schaal zij R_0, die van het uitwendig oppervlak R_1, die van een bolvormig oppervlak in het inwendige der schaal gelegen en concentrisch met binnen- en buitenoppervlak zij R. De drukking binnen de ruimte neme nu toe om P, terwijl buiten de oorspronkelijke drukking blijve heerschen. Daardoor zal het inwendig volumen der schaal toenemen. R_0 zal worden $R_0 (1 + \varphi_0)$; maar tevens zullen ook R en R_1 grooter worden, zij gaan over in $R (1 + \varphi)$ en $R_1 (1 + \varphi_1)$. De ruimte begrensd door het binnenoppervlak der schaal zij V_0 en neme toe om ΔV_0, die begrensd door het buitenoppervlak zij V_1 en neme toe om ΔV_1. Dan is:

$$V_0 = \frac{4}{3} \pi R_0^3, \qquad V_1 = \frac{4}{3} \pi R_1^3,$$

en, zoolang φ een kleine waarde heeft, zoodat men de tweede macht van φ kan verwaarloozen:

$$\Delta V_0 = 3 \varphi_0 V_0, \qquad \Delta V_1 = 3 \varphi_1 V_1.$$

De uitdrukking voor φ vindt men bij LAMÉ †). Zij is voor ons geval de volgende:

---

*) Dritte Auflage, Bd. I, pp. 227—230 in verband met pp. 186—192.

†) LAMÉ, *Théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*, 2e édition, pp. 211—213.

$$= - \frac{\cdot}{P}$$

[illegible]

$$= \text{[illegible]} = \text{[illegible]} \cdot \frac{R_0^3 R_1^3}{R_1^3 - R_0^3} P.$$

[illegible] afhangen van den [illegible] straal bestaat. Noemen [illegible] dezer stof, C haar [illegible] 2μ de verhouding tus- [illegible] oppervlak van de dwarse [illegible] vervaardigd en de verlen- [illegible] staaf, wanneer zij door [illegible], wordt uitgerekt. [illegible] volgende betrekkingen:

$$\text{[illegible]} \qquad k = \frac{E}{1 + \mu},$$

$$\text{[illegible]} = \frac{3}{3K + k}.$$

[illegible] gemakkelijk de beide [illegible]

$$\text{[illegible]} = C V_0 \;.\;.\;.\;.\; (1)$$

$$\text{[illegible]} = \frac{3}{2} \frac{1-\mu}{E} \cdot \frac{R_0^3}{R_1^3 - R_0^3} \;.\;.\;.\; (2)$$

[illegible] tweede plaats een ruimte begrensd door een [illegible] eindvlakken. Zijn

R_0 de straal van het [illegible]oppervlak des cilinders en der [illegible]

R_1 de straal van het [illegible]oppervlak van beiden,

---

*) Bij LAMÉ worden die constanten aangeduid door de letters λ en 2μ.

R de straal van een cilindrisch oppervlak binnen het cilindrische gedeelte van den wand gelegen en coaxiaal met binnen- en buitenoppervlak,

H de hoogte van het cilindrische gedeelte van den wand,

V_0 en V_1 het volumen begrensd door het binnen- en buitenoppervlak der beide halfbolvormige eindvlakken te zamen,

V'_0 en V'_1 het volumen begrensd door het binnen- en buitenoppervlak van het cilindrische gedeelte,

$U_0 = V_0 + V'_0$ en $U_1 = V_1 + V'_1$ de volumina begrensd door de inwendige en uitwendige oppervlakken van den geheelen wand.

Denken wij ons de drukking binnen het vat weder evenals vroeger om P grooter dan daarbuiten, dan zal daardoor eene uitzetting van het vat bewerkt worden

Voor de uitzetting van de beide halfbolvormige uiteinden te zamen gelden hier weder de formules (1) en (2).

De uitzetting van het cilindrische gedeelte van het vat vinden wij als volgt.

H worde $H(1 + \delta)$, R worde $R(1 + \varphi')$, dan is:

$$V'_0 = \pi R_0^2 H, \qquad V'_1 = \pi R_1^2 H,$$

en als wij de tweede machten van δ en φ' verwaarloozen:

$$\Delta V'_0 = V'_0 (\delta + 2\varphi_0'), \qquad \Delta V'_1 = V_1 (\delta + 2\varphi_1').$$

De uitdrukkingen voor δ en φ' vindt men bij LAMÉ *). Zij zijn voor ons geval:

$$\varphi' = b' + \frac{c'}{R^2} \quad \text{en} \quad \delta = b',$$

waarin:

$$b' = \frac{1}{3K + k} \cdot \frac{R_0^2}{R_1^2 - R_0^2} P, \quad c' = \frac{1}{k} \cdot \frac{R_0^2 R_1^2}{R_1^2 - R_0^2} P.$$

*) LAMÉ, l. c. pp. 188—192.

Uit deze formules laten zich gemakkelijk de beide volgende afleiden:

$$\frac{\Delta V'_1 - \Delta V'_0}{P} = \frac{3}{3K+k} V'_0 = C V'_0 \ldots . \quad (3)$$

$$\frac{\Delta V'_1}{P V'_1} = \left(\frac{3}{3K+k} + \frac{2}{k}\right) \cdot \frac{R_0^2}{R_1^2 - R_0^2} =$$

$$= \frac{5-4\mu}{E} \cdot \frac{R_0^2}{R_1^2 - R_0^2} \ldots \ldots \quad (4)$$

Deze vereenigd met (1) en (2) geven ten slotte:

$$\frac{\Delta U_1 - \Delta U_0}{P} = C U_0 \ldots \ldots \quad (5)$$

$$\frac{\Delta U_1}{P} = \frac{9}{2} \cdot \frac{1-\mu}{E} \cdot \frac{R_0^3}{R_1^3 - R_0^3} V_1 + \frac{5-4\mu}{E} \cdot \frac{R_0^2}{R_1^2 - R_0^2} V'_1 =$$

$$= 6\pi \frac{1-\mu}{E} \cdot \frac{R_0^3 R_1^3}{R_1^3 - R_0^3} + \pi . \frac{5-4\mu}{E} : \frac{R_1^2 R_0^2}{R_0^2 - R_1^2} H \ldots \quad (6)$$

De formules (1), (3) en (5) leeren ons, dat bij een bolvormig vat, een cilindrisch vat met platte eindvlakken en een cilindrisch vat met halfbolvormige eindvlakken de ruimte begrensd door het binnenoppervlak van den wand zich minder uitzet dan die begrensd door het buitenoppervlak, en het verschil tusschen deze beide uitzettingen in elk der drie gevallen juist gelijk is aan de volumenvermindering welke een massieve kern van hetzelfde volumen als het inwendig volumen van het vat en van dezelfde stof als de wand zou ondergaan, wanneer zij over haar geheele oppervlak werd samengedrukt met een kracht gelijk aan de drukking P *).

---

*) Nog zij opgemerkt, dat deze uitkomst geheel onafhankelijk is van de dikte van den wand of van het volumen van het vat. Natuurlijk echter slechts zoolang als de verhouding tusschen de wanddikte en den straal van het bolvormige of cilindervormige vat niet beneden een zekere grens daalt; daar anders de door den

Om dat verschil vindt men dus de ware vermindering van volumen der vloeistof bij de methode van JAMIN te klein, wanneer men van de waargenomen schijnbare vermindering van het volumen der vloeistof in het piëzometervat aftrekt de waargenomen uitzetting van het *uitwendig* volumen van het piëzometervat in plaats van die van het *inwendig* volumen van dat vat.

Om C of den kubieken samendrukbaarheids-coëfficiënt van de stof, waaruit het piëzometervat bestaat, wordt dus de door deze methode bepaalde samendrukbaarheids-coëfficiënt der vloeistof te klein gevonden.

Onze formules (2), (4) en (6) geven nu echter het middel aan de hand om uit de waargenomen uitzetting van het buitenoppervlak des piëzometers C te berekenen. Daartoe is het dan echter noodig met groote nauwkeurigheid den vorm en de verschillende afmetingen van het piëzometervat te bepalen. Verder moet men van de stof, waaruit het piëzometervat bestaat, óf E, óf μ kennen. Bovengenoemde formules geven dan μ of E, terwijl daaruit vervolgens C te berekenen is door de formule:

$$C = 3 \frac{1 - 2\mu}{E} \text{ *)}.$$

Vergelijkt men de hierboven gegeven theorie van JAMIN's methode met de theorie van de methode van REGNAULT, zooals die door WÜLLNER ontwikkeld is in zijn *Lehrbuch der Experimentalphysik*, dan ziet men gemakkelijk in, dat beide methoden zeer na aan elkander verwant zijn. JAMIN's methode blijkt dan slechts een wijziging te zijn van die van REGNAULT en met deze alle hieraan verbonden gebreken te deelen. Zoowel bij JAMIN als bij REGNAULT wordt gemeten het verschil tusschen de samendrukbaarheid van de vloeistof en die van de vaste stof, waaruit het

drnk veroorzaakte verandering in de lineaire afmetingen van het vat niet meer ten opzichte van deze zeer klein blijft, zooals hier voortdurend verondersteld is.

Ook is verondersteld, dat het vat zich vrijelijk in alle richtingen kan uitzetten Is dit niet het geval, dan komt men tot een eenigszins andere uitkomst, zooals zich bijv. voor een cilindervormig vat met vlakke onbewegelijke uiteinden gemakkelijk door toepassing der formules van LAMÉ laat aantoonen.

*) Als éénheid van druk wordt hier, even als in het voorafgaande, aangenomen de druk van één kilogram per kwadraatmillimeter.

piëzometervat bestaat; maar terwijl bij JAMIN dit verschil gevonden wordt door de drukking *alleen binnen* den piëzometer te laten werken en dan van de schijnbare vermindering van volumen van de vloeistof binnen den piëzometer de vermeerdering van volumen van het piëzometervat af te trekken, vindt men bij REGNAULT dit verschil terstond uit de schijnbare vermindering van het volumen der vloeistof binnen den piëzometer, wanneer men de drukking *tegelijkertijd buiten en binnen* het piëzometervat laat werken. Terwijl echter bij JAMIN dezelfde proef het middel oplevert om de samendrukbaarheid der vaste stof des piëzometers te berekenen uit de waargenomen vermeerdering van het uitwendig volumen van het piëzometervat, behoeft men daartoe bij REGNAULT nog een afzonderlijke proef, waarbij men de drukking alleen op het *buiten*oppervlak des piëzometers laat werken en de daardoor voortgebrachte vermindering van het inwendig volumen van het piëzometervat waarneemt.

Elk der methoden heeft haar eigenaardige voor- en nadeelen.

De voordeelen van de methode van JAMIN zijn:

1°. dat men slechts één proef behoeft te doen, terwijl die van REGNAULT er twee vereischt;

2°. dat het den piëzometer omringende vat eenvoudiger kan zijn dan bij REGNAULT, omdat men daarbij minder te vreezen heeft voor lekken, daar de druk in dit vat nooit stijgt boven den atmospherischen, terwijl hij bij REGNAULT zeer groote waarden verkrijgt;

3°. dat de buizen en overige toestellen, die den grooten luchtdruk naar den piëzometer leiden, eenvoudiger kunnen zijn dan bij REGNAULT, omdat men den grooten druk slechts binnen en niet zooals bij REGNAULT ook buiten den piëzometer behoeft te laten werken.

Daartegenover staan echter de volgende voordeelen van de methode van REGNAULT:

1° men behoeft slechts één glazen buis te calibreeren en niet zooals bij JAMIN twee;

2°. kleine veranderingen van temperatuur hebben hier iets minder invloed op de resultaten dan bij JAMIN, omdat hier slechts de niveau-veranderingen der vloeistof *binnen* het piëzometervat worden waargenomen;

3°. de bepaling van het verschil tusschen de samendrukbaarheid van de vloeistof en die van de vaste stof des piëzometers heeft hier iets nauwkeuriger plaats dan bij JAMIN, omdat het hier *direct* wordt waargenomen, bij JAMIN daarentegen wordt afgeleid uit *twee* aflezingen.

De voordeelen van de beide methoden wegen dus zoo ongeveer tegen elkander op. De methode van JAMIN is wat eenvoudiger, die van REGNAULT wellicht iets nauwkeuriger. Ik zeg wellicht, omdat tegenover de bovengenoemde redenen voor een iets grootere nauwkeurigheid der methode van REGNAULT er andere redenen zijn aan te voeren, die deze nauwkeurigheid misschien weder iets verminderen. Vooreerst toch duren de proeven langer bij REGNAULT dan bij JAMIN en zullen dus kleine temperatuurveranderingen hierom iets meer invloed hebben; ten tweede moet men den druk gedurende geruimen tijd constant kunnen houden, wil men er zeker van zijn, dat hij bij de beide bij elkander behoorende proeven van REGNAULT dezelfde is, terwijl dit bij JAMIN niet noodig is. Ten derde, terwijl de schijnbare samendrukbaarheid der vloeistof zich bij REGNAULT iets nauwkeuriger laat bepalen dan bij JAMIN, zal daarentegen de correctie, die daaraan is aan te brengen om tot de ware samendrukbaarheid te komen bij JAMIN iets nauwkeuriger gevonden worden; omdat bij JAMIN beiden, de schijnbare samendrukbaarheid en de aan te brengen correctie, door dezelfde proef bepaald worden, zoodat kleine onbekende storende invloeden, die voornamelijk op de vloeistof in het den piëzometer omringende vat zullen werken, en waardoor de eene, de schijnbare samendrukbaarheid bijv., te groot of te klein gevonden wordt, de andere, de correctie, juist omgekeerd te klein of te groot doet worden, zoodat in de som van beiden de werking dier onbekende invloeden grootendeels wordt opgeheven. Bij REGNAULT is dit niet het geval, omdat de correctie hier door een afzonderlijke proef moet bepaald worden.

Alles samengenomen geloof ik, dat beide methoden elkander wat de nauwkeurigheid der uitkomsten betreft weinig zullen ontloopen. In eenvoudigheid wint echter de methode van JAMIN het van die van REGNAULT.

Aan de door AMAURY en DESCAMPS volgens de methode van

JAMIN verkregen samendrukbaarheids-coëfficiënten *) moet dus nog de kubieke samendrukbaarheids-coëfficiënt van het glas, waaruit hun piëzometervat bestond, worden toegevoegd.

Voor den samendrukbaarheids-coëfficiënt van gewoon wit glas vond GRASSI †) uit zijn proeven:

$$C = 0{,}000.001.687.5,$$

WERTHEIM §) leidde uit REGNAULT's proeven de waarde

$$C = 0{,}000.001.717.3$$

af.

Beiden stelden $\mu = \frac{1}{3}$. Met deze beide waarden van C vindt men, als men den druk van één atmospheer gelijk aan 1,0333 kilogram per kwadraat-centimeter aanneemt, voor den lineairen elasticiteits-coëfficiënt van glas respectievelijk:

$$E = 6123{,}3 \quad \text{en} \quad E = 6017{,}1\,;$$

terwijl WERTHEIM daarvoor uit proeven omtrent de verlenging van een glazen staaf

$$E = 6040$$

gevonden had.

WÜLLNER **) heeft deze laatste waarde van E als de juiste aangenomen voor het glas van den piëzometer van REGNAULT, en daarmede uit REGNAULT's proeven μ en vervolgens C berekend. Hij vindt:

$$\mu = 0{,}319\,, \qquad C = 0{,}000.001.85 \text{ ††}).$$

*) *Comptes rendus*, t. 68, p. 1564 (1869).

†) *Annales de Chimie et de Physique*, 3e Série, t. 31, p. 475.

§) *Annales de Chimie et de Physique*, 3e Série, t. 23, p. 92. WERTHEIM en GRASSI verstaan onder samendrukbaarheids-coëfficiënt van een vaste stof iets anders dan wij. De door hen daarvoor gegeven waarden zijn daarom $\frac{4}{3}$ maal grooter dan de door ons in den tekst daarvoor aangegevene.

**) l. c. p. 192.

††) WÜLLNER geeft hiervoor een andere waarde, omdat de éénheid van druk bij hem een andere is dan bij ons. Wij hebben bij deze getalwaarden den druk van een atmospheer overal als éénheid van druk aangenomen.

Nemen wij om met de uitkomsten van GRASSI *) vergelijkbare uitkomsten te verkrijgen voor C de door dezen gevonden waarde, dan moet deze bij de uitkomsten van AMAURY en DESCAMPS worden opgeteld.

Voor water vonden zij bij 15^0:

0,000.045.7;

na aanbrenging der correctie wordt dit

0,000.047.4,

een waarde, die gelegen is tusschen de door GRASSI gevonden waarden:

0,000.047.7 bij 13^0,4
0,000.046.3 en 0,000.046 0 bij 18^0,0.

Voor kwikzilver vinden AMAURY en DESCAMPS bij 15^0:

0,000.001.87

of na aanbrenging der correctie

0,000.003.56

terwijl GRASSI uit REGNAULT's proeven de veel kleinere waarde;

0,000.002.95 bij 0^0

afleidt.

Wij vonden †) voor water:

0,000.047.5 bij 11^0,3

of na aanbrenging der correctie:

0,000.049.2

welke waarde iets grooter is dan die door GRASSI gevonden.

---

*) l. c. p. 477.
†) l. c. p. 126.

Omtrent de aan te brengen correctie bestaat echter altijd nog eenige onzekerheid, omdat omtrent de juiste waarde der samendrukbaarheid van glas nog eenige onzekerheid bestaat, en deze waarde voor het door de verschillende onderzoekers gebruikte glas niet volkomen dezelfde behoeft te zijn. Ik denk hierop weldra bij de publicatie mijner onderzoekingen over de samendrukbaarheid van kwikzilver terug te komen.

Groningen, Januari 1880.

VERSLAG

VAN DE HEEREN

HUGO DE VRIES en M. TREUB.

OVER EENE

VERHANDELING VAN DEN HEER Dr. J. W. MOLL.

Uitgebracht in de Zitting van 27 Maart 1880.



De ondergeteekenden, in de vorige vergadering benoemd om der Afdeeling Natuurkunde van de Koninklijke Akademie van Wetenschappen van raad en voorlichting te dienen omtrent een voor de *Verslagen en Mededeelingen* aangeboden verhandeling van den Heer J. W. MOLL, getiteld: *Untersuchungen über Tropfenausscheidung und Injection bei Blättern*, hebben de eer hierover het volgende verslag uit te brengen:

Geen deel der plantenphysiologie is zoo rijk aan onderzoekingen, en toch zoo arm aan goed vastgestelde en goed begrepen feiten, als de leer van de beweging van het water in de planten. Sedert de beroemde onderzoekingen van HALES, hebben een groot aantal geleerden zich met de studie dezer verschijnselen bezig gehouden, en toch kon SACHS nog vóór weinige jaren, in de laatste uitgave van zijn *Lehrbuch der Botanik*, met goeden grond zeggen: „Gegenwärtig ist es nicht möglich, die Mechanik dieser Bewegungen im Einzeln deductiv und befriedigend darzustellen.” Zóó weinig wist men toen van den onderlingen samenhang en de beteekenis der reeds waargenomen verschijnselen, dat bijv. de genoemde geleerde niet aarzelde als zijne meening uittespreken, dat het geheele verschijnsel der worteldrukking, voor de planten die het vertoonen, „kaum von erheblichen Nützen” zijn kon!

Het is niet te verwonderen, dat deze stand van zaken in de laatste jaren aan meer dan éénen onderzoeker aanleiding gaf, tijd en krachten aan dit onderwerp te wijden. De rijke literatuur bood een schat van ervaringen, maar velen daaronder berustten op onvolledige, ja niet zelden op onnauwkeurige waarneming. In de eerste plaats was het noodig, de meestal zeer ingewikkelde proeven in hare afzonderlijke factoren te ontleden, en door een grondige studie dezer factoren een basis te winnen voor de beoordeeling van de verschijnselen, zooals zij zich in de natuur aan ons oog voordoen.

In deze richting werden in de beide laatste jaren belangrijke stappen gedaan door de onderzoekingen van SACHS en HÖHNEL. SACHS koos de beweging van het water in het hout tot het onderwerp zijner studiën, HÖHNEL trachtte de beteekenis der met verdunde lucht gevulde ruimten in het hout aan het licht te brengen.

Aan deze studiën sluit zich de verhandeling van den Heer MOLL aan. Deze schrijver koos tot uitgangspunt van zijn onderzoek het verschijnsel, dat onder den naam van *druppelen* bekend is. Sommige planten hebben de eigenschap, in het voorjaar, vóór het uitloopen der bladen, water druppelsgewijze uit wonden te laten stroomen; zij bloeden, gelijk men het noemt. Andere gewassen laten daarentegen gedurende den geheelen zomer, als de omstandigheden slechts gunstig zijn, ook zonder verwonding, water op bepaalde plaatsen ontwijken; dan komen de druppels voornamelijk aan de toppen en langs de randen der bladen voor den dag. Dat de oorzaak van beide verschijnselen gelegen is in de kracht, waarmede de wortels het opgenomen water in de verschillende deelen der plant omhoog persen, wist men; dat het bloeden een noodzakelijk gevolg van deze oorzaak was, sprak van zelf; maar omtrent de beteekenis van het druppelen was tot nu toe niets bekend.

Ten einde nu op de beteekenis van dit verschijnsel licht te kunnen werpen, achtte de Heer MOLL het in de eerste plaats noodzakelijk te onderzoeken, of het druppelen, evenals het bloeden, een noodzakelijk gevolg der worteldrukking, en dus een verschijnsel is, aan alle planten die de laatste bezitten gemeen, dan wel of slechts bepaalde plantensoorten door bi-

zondere inrichtingen tot dit afzonderen van waterdruppels in staat gesteld worden.

De beantwoording van deze vraag neemt het eerste, en tevens het grootste gedeelte der verhandeling in. Een lange reeks van proeven, met meer dan zestig verschillende plantensoorten ondernomen, leidt tot de conclusie, dat van de gestelde alternatieve niet het eerste, maar het tweede lid door de ervaring bevestigd wordt. Slechts bepaalde plantensoorten hebben het vermogen om te druppelen; zij worden daartoe dus door bizondere inrichtingen in staat gesteld. Planten, die dit vermogen missen, vertoonen een geheel ander, tot nu toe nog niet waargenomen verschijnsel: het water dringt in hare bladen, zoodra het in de vaatbundels onder zekere drukking staat, overal tusschen de cellen uit, en vult zoo de tusschencellige ruimten, die in normalen toestand met lucht gevuld zijn. Deze ontdekking leverde aan den Heer MOLL den sleutel ter verklaring van de beteekenis van het druppelen. Doch vóór wij hem in dit gedeelte zijner studie volgen, is het noodig, de proeven zelven, en de mehode volgens welke zij genomen werden, nader te bespreken.

DE BARY had geleerd, dat men het druppelen, ook zonder behulp der worteldrukking, kon te voorschijn roepen, zoo men slechts, door middel van kunstmatige drukking, water in een afgesneden bebladerden tak eener geschikte plantensoort perste. Hij bond daartoe den tak op een U-vormig gebogen buis, vulde deze met water, en goot in den open arm kwik. Deze methode, door DE BARY slechts op een enkele plant: de gewone *Fuchsia*, toegepast, werd door MOLL voor al zijne proeven overgenomen. Daartoe moesten echter eenige verbeteringen aan den toestel worden aangebracht, die deels een grootere zekerheid der resultaten, deels een gemakkelijker gebruik ten doel hadden. Zoo ontstond de toestel van den Heer MOLL, die met eenige bizonderheden afgebeeld is op de beide platen, die den tekst vergezellen.

Op de beschrijving van den toestel volgt de beschrijving der methode, en een vergelijking van de voordeelen, welke deze boven anderen bezit, en die voornamelijk daarin bestaan, dat het te onderzoeken verschijnsel zooveel mogelijk van andere processen geïsoleerd is, en dat de drukking, waaronder de drup-

pels te voorschijn komen, nauwkeurig kan gemeten worden. De proeven duurden soms weinige minuten, soms verscheidene dagen, al naar gelang van den aard der gebruikte plantensoort en van verschillende andere omstandigheden. De kwikdrukking bedroeg meestal omstreeks 10—20 c.M. Opmerking verdient, dat het niet bij alle planten mogelijk was, door kunstmatige drukking water door de wondvlakte in den tak te persen. Bij een vijftal soorten toch werd de wondvlakte, hetzij door slijm, hetzij door melksap, zoo geheel verstopt, dat het kwik in de stijgbuis langen tijd zijn stand niet of slechts uiterst weinig veranderde. Deze waarnemingen werpen licht op de beteekenis van het melksap en het slijm voor het sluiten van wonden en doen ons voor het eerst een bepaalde functie van deze, tot nu toe zoo raadselachtige, stoffen kennen.

Nadat verder nog eenige mogelijke bezwaren weerlegd zijn, gaat de Heer MOLL tot de beschrijving zijner proeven over. Het aantal daarvan bedraagt 84, en allen worden, volgens een aangenomen schema, kort beschreven. Ongetwijfeld verdient de groote zorg, door den Heer MOLL besteed om den experimenteelen grondslag zijner verdere studiën door zulk een aanzienlijk aantal proeven boven allen twijfel te verheffen, en het verschijnsel tevens van alle zijden zoo grondig mogelijk te leeren kennen, allen lof; toch komt het ons voor, dat de schrijver met de uitvoerige beschrijving van een gedeelte zijner proeven had kunnen volstaan.

Het kan niet in onze bedoeling liggen, een overzicht dezer proeven te geven; liever gaan wij terstond over tot het tweede gedeelte der verhandeling, dat de uitkomsten daarvan bespreekt, en eenige der talrijke vragen, waartoe zij aanleiding gaven, door nieuwe proeven tracht te beantwoorden. Daarbij verkreeg de Heer MOLL de volgende uitkomsten:

Bij planten, die het vermogen missen om uit de bladeren het overtollige water druppelsgewijze af te scheiden, heeft het inpersen van vocht, gelijk wij reeds vermeldden, een injectie der intercellulaire ruimten met water ten gevolge. Zulk een injectie stoort natuurlijk de normale gaswisseling, die de ademhaling en de koolzuurontleding in de cellen der bladen vergezelt, ja zij kan, blijkens de beroemde onderzoekingen van DU-

TROCHET, die zijne plantendeelen door middel der luchtpomp injicieerde, somwijlen den dood ten gevolge hebben. Het is daarom voor planten, voor welke gevaar van injectie door de krachtige werking der worteldrukking bestaat, van groot belang, een middel te bezitten om dit gevaar te voorkomen. Zulk een middel zien wij nu in het vermogen om te druppelen. Dit vermogen berust op de aanwezigheid van plaatsen, die het water uit de vaatbundels gemakkelijk naar buiten laten komen. Deze plaatsen worden door den Heer MOLL met den naam van *Emissariën* bestempeld; men zou ze in onze taal gevoegelijk *doorlaten* kunnen noemen. Dat de aanwezigheid van zulke doorlaten in den regel voldoende is om de injectie te voorkomen, werd op even eenvoudige als overtuigende wijze aangetoond. Verwondt men namelijk bladen, die van nature geen emissariën hebben, en dus door drukking geïnjicieerd zouden worden, zoo ziet men het ingeperste water uit de wonden vloeien en de injectie wegblijven. Het spreekt van zelf, dat slechts bladen, wier wondvlakten niet spoedig bederven, voor deze proef geschikt zijn.

Dat de *emissariën* doorlaten zijn, en geen klieren, bleek uit proeven, waarbij met het water een kleurstof of looizuur werd ingeperst; deze werden spoedig met het water onveranderd doorgelaten.

Belangrijk mogen verder die proeven genoemd worden, waarin oude en jonge bladen derzelfde soort gebruikt werden. Het bleek toch, dat bladen, die in hun jeugd het vermogen om te druppelen bezaten, dit niet zelden op lateren leeftijd verliezen. De Heer MOLL verklaart dit door aan te nemen, dat de emissariën onwerkzaam, wellicht verstopt geworden zijn; naar onze meening ware het wenschelijk geweest, dat de S. meer pogingen in het werk hadde gesteld om dit punt tot voldoende helderheid te brengen.

Eindelijk hebben wij nog een punt te vermelden, waaromtrent wij eveneens een verdere voortzetting van het onderzoek zouden gewenscht hebben. Wij bedoelen den anatomischen bouw der emissariën. Reeds lang wist men, dat sommige planten, op de plaatsen waar druppels uit de bladen plegen voor den dag te komen, bizondere openingen bezitten, die in haar

bouw met de huidmondjes overeenkomen en den naam kan *waterporiën* dragen. De onderzoekingen van MOLL leerden, dat de aanwezigheid van zulke waterporiën niet, gelijk sommigen meenden, eene conditio sine qua non voor het druppelen is; dit geschiedt integendeel bij vele planten op plaatsen, die zich onder den mikroskoop in geen enkel opzicht van de omliggende deelen der opperhuid onderscheiden, ja die soms zelfs niet eens huidmondjes dragen. Daardoor ontstaat de vraag, door welke eigenschappen de emissariën van andere deelen der opperhuid onderscheiden zijn; gaarne hadden wij gezien, dat de S. deze plekken voor waterlozing, vooral dáár, waar noch waterporiën noch stomata te vinden zijn, nader anatomisch onderzocht had.

Uit het gegeven overzicht blijkt, dat de verhandeling des Heeren MOLL een belangrijke bijdrage tot de leer van de beweging van het water in de planten levert, en niet alleen een reeks van nieuwe feiten vermeldt, maar daarenboven een helder licht werpt op andere tot nu toe onverklaarde verschijnselen; daarbij tevens aanleiding gevende tot het stellen van nieuwe vragen, van welker beantwoording verdere vooruitgang op dit gebied der plantenphysiologie mag verwacht worden.

Op deze gronden hebben de ondergeteekenden de eer, der Afdeeling voor te stellen, de verhandeling des Heeren MOLL in de *Verslagen en Mededeelingen* op te nemen.

Amsterdam en Voorschoten, Maart 1880.

UNTERSUCHUNGEN

ÜBER

TROPFENAUSSCHEIDUNG UND INJECTION BEI BLÄTTERN.

VON

Dr. J. W. MOLL.

Zweck der vorliegenden Untersuchung ist die experimentelle Beantwortung der folgenden Fragen: ist die bei manchen Gewächsen beobachtete Tropfenausscheidung der Blätter, in Folge inneren Wasserdruckes, eine den Blättern aller Pflanzen gemeinsame Erscheinung? Oder ist dies nicht der Fall und besitzen somit die zur Tropfenausscheidung fähigen Blätter Eigenthümlichkeiten in ihrem Baue, gewisse zur Entwässerung fähige Organe, die den nicht ausscheidenden Blättern fehlen?

Der grösste Theil der zur Lösung dieser Frage angestellten Versuche wurde gemacht im Botanischen Laboratorium der Universität Utrecht, wesshalb ich mir erlaube, Herrn Prof. Dr. N. W. P. RAUWENHOFF bestens zu danken für die Bereitwilligkeit, mit der er mir den Gebrauch seiner Arbeitsräume und Apparate zugestanden hat.

EINLEITUNG.

Wenn die Luft feucht und die Transpiration der Pflanzen dementsprechend gehemmt ist, während zugleich den Wurzeln ein reichlicher Wasservorrath zu Gebot steht, so kommt es oft vor, dass die Blätter verschiedener Gewächse Wassertropfen ausscheiden. Die genannten Bedingungen treffen zumal Abends,

Nachts und Morgens früh zusammen, und wirklich kann man zu diesen Tageszeiten die Tropfenausscheidung der Blätter im Freien, wie in Gewächshäusern öfters beobachten.

Gewöhnlich erscheinen die Tropfen an der Spitze des Blattes und an seinen Rändern, wie ein jeder es wohl bei Gräsern beobachtet hat; oft auch, wenn der Blattrand gesägt oder anderswie eingeschnitten ist, sieht man das Wasser aus den Zähnen hervortreten.

Bei einigen Pflanzen ist diese Ausscheidung, unter günstigen Umständen überaus reichlich. Bekannt ist in dieser Beziehung Calla aethiopica und ferner zumal auch Colocasia antiquorum *). Duchartre sah ein einziges Blatt der letztgenannten Pflanze in einer Nacht mehr als 22 Gramm Wasser ausscheiden, und in einem anderen Falle 30 Tropfen in der Minute.

Der oberflächliche Beobachter wird in manchen Fällen die hervortretenden Tropfen als Thau betrachten, aber in Wirklichkeit besteht zwischen beiden Erscheinungen nur eine entfernte Aehnlichkeit. Wo die Ausscheidung so reichlich ist, wie es bei Calla und Colocasia oft vorkommt, genügt schon der Augenschein zum Beweise, dass die von der Spitze des Blattes herabfallenden Tropfen nicht Thautropfen sind. Aber auch bei solchen Pflanzen, bei denen die Flüssigkeit nur langsam hervorquillt, ist es ein Leichtes sich von dem Ursprung derselben aus dem Blatte zu überzeugen.

Die Tropfen treten oft an genau bestimmten Stellen des Blattrandes auf, die für verschiedene Pflanzen verschieden, aber für die verschiedenen Blätter derselben Pflanze constant sind. Schon aus dieser Thatsache lässt sich folgern, dass in solchen Fällen der Thau nicht die Ursache der beobachteten Erscheinung sein kann.

Oft aber kann man auch an schönen Sommerabenden, wenn die Sonne untergeht, im Freien das langsame Hervorquellen des Wassers aus den Blättern beobachten, indem alle Gegen-

---

*) F. UNGER. Beiträge zur Physiologie der Pflanzen. *Sitzb. der Kais. Akad. der Wiss.* in Wien. Bd. 28. 1858. S. 111.

P. DUCHARTRE. Recherches physiologiques, anatomiques et organogéniques sur la colocase des anciens, Colocasia antiquorum Schott. *Ann. d. sc. nat.* Botan. 4e Série. T. XII. 1859.

stände in der Nähe vollkommen trocken sind. Entfernt man die Tropfen mit einem Tuche oder einem Stückchen Fliesspapier, so sieht man sie bald genau an den nämlichen Stellen wieder erscheinen. Wer dies einmal beobachtet hat, dem wird der Ursprung solcher Wassertropfen nicht zweifelhaft sein, und für den braucht es keiner weiteren Beweise, dass sie aus dem Blatte hervorgekommen sind.

Schon seit langer Zeit ist es bekannt, dass die Ausscheidung an der Blattspitze bei Colocasia hauptsächlich aus zwei förmlichen, schon bei schwacher Vergrösserung sichtbaren Oeffnungen in der Oberhaut stattfindet. DUCHARTRE hat von diesen Oeffnungen gezeigt, dass sie nur ungewöhnlich grosse Spaltöffnungen sind *).

Auch bei den Blättern von Tropaeolum majus und Fuchsia globosa hat man die Tropfen an solchen Stellen des Randes beobachtet, an denen eigenthümlich gebildete und sehr grosse Spaltöffnungen sich vorfinden.

Solche eigenthümliche, von DE BARY mit dem Namen Wasserporen belegte Spaltöffnungen, hat man in verschiedener Form an den Blättern sehr vieler Pflanzen aufgefunden †). Ob aus ihnen, unter günstigen Umständen, bei allen sie besitzenden Pflanzen Wasserabsonderung stattfinden kann, mag einstweilen dahingestellt bleiben. Jedenfalls aber ist die Ausscheidung keineswegs immer an der Anwesenheit von Wasserporen gebunden.

Dies geht schon aus einer Beobachtung ROSANOFF's hervor, der bei Polypodium fraxinifolium Wasser, unabhängig von Stomata, hervortreten sah an Stellen, die nur eine besondere Structur der Oberhaut zeigten §). Auch meine eigenen Versuche, die ich weiter unten ausführlich beschreiben werde, führten zu dem nämlichen Resultate.

Die von den Blättern ausgeschiedene Flüssigkeit ist in einigen Fällen näher untersucht worden. Dabei hat sich herausgestellt,

---

*) L. c. S. 257.

†) Man vergl.: DE BARY, Vergleichende Anatomie der Vegetationsorgane der Phanerogamen und Farne. S. 54.

§) *Bot. Ztg*. 1869. S. 883.

dass sie fast reines Wasser ist. Nach UNGER's Angaben enthält die Flüssigkeit bei Zea Mais 0.05 pCt. an fixen Bestandtheilen, bei Richardia aethiopica nur 0.0068 pCt., bei Colocasia antiquorum 0.056 pCt. und bei Brassica cretica 0.1 pCt. Von diesem kleinen Substanzgehalt machen organische Stoffe etwa die Hälfte, bei Colocasia sogar 6/7 aus. Der übrige Theil besteht aus anorganischen Salzen *). Auch Duchartre kam bei Colocasia zu dem nämlichen Resultate, ohne aber die Flüssigkeit einer so genauen Untersuchung zu unterwerfen †).

Was die Ursache der tropfbaren Aussonderung aus Blättern betrifft, so leuchtet es ein, dass wo Wasser hervortritt, dieses in der Pflanze einem gewissen Drucke ausgesetzt ist.

Desshalb kann es nicht Wunder nehmen, dass man die Erscheinung schon bei mehr als einer Pflanze durch künstliche Einpressung von Wasser, an abgeschnittenen Sprossen hervorgerufen hat. So beobachtete DE BARY, dass bei Fuchsia Tropfen an den Spitzen der Blattzähne auftraten, wenn er einen abgeschnittenen Zweig auf den einen Schenkel eines gebogenen Glasrohrs befestigte und durch Quecksilberdruck Wasser in die Schnittfläche presste §). Nachher sah auch SACHS in einem ebensolchen Apparate, bei Blättern der Kartoffel, Mais, Aroideen und dergleichen, Wassertropfen austreten an denselben Stellen der Blattspreite, wo es sonst bei bewurzelten Pflanzen Abends und Nachts stattfindet **).

Wie bekannt, steht in der unverletzten Pflanze das Wasser oft unter einem gewissen, unter Umständen sehr starken Drucke, durch den, bei Verwundung, das Ausfliessen grösserer oder kleinerer Quantitäten Wasser verursacht wird. Dieser sogenannte Wurzeldruck tritt bekanntlich nur dann bei verschiedenen Pflanzen auf, wenn viel Wasser durch die Wurzeln aufgenommen wird, indem zugleich die Transpiration der Blätter sehr herabgesetzt ist. Das Bluten des Rebstocks, der Birken

---

*) Unger, L. c. S. 126.

†) DUCHARTRE, L. c.

§) *Bot. Ztg.* 1869. S. 883.

**) SACHS, *Lehrb. d. Bot.* 4e Aufl. S. 660.

und anderer Pflanzen im Frühjahr, als die Blätter sich noch nicht entwickelt haben, ist eine Folge dieser inneren Spannung

Gegenwärtig betrachtet man allgemein, und ohne Zweifel mit Recht, den Wurzeldruck als die Ursache der tropfbaren Aussonderung bei Blättern.

Erstens wird diese Ausscheidung durch die nämlichen Umstände hervorgerufen, die auch das Zustandekommen des Wurzeldruckes begünstigen. Durch Ueberdecken einer Glasglocke, um die Transpiration der Blätter zu vermindern, durch reichliches Begiessen und durch künstliche Erwärmung der Erde, um die Thätigkeit der Wurzeln zu verstärken, kann man bei vielen, in Topfen gezogenen Gewächsen den Wurzeldruck und die Ausscheidung der Blätter beide hervorrufen. SACHS hat einen einfachen Apparat construirt, der sich bequem zu diesem Zwecke benutzen lässt *).

Ferner hat UNGER gezeigt, dass der Saft, der aus durchschnittenen Blattstielen bei Calla aethiopica und Colocasia antiquorum durch Wurzeldruck hervorquillt, genau dasselbe specifische Gewicht besitzt, als die Flüssigkeit, welche aus den Blättern derselben Pflanzen hervorkommt †).

Endlich habe ich selbst die Ausscheidung von Wassertropfen aus den Blättern des Rebstocks in schönster Weise gerade zur Zeit des starken Blutens, an voreilig entwickelten Blättern beobachtet, wie ich es später noch ausführlicher mittheilen werde.

Es kann somit nicht zweifelhaft sein, dass zwischen Wurzeldruck und Tropfenausscheidung der Blätter ein ursächlicher Zusammenhang besteht.

Die Zahl der Pflanzen, deren Blätter die Fähigkeit besitzen Tropfen abzusondern, ist ohne Zweifel sehr gross, wenn auch bis jetzt die Erscheinung bei verhältmässig nur sehr wenigen Pflanzen beschrieben wurde. Ein jeder Botaniker aber weiss wohl, dass zum Beispiel Morgens früh, zumal in der feuchten Luft der Gewächshäuser, die Blätter sehr vieler Pflanzen aus-

---

*) SACHS, *Handbuch der Experimental-Physiologie*. S. 64 u. 237.

†) UNGER, L. c. S. 128.

geschiedene Tropfen tragen, die später am Tage durch Verdunstung verschwinden. Dennoch ist die Zahl der Pflanzen, deren Ausscheidung in der älteren und neueren Literatur Erwähnung findet, auffallend gering.

Als Beispiele, die ich zum Theil in dem Vorhergehenden schon nannte, hebe ich hier aus der vorhandenen Literatur. Calla, Colocasia und andere Aroideen, die Tropfen an der Blattspitze austreten lassen, hervor; ferner viele Gräser bei deren Blättern die Tropfen an der Spitze und häufig auch am Rande des Mitteltheiles vorkommen; endlich verschiedene Brassicaarten, Papaver, Cucurbita, Impatiens noli tangere und Tropaeolum majus. Bei letzterer Pflanze findet die Absonderung an denjenigen Stellen des Randes statt, wo die grossen Blattnerven endigen.

Diese Beispiele könnte man zwar mit einigen, aber nicht mit sehr vielen vermehren.

Desshalb will ich hier noch einige Fälle einer schönen Ausscheidung anführen, die ich selbst gelegentlich beobachtet habe an Pflanzen, bei denen die Erscheinung, so viel ich weiss, bis jetzt noch nicht beschrieben wurde. Gross ist ihre Zahl nicht, aber der Zweck dieser Untersuchung war auch ein ganz anderer.

Ich sah die Absonderung bei Fuchsia globosa, Tigridia pavonia, Pilularia globulifera, Iris Pseudacorus, Salix sp., Vitis vinifera, u. a.

Bei Fuchsia zeigten sich die Tropfen an den Spitzen der Blattzähne bei einem kleinen Pflänzchen, das in Erde bewurzelt und unter eine Glasglocke gestellt war.

An den krummnervigen Blättern junger Tigridiapflanzen, die im Topfe gezogen wurden, sah ich oft, Abends gegen Sonnenuntergang, zahlreiche Tropfen ausgeschieden werden, sowohl an der Spitze, wie auch an anderen Theilen des Randes.

Ein im Topfe wachsendes Exemplar der Pilularia globulifera, sah ich, in der feuchten Luft des Gewächshauses, an der Spitze eines jeden der sehr zahlreichen Blätter, einen schönen Tropfen tragen.

Bei Iris Pseudacorus beobachtete ich die Ausscheidung oft an der Spitze und sonst am Rande der Blätter bei Keimpflänzchen, die ich in einer geschlossenen, mit Wasser gefüllten Flasche gezogen hatte,

Salix zeigte mir die Erscheinung sehr schön an einem in Wasser bewurzelten Zweige, der in dieser Lage sehr viele Blätter ausgetrieben hatte. In der ziemlich feuchten Zimmerluft trugen Morgens früh die Spitzen aller Zähne des Blattrandes einen kleinen Tropfen.

Am grossartigsten war die Tropfenausscheidung bei Vitis, wie ich Gelegenheit hatte, sie zu beobachten. Im hiesigen Universitätsgarten war ein starker Zweig eines im Freien, in der Nähe des Treibhauses bewurzelten Weinstockes seit längerer Zeit durch ein Loch in das Innere des Hauses geführt. Ende April, also zur Zeit des sogenannten Thränens, hatten sich draussen die Blattknospen noch gar nicht entwickelt. Der Zweig im Treibhause aber besass schon sehr zahlreiche, zarte Triebe, die ungefähr 2 Decimeter lang waren und sehr viele, etwa 5 Centimeter lange, zarte Blätter trugen. Um diese Zeit beobachtete ich mehr als einmal, dass jeder Zahn eines jedes Blattes einen fast erbsengrossen Tropfen trug, und das nicht nur Morgens früh, sondern einmahl auch um 3 Uhr Nachmittags.

Ohne Zweifel würde es sehr leicht sein, die Zahl der hier genannten Pflanzen um sehr viele zu vermehren. Es würde nicht viel Arbeit kosten, durch einfache Beobachtung eine grosse Liste von Pflanzen zusammenzustellen, deren Blätter Wassertropfen ausscheiden können, wobei man selbstverständlich zugleich auch auf die Vertheilung der Tropfen am Blatte Acht zu geben hätte.

In dem Vorhergehenden habe ich es versucht, dem Leser eine übersichtliche Darstellung von der Erscheinung der Tropfenausscheidung bei Blättern zu geben. Dabei hat sich herausgestellt, dass die Blätter vieler Pflanzen diese Fähigkeit besitzen, so dass wir behaupten können, dass eine solche Wasserabsonderung im Pflanzenreiche gar nicht selten ist, ja vielleicht noch viel häufiger als wir jetzt meinen.

Anschliessend an diese Betrachtung drängten sich mir die folgenden Fragen auf: *ist es eine allgemeine Eigenschaft der Blätter aller Pflanzen, Wassertropfen an bestimmten Stellen auszuscheiden, wenn*

im Stengel das Wasser unter einem gewissen Drucke steht, auf welche Weise dieser Druck denn verursacht werden möge? Oder giebt es Pflanzen, deren Blättern diese Eigenschaft fehlt und besitzen somit die Tropfenausscheidenden Blätter Eigenthümlichkeiten in ihrem Baue, bestimmte Abwässerungsorgane, die man bei den nicht ausscheidenden Pflanzen nicht findet?

Der experimentellen Beantwortung dieser Fragen ist die vorliegende Untersuchung gewidmet.

Nach dem Mitgetheilten kann man die Tropfenausscheidung bei verschiedenen Gewächsen auf zweierlei Weise hervorrufen. Erstens kann man den schon erwähnten SACHS'schen Apparat benutzend, den Wurzeldruck, und als dessen Folge die Tropfenausscheidung hervorrufen.

Zweitens aber kann man auch, nach dem Vorgange DE BARY's, Wasser vermittelst Quecksilberdruckes durch die Schnittfläche abgeschnittener Sprosse hineinpressen. Da es mir nur darum zu thun war, das Verhalten der Blätter gegen einen im Innern der Pflanze herrschenden Wasserdrucke kennen zu lernen, unabhängig von der Frage nach der Ursache dieses Druckes, war ich frei zwischen beiden Methoden zu wählen. Die des künstlichen Einpressens aber verdiente in diesem Falle in jeder Hinsicht den Vorzug.

Sie gestattet es mit grösster Genauigkeit die verschiedenen Bedingungen, unter denen die Versuche stattfinden, zu kennen und sie willkürlich zu regeln. Wenn man es dagegen versucht, durch Wurzeldruck die Ausscheidung zum Vorschein zu rufen, so üben viele Factoren, deren Einwirkung man nicht oder nur theilweise kennt, einen vielleicht entscheidenden Einfluss auf die Versuchsresultate aus. Und auch im günstigsten Falle ist man nie im Stande die Versuchsbedingungen nach Bedürfniss zu regeln.

So ist es bei den meisten Pflanzen unbekannt, inwiefern sie die Fähigkeit besitzen, das Wasser aus ihrer Wurzel mit Kraft emporzupressen. Ja, nach HOFMEISTER *) zeigen sogar die

*) W. HOFMEISTER, Ueber Spannung, Ausflussmenge und Ausflussgeschwindigkeit von Säften lebender Pflanzen. *Flora* 1862, S. 118.

Coniferen nie Wurzeldruck. Es war somit zu erwarten, dass ich, die Methode des Wurzeldrucks benutzend, für einige oder vielleicht für viele Pflanzen die Frage nach dem Verhalten der Blätter gegen inneren Druck des Wassers unbeantwortet lassen müsste. Eine allgemein giltige Antwort auf die von mir gestellten Fragen war also auf diese Weise nicht zu erwarten.

Die künstliche Einpressung von Wasser in abgeschnittene Zweige dagegen lässt sich auch bei solchen Gewächsen anwenden, denen der Wurzeldruck fehlt, und erlaubt es also auch deren Blätter in den Kreis der Beobachtungen zu ziehen.

Auch ist es, wenn man die Druckkraft des Wassers durch die Wurzel ausüben lässt, nicht möglich die Grösse dieser Kraft während des Versuchs zu kennen. Höchstens kann man, nach Beendigung des Versuchs, die Grösse der Wurzelkraft bestimmen.

Der Quecksilberdruck, der das Wasser bei der zweiten Methode in die Sprosse presst, ist selbstverständlich genau messbar.

Endlich aber ist es nicht möglich, die Wurzelkraft nach Belieben zu regeln.

Den Quecksilberdruck hingegen kann man so gross oder so klein machen als man selbst will und auf diese Weise auch den Einfluss verschiedener Druckkräfte auf die Blätter kennen lernen. Diesen Vorzug der Methode des Einpressens in abgeschnittene Zweige habe ich während meiner Untersuchung auch mehr als einmal benutzt.

Ich beschloss also den letztgenannten Weg zur Lösung der gestellten Fragen zu wählen, und wie sich zeigen wird, hat sich die Methode vollkommen bewährt.

In dem Folgenden will ich nun die Beschreibung meiner Versuche und deren Resultate folgen lassen, und das zwar in drei verschiedenen Abschnitten. Der erste wird die Beschreibung des von mir benutzten Apparates und der allgemeinen Einrichtung der Versuche enthalten. Im zweiten Theile werde ich die einzelnen Versuche beschreiben. Im dritten und letzten Abschnitte endlich werde ich die Schlüsse mittheilen, zu denen die Versuchsresultate mich führten.

I. Die Versuchsanordnung.

Der Apparat, dessen ich mich zu meinen Versuchen bedient habe, war sehr einfach. Er bestand der Hauptsache nach nur aus einem gebogenen Glasrohr, wie es auch de Bary zum Einpressen von Wasser in abgeschnittene Zweige verwendete. Die genauere Beschreibung, die ich in den folgenden Zeilen geben werde, schliesst sich an die auf Taf. I und II gegebene Abbildungen an.

Das lange, zwei Mal im rechten Winkel gebogene Rohr (Taf. I.) hat im Innern eine Weite von etwa 1 Centim. Der längere Schenkel ist 70 Centim. lang, und ist oben trichterförmig erweitert, um das Eingiessen des Wassers und Quecksilbers bequem stattfinden zu lassen. Der kürzere, verticale Schenkel misst 15 Centim. und ist zum Theil etwas erweitert. Die Länge des horizontalen Stückes, zwischen beiden aufstehenden Schenkeln, beträgt ebenfalls 15 Centim.

In den kurzen verticalen Schenkel kann ein gut passender, durchbohrter Korkpropf gesteckt werden, der ein kurzes Glasröhrchen umfasst. Nachdem man dickere oder dünnere Sprosse auf den Apparat befestigen will, kann man auch verschiedene Korkpropfen mit Röhrchen verschiedener Weite benutzen. Für meine Zwecke genügten drei solche Röhrchen vollkommen.

Wie Taf. II, Fig. 1 in natürlicher Grösse zeigt, ist über den oberen Theil des eben erwähnten Röhrchens ein kurzes Stück Gummischlauch gestülpt und mit Zwirn fest umwickelt.

Wenn nun ein Versuch gemacht werden soll, so wird erst das Rohr mit Wasser gefüllt, bis es am Gummischlauch überläuft, und dann in diesen der abgeschnittene Stengel so tief eingesenkt, dass die Schnittfläche zwischen dem unteren Schlauchende und dem Korkpropfe sichtbar wird. Auf diese Weise verfahrend, werden fast nie Luftblasen an der Schnittfläche haften bleiben, und ist man im Stande sich von deren Abwesenheit zu überzeugen. Schliesslich wird auch der obere Theil des Schlauchstückes mit Zwirn umwickelt, in der Weise, dass der Stengel befestigt ist, ohne von einer allzuengen Umschnürung Schaden zu leiden.

Ist der Apparat soweit fertig, so wird das Rohr, wie die

Figur zeigt, in einem gewöhnlichen Stativ eingeklemmt, und dann in den längeren Schenkel so viel Quecksilber eingegossen, bis der verlangte Druck erreicht ist.

Um eines Erfolges sicher zu sein, ist es aber nicht nur nöthig Wasser in die Sprosse hineinzupressen, sondern es muss auch die Verdampfung der Blätter so viel wie möglich herabgesetzt werden, damit nicht auf diese Weise das eingepresste Wasser die Blätter in der Gestalt unsichtbaren Wasserdampfes verlassen kann. Zu diesem Zwecke wird über den im Apparate befestigten Zweig eine Glasglocke gestülpt, in der die Luft so viel wie möglich feucht gehalten werden muss. Die Glocke ruht mit ihrem Rande auf einer von einem gewöhnlichen Dreifuss getragenen Blechplatte. Die Platte hat in der Mitte eine Oeffnung, um den kurzen Schenkel des Rohres durchzulassen. Dazu ist sie halbirt, damit sie, nachdem der Versuchszweig befestigt, und das Quecksilber eingegossen ist, angelegt werden kann. Die zwei Hälften besitzen die in Fig. 2 der Taf. II abgezeichnete Form. Bei dem Anlegen schiebt man den Theil *a b* unter den Theil *a'b'* der anderen Hälfte, und umgekehrt *c d* unter *c'd'*, so dass die sich in der Glocke befindende Luft genügend von der umgebenden, trocknen Atmosphäre getrennt ist. Auf jeder Plattenhälfte ist ferner ein halbkreisförmiger Behälter angelöthet (*e*, *e*, Taf. II, Fig. 2). Diese werden mit Wasser gefüllt und so bleibt die Luft, in der sich die Blätter der Versuchspflanze befinden, immer fast dampfgesättigt.

Wenn der Apparat so hergerichtet ist, braucht man weiter nur zu beobachten, ob an den Blättern der Einfluss des Quecksilberdruckes sichtbar wird.

Um die Grösse dieses Druckes zu bestimmen, wird der Niveau-unterschied des Quecksilbers in den beiden verticalen Schenkeln des Rohres direct gemessen. Eine solche Messung findet mindestens am Anfang und am Ende eines jeden Versuchs statt, denn der Druck bleibt nicht constant, weil die Stelle des in die Pflanze hineingepressten Wassers von Quecksilber eingenommen wird. Somit steigt das Niveau im kurzen Schenkel fortwährend, indem es im längeren entsprechend sinkt; es wird also der Druck vom Anfang der Versuchs an langsam aber fortwährend kleiner.

Da es mir aber in dieser Untersuchung nur um den Einfluss des Druckes, unabhängig von seiner Grösse zu thun war, blieb dieser Umstand mir gleichgültig.

Meistens benutzte ich einen anfänglichen Druck von etwa 20 Centim. Quecksilber, oft aber auch mehr oder weniger, wie ich es in der Beschreibung der einzelnen Versuche jedesmal angeben werde.

Die Menge des in den Versuchszweig gepressten Wassers lässt sich aus der Senkung des Quecksilbers im längeren Schenkel des Rohrs leicht bestimmen. Experimentell wurde die Wassermenge festgestellt, die einer Senkung von 1 Centim. entspricht. Uebrigens war es bei meinen Versuchen eine Sache sehr untergeordneter Bedeutung, wie viel Wasser eingepresst wurde. Ich werde es jedesmal nur der Vollständigkeit wegen erwähnen, obgleich es zu der Beantwortung der Fragen, die ich mir gestellt hatte, in keiner directen Beziehung steht.

Die Versuchsdauer war sehr verschieden; von einigen Minuten bis zu einigen Tagen, wie es sich bei der speciellen Versuchsbeschreibung zeigen wird.

Die Zimmertemperatur wurde während der Versuche immer mehr als einmal an dem am Stative aufgehängten Thermometer (Taf. I) abgelesen. Es wurde ferner dafür gesorgt, dass der Apparat nie von den directen Sonnenstrahlen getroffen wurde.

Von den aus dem Garten, oder aus dem Gewächshause geholten Versuchszweigen wurde immer vor Anfang des Versuchs der einige Centimeter lange, basale Theil unter Wasser abgeschnitten, so dass das Wasser stets durch eine frische Schnittfläche hineingepresst wurde. Da dies ohne Ausnahme geschah, werde ich es bei den ausführlichen Versuchsbeschreibungen nicht mehr hervorheben.

Zum Einpressen wurde gewöhnliches Brunnenwasser oder destillirtes Wasser benutzt, wie ich das jedesmal angeben werde: auch wurden einige Versuche mit Tanninlösung und einer Lösung des gefärbten Saftes der Phytolaccabeeren angestellt.

Wie bekannt, wird die Schnittfläche abgeschnittener Sprosse, wenn sie in Berührung mit Wasser ist, nach und nach so undurchlässig, dass wenigstens unter schwachem Drucke keine Flüssigkeit mehr durchgeht. Im Allgemeinen dauerten meine

rsuche so kurz, dass die langsam auftretende Veränderung Schnittfläche auf das Resultat keinen merkbaren Einfluss n konnte. Aber dennoch hatte ich in ziemlich vielen Fällen beobachten Gelegenheit, wie die anfänglich sogar reichlich den Blättern ausgeschiedenen Tropfen auch bei fortwährend kendem Drucke nach und nach verschwanden. Sie verpften, ohne von unten her wieder ersetzt zu werden, ja mögen leicht zum Theil wieder in das Blatt zurückgezogen sein.

So zeigte ein Fuchsia-zweig, nachdem der Versuch $2^1/_2$ Stunde lauert hatte, eine reichliche Tropfenausscheidung an allen ittern. Als der Versuch 2 Tage gedauert hatte, und der ecksilberdruck noch 13 Centim. betrug, was bei frischen reigen zum Hervorrufen der Erscheinung durchaus genügt, ren die Tropfen sehr vieler Blattzähne durch Verdunstung rschwunden. Nachdem das untere, 4 Centim. lange Stück geschnitten war, und der Spross von Neuem einem Drucke 7 Centim. Quecksilber) unterworfen wurde, trug nach Verif einer halben Stunde schon wieder bei sämmtlichen Blätm ein jeder Zahn des Randes einen schönen Wassertropfen lan vergl. Vers. 37).

Dasselbe zeigte mir auch ein Zweig von Tropaeolum majus. ei einem anfänglich 14 Centim. grossen Quecksilberdrucke ugen die Blätter noch nach 23 Stunden sehr zahlreiche und osse Tropfen an ihrem Rande. Nach 6 Tagen waren alle lätter zwar noch frisch, aber ihre Oberfläche war vollkommen ocken geworden, während der Druck auf 1.4 Centim. gesunn war. Er wurde jetzt auf 15 Centim. gebracht, aber die chnittfläche gelassen wie sie war. Das Resultat war, dass ach $2^1/_2$ Stunde alle Blätter noch eben so trocken waren wie orher (Man vergl. Vers. 79).

Ein Blatt der Begonia manicata zeigte, nachdem es während Stunden einem Quecksilberdrucke von 32 Centim. ausgesetzt wesen war, auf sämmtlichen Sägezähnen grosse Tropfen. Diese aren nach 2 Tagen, als der Druck noch 31.5 Centim. betrug, m Theil wieder verschwunden (Man vergl. Vers. 11).

Aehnliche Beobachtungen machte ich noch bei Athatoda vaica (Vers. 5.), Helleborus niger (Vers. 40.) und Impatiens Balsamina (III. § 4. Vers. 89).

Bei einigen der untersuchten Pflanzen war die Schnittflä sogleich nach dem Abschneiden, so undurchlässig, dass von mir angewendete Druck sich in keiner Weise auf die B ter geltend machen konnte. Es waren dies ohne Ausnal solche Gewächse, die entweder beim Anschneiden einen Mi saft austreten liessen, oder deren Schnittfläche sich sofort einem gallertartigen, ausquellenden Schleime überzog.

Ich lasse hier die Beschreibung einiger solcher Versu folgen.

Ficus aspera. 10. Dec. '78.

Ein aus dem Gewächshause geholter Zweig mit 6 erwach nen Blättern wird um 11 U. Vorm. auf das mit gewöhnlich Wasser gefüllte Rohr befestigt. Es fliesst aus der Schnittflä ein augenscheinlich sogleich erhärtender Mil saft ins Wasser hinaus. Quecksilberdruck: anfangs 19 C tim., bleibt bis am Ende des Versuchs ungeändert. Währ des Versuchs beobachtete Zimmertemperaturen: 5⁰, 6⁰ und 12⁰

Resultat. Die Beobachtung während zweier Tage leh dass die Blätter weder Tropfen ausscheiden, no etwaige sonstige Veränderung zeigen. Es ist k Wasser in den Spross hineingepresst worden.

Urera platyphylla. MIQ. 5. Dec. '78.

Ein aus dem Gewächshause geholtes Blatt wird um 11 Vorm. auf das mit gewöhnlichem Wasser gefüllte Rohr bef tigt. Die Schnittfläche sondert Schleim ab. Quec silberdruck: anfangs 23.5 Centim., am Ende des Versuc 22.5 Centim. Temperatur: 8.5⁰ C.

Resultat. Während 2 Tage macht sich keine Ve änderung an dem Blatte bemerkbar. Es ist währ dieser Zeit nur 0.4 CC. Wasser hineingepresst worden.

Sparmannia tuberosa. 7. Dec. '78.

Ein aus dem Gewächshause geholtes Blatt wird um 2 U

lachm. auf das mit gewöhnlichem Wasser gefüllte Rohr befesgt. Die Schnittfläche sondert Schleim ab. Quecklberdruck: anfangs 22 Centim., am Ende des Versuchs noch benso. Temperatur: 14⁰ and 7⁰ C.

Resultat. Während 2 Tage bleibt das Blatt trocken nd ungeändert. Es ist so gut wie kein Wasser in das latt hineingepresst worden.

Tradescantia Warscewiczii. HARTS. 7. Dec. '78.

Bei der bewurzelten und durch eine Glasglocke überdeckten Pflanze hat man Tropfenausscheidung der Blätter beobachtet.

Ein aus dem Gewächshause geholter Zweig mit 8 Blättern wird um 3 U Nachm. auf das mit gewöhnlichem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Die Schnittfläche ist sogleich nach dem Abschneiden mit einer dicken Schleimschicht bedeckt. Quecksilberdruck: anfangs 21 Centim., am Ende des Versuchs noch ebenso. Temperatur: 13.5⁰ und 8.5⁰ C.

Resultat. Während zweitägiger Beobachtung bleiben die Blätter trocken und ungeändert. Es ist so gut wie kein Wasser in die Pflanze hineingepresst worden.

Abutilon malvaeflorum. 27. Febr. '79.

Ein aus dem Gewächshause geholter Zweig mit 16 Blättern wird um 12 U. Mittags auf das mit destillirtem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Der untere, 10 Centim lange Theil des Zweiges ist verholzt. Als die Schnittfläche nach Beendigung des Versuchs untersucht wurde, war sie ganz und gar mit einem glashellen Schleime bedeckt. Quecksilberdruck: anfangs 21 Centim., am Ende 20 Centim., Temperatur: 5.5⁰ C.

Resultat Während 28-stundiger Beobachtung bleiben die Blätter trocken und ungeändert. Es ist während dieser Zeit nur 0.5 CC. Wasser hineingepresst worden.

Solche Pflanzen können also zur Lösung der anfangs g stellten Frage nicht benutzt werden. Glücklicherweise war bei den meisten, von mir untersuchten Gewächsen anders g stellt und waren die Resultate nur negativ in den oben b schriebenen Fällen, wo sich die Schnittfläche mit Schleim od Milchsaft überzog. Bei der übergrossen Mehrzahl der unte suchten Pflanzen machte sich der Einfluss der Wassereinpre sung bald an den Blättern durch Tropfenausscheidung od auf andere Weise bemerkbar.

Wo ich ein positives Resultat erhielt, und also ohne Zweif Wasser durch den Stengel emporgepresst wurde, habe ich öfter nachdem der Versuch einige Zeit gedauert hatte, und das Ver halten der Blätter beobachtet worden war, den Stengel am unter Ende quer durchschnitten. Ich sah dann ohne Ausnahme da in die untere Schnittfläche hineingepresste Wasser sogleich au der oberen, neu gemachten hervortreten. Der Zweck diese Beobachtungen war die Beantwortung der Frage, durch welch Gewebe des Stengels das durchfliessende Wasser sich bewegt Die Schnittfläche wurde wiederholt mit Löschpapier abgetrock net und das Ausquellen des Wassers durch die Lupe beobachtet

Ich will hier in aller Kürze einige dergleiche Beobachtunge beschreiben, während ich für die näheren Details der diesbe züglichen Versuche auf deren specielle Beschreibung verweise Hinter jeder Beobachtung ist zu diesem Zwecke in Klammern die Nummer des betreffenden Versuchs angegeben.

Helleborus niger.

Beobachtung der Schnittfläche eines 4 Centim. langen Stücks des Blattstieles. Quecksilberdruck: 16,5 centim. (Vers. 40).

Das Wasser quillt nur aus den getrennt liegenden Gefässbündeln hervor.

Cordia Franciscea.

Beobachtung der Schnittfläche eines 4,5 Centim. langen Zweigstückes. Quecksilberdruck: 18 Centim. (Vers. 29).

Das Wasser zeigt sich zuerst nur am Durchschnitte des Holzcilinders, um sich von dort aus bald über die ganze Schnittfläche zu verbreiten.

Vitis vinifera.

Beobachtung der Schnittfläche eines einige Centim. langen Zweigstückes. Quecksilberdruck: 21,5 Centim. (Vers. 82).

Das Wasser quillt nur aus dem Holzkörper hervor.

Peristrophe speciosa.

Beobachtung der Schnittfläche eines einige Centim. langen Zweigstückes. Quecksilberdruck: 18 Centim. (Vers. 51).

Das Wasser tretet nur aus den Gefässbündeln hervor.

Sambucus nigra.

Beobachtung der Schnittfläche eines einige Centim. langen Zweigstückes. Quecksilberdruck: 34 Centim. (Vers. 68).

Das Wasser tretet nur aus dem Holzkörper hervor.

Man sieht also, dass das eingepresste Wasser sich immer durch die Gefässbündel bewegt, und zwar, nach denjenigen Fällen zu urtheilen, wo der Holztheil für sich leicht zu erkennen war, durch das Holz.

Weiter erwähne ich schon jetzt, dass ich von Syringa vulgaris, Ulmus effusa und Hedera Helix nicht nur unverletzte Zweige dem Versuche unterworfen habe, sondern auch solche, denen am unteren Ende ein Rindenring entnommen war. Hier konnte also das eingepresste Wasser nur durch das Holz die Blätter erreichen, denn das aus todten Zellen gebildete, lufthaltige Mark kan mann in dieser Beziehung ruhig ausser Acht lassen.

Dennoch zeigten sich die Folgen des Druckes an den Blättern dieser geringelten Zweige genau in derselben Weise als bei den unverletzten.

Aus dem Mitgetheilten schliesse ich: das sich in meinen Versuchen der Wasserstrom durch das Holz bewegt.

Insofern ist also die auf die beschriebene Weise, künstlich hervorgerufene Wasserbewegung der unter Umständen durch den Wurzeldruck verursachten vollkommen vergleichbar.

Indem ich im Vorhergehenden den Apparat und die Methode der Untersuchung beschrieben habe, gehe ich jetzt zur speciellen Beschreibung der einzelnen Versuche und ihrer Resultate über. Zum leichteren Verständniss will ich aber schon jetzt mittheilen, dass die Hauptresultate der Untersuchung, die ich in einem besonderen Abschnitte eingehend besprechen werde, folgende sind.

1⁰. Tropfenausscheidung an bestimmten Stellen der Blattoberfläche findet bei vielen Pflanzen statt.

2⁰. Fast eben so allgemein verursacht der Druck die Injection der Intercellularräume des Blattes.

3⁰. Die Blätter verschiedener Pflanzen zeigen Tropfenausscheidung und Injection beide.

Wie bekannt sind die Intercellularräume vorzugsweise an der Blattunterseite entwickelt, und da sie mit Luft erfüllt sind, so ist auch diese Seite der meisten Blätter mehr blassgrün gefärbt als die Oberseite. Die Injection offenbart sich somit dadurch, dass die Blattunterseite ganz oder stellenweise eine dunkelgrüne Farbe annimmt Zugleich erscheinen die injicirten Theile mehr durchsichtig als die nicht injicirten, wie auch ein Blatt Papier, aus dem man durch Oel die Luft vertrieben hat, durchsichtig wird

Wenn die Zweige, deren Blätter injicirt worden, nach Beendigung des Versuchs in Wasser an die Luft gestellt werden, so verlieren die Blätter nach kürzerer oder längerer Zeit durch Verdampfung das Wasser aus ihren Intercellularräumen.

Wie später ausgeführt werden wird, war die Injection in allen beobachteten Fällen vollkommen unschädlich, die Blätter wurden wieder ganz normal und blieben auch nachher längere Zeit frisch und lebenskräftig. Doch kann ohne allem Zweifel

unter Umständen diese Erscheinung dem Leben der Pflanze sehr nachtheilig sein, wie ich es unten noch ausführlicher besprechen werde.

II. Beschreibung der Versuche.

Zum Verständniss des Folgenden will ich nur wenige Worte voranschicken und ein Paar Sachen andeuten, deren ich hier ein für allemal erwähne, damit ich sie nicht jedesmal zu wiederholen brauche.

Jede Versuchsbeschreibung besteht aus drei Abschnitten. Der erste enthält alle Einzelnheiten, die Einrichtung des Versuchs betreffend. In diesem Abschnitte werde ich u. a. die während der Versuchsdauer, meist mit Zwischenräumen von einigen Stunden oder einem Tage, abgelesene Zimmertemperaturen angeben Diese Beobachtungen beanspruchen keine grosse Genauigkeit. Es soll dadurch nur gezeigt werden, dass im Allgemeinen die Temperatur im Arbeitszimmer ziemlich constant war.

Im zweiten Abschnitte wird das Resultat des Versuchs beschrieben. Dazu bemerke ich erstens, dass jede Zeitangabe hier vom Anfang des Versuchs an gerechnet ist. Zweitens erlaubten mir meine Beschäftigungen keineswegs immer die Versuchspflanze fortwährend zu beobachten, so dass es nicht immer möglich war, den Zeitpunkt zu notiren, an dem die Ausscheidung oder die Injection sich zu zeigen anfing. Wo es geschah wird es aus der Beschreibung ersichtlich sein, sonst aber fällt die erste Beobachtung keineswegs mit dem Anfang der Ausscheidung oder Injection zusammen.

Nach Beendigung des Versuchs wurde der Zweig fast ohne Ausnahme in Wasser gestellt, nachdem meistens die Schnittfläche erneuert worden war. Der dritte Abschnitt der Beschreibung enthält nun die während dieser Periode gemachten Beobachtungen.

Die Zeitangaben in diesem Theile sind immer vom Ende des Versuchs an gerechnet, d. h. also von dem Augenblicke, an dem der Spross aus dem Apparat genommen und in Wasser

gestellt wurde. Nie habe ich gesehen, dass solche Zweige früher eingingen als andere, nicht zu Versuchen verwendete; gelegentlich fand sogar das Gegentheil statt.

Versuch 1.

Acer Pseudoplatanus. 11. Juli '79.

Ein kurzer Zweig mit 4 erwachsenen Blattpaaren wird um 12 U. Mittags auf das mit destillirtem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Quecksilberdruck: anfangs 23 Centim., am Ende 12 Centim. Temperatur: 16°, 16,5°, 16° C.

Resultat. Nach $^1/_2$ Stunde ist keine Veränderung an den Blättern sichtbar. Es ist schon 1 CC. Wasser eingepresst worden.

Nach $1^1/_2$ Stunde noch ebenso. Im Ganzen ist 1.5 CC. Wasser eingepresst worden.

Nach 21 Stunden. Alle Blätter sind ganz und gar fast gleichmässig injicirt. Keine Tropfenausscheidung. Im Ganzen sind 4 CC. Wasser eingepresst worden.

Der Zweig wird in Wasser gestellt. Nach 2 Tagen (19° C.) sind die Blätter nicht mehr injicirt, vollkommen frisch und lebenskräftig.

Versuch 2.

Ageratum coeruleum. 18. Nov. '78.

Ein aus dem Gewächshause geholter Zweig mit 8 Blättern wird um 11 U. Vorm. auf das mit gewöhnlichem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Quecksilberdruck: anfangs 20 Centim., am Ende 15 Centim. Temperatur: 11°, 13°, 9,5° C.

Resultat. Nach 4 Stunden haben die 2 unteren Blätter auf der Oberseite eines jeden Blattzahnes einen sehr grossen Tropfen ausgeschieden. Die übrigen Blätter sind trocken.

Nach 24 Stunden ist alles noch so wie nach 4 Stunden Es sind jetzt 2 CC. Wasser eingepresst worden.

Der Zweig wird in Wasser gestellt. Nach 5 Tagen (10° C.) ist er noch vollkommen frisch.

Versuch 3.

Ailanthus glandulosa. 28. Oct. '78.

Ein einziges Blatt mit 16 Fiederblättchen wird um 11 U. Vorm. auf das mit gewöhnlichem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Quecksilberdruck: anfangs 20 Centim., am Ende 14 Centim. Temperatur: 12,5°, 13,5° C.

Resultat. Nach 24 Stunden sind die 8 unteren Blättchen (4 Paare) zum grössten Theil injicirt; dazu haben sich, über ihre ganze untere Fläche zerstreut, sehr zahlreiche und grosse Tropfen ausgeschieden. Es sind 2,4 CC. Wasser eingepresst worden.

Das Blatt wird in Wasser gestellt; nach 2 Tagen sind die Blättchen nicht mehr injicirt, vollkommen frisch und normal; nach 4 Tagen (13,5° C.) ebenso.

Versuch 4.

Arbutus Unedo. L. 19. Nov. '78.

Ein aus dem Garten geholter Zweig mit etwa 20 Blättern verschiedenen Alters wird um 11 U. Vorm. auf das mit gewöhnlichem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Quecksilberdruck: anfangs 20 Centim. Senkung nicht notirt. Temperatur: 11°, 9° C.

Resultat. Schon nach 10 Minuten zeigen sich an den Spitzen vieler Zähne bei jüngeren und älteren Blättern schon kleine, aber deutliche Tropfen. Zugleich sind die älteren Blätter schon stellenweise ein wenig injicirt Nach 4 Stunden trägt etwa die Hälfte der Blätter einen grossen Tropfen auf

der Oberseite der Blattzähne. Alle Blätter sind jetzt injicirt, die 6 unteren ganz und gar fast gleichmässig, die oberen nicht so stark, mehr stellenweise.

Der Zweig wird in Wasser gestellt. Nach 2 Tagen (10° C.) sind alle Blätter noch injicirt. Nach 4 Tagen ist die Injection fast ganz verschwunden; nur einige Blätter haben noch injicirte Stellen. Nach 6 Tagen ist kein einziges Blatt mehr injicirt, alles frisch und normal. Nach 18 Tagen ist der Zweig noch ganz frisch und lebenskräftig.

Versuch 5.

Adhatoda Vasica. NEES. 28. Oct. '78.

Ein Zweig mit 4 grossen und 2 sehr kleinen Blättern wird um 11 U. Vorm. auf das mit gewöhnlichem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Aus der Schnittfläche fliesst ein weisslicher (Milch?) Saft in das Wasser hinaus. Quecksilberdruck: anfangs 19 Centim., am Ende 15 Centim. Temperatur: 12,5°, 13,5°, 13,5° C.

Resultat. Nach 24 Stunden sind an nicht näher bestimmten Stellen des glatten Randes bei drei Blättern ziemlich viele, grosse Tropfen ausgeschieden. Es ist 1,6 CC. Wasser eingepresst worden. Nach 3 Tagen sind die Blätter alle wieder trocken; es sind im Ganzen 2,2 CC. Wasser eingepresst worden.

Versuch 6.

Adhatoda Vasica. NEES. 19. Juli '79.

Ein Zweig mit 2 alten, gelben, 4 erwachsenen und 4 noch nicht erwachsenen, zarten Blättern wird um 3 U. Nachm. auf das mit destillirtem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Quecksilberdruck: anfangs 23 Centim., am Ende 11 Centim. Temperatur: 20°, 19° C.

Resultat. Nach 27 Minuten ist die Ausscheidung der 4 erwachsenen Blätter schon im Gange. Nach 42 Minuten haben

diese 4 Blätter an nicht näher bestimmten Stellen des glatten Randes und zwar nur an der unteren Fläche des Blattes viele Tropfen ausgeschieden (z B. 14 oder 25 an einem Blatte). Der Rand der oberen Blattfläche ist trocken, ebenso wie die alten und auch die nicht erwachsenen Blätter. Druck: noch 22,2 Centim.; es ist $^1/_2$ CC. Wasser eingepresst worden.

Nach 24 Stunden: reichliche Ausscheidung der erwachsenen Blätter, sonst alles trocken. Es sind 6,7 CC. Wasser eingepresst worden.

Der in Wasser gestellte Zweig ist am nächsten Tage (17,2^0 C.) vollkommen frisch.

Versuch 7.

Aucuba japonica. 9. Nov. '78.

Ein Zweig mit 6 Blättern sehr verschiedener Grösse wird um 2 U. Nachm. auf das mit gewöhnlichem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Quecksilberdruck: anfangs 22 Centim., Senkung nicht notirt. Temperatur: 13^0, 12,5^0 C.

Resultat. Nach $^3/_4$ Stunden zeigen die Blätter noch keine Veränderung.

Nach 2 Tagen tragen einige Blattzähne einen grossen Tropfen. Dazu sind 5 Blätter mehr weniger infiltrirt, die untere Blattfläche wie besät mit kleinen dunkelgrünen Stellen, die der kleinen oberen Blätter am stärksten.

Der Zweig wird in Wasser gestellt. Nach 5 Stunden (12,5^0 C.) ist bei 3 Blättern die Injection ganz verschwunden, bei den zwei übrigen zum grossen Theil. Nach 24 Stunden (12^0 C.) sind alle Blätter wieder normal, frisch und lebenskräftig.

Versuch 8.

Aucuba japonica. 17. Dec. '78.

Ein aus dem Garten geholter Zweig mit 4 grossen und 2 kleinen Blättern wird um 11 U. Vorm. auf das mit gewöhn-

lichem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Quecksilberdruck: anfangs 20 Centim., am Ende 16 Centim. Temperatur: 5^0, $5{,}5^0$, 6^0 C.

Resultat. Nach 2 Tagen tragen viele Blattzähne entweder an der Ober- oder and der Unterseite einen sehr grossen Tropfen. Dazu sind die Blätter stellenweise injicirt. Ausscheidung und Injection an den 2 jüngsten Blättern am stärksten. Es ist etwa 1 CC. Wasser eingepresst worden.

Nach 3 Tagen: Ausscheidung und Injection wie bei der vorigen Beobachtung. Die Injection ist etwas stärker, zumal am Blattrande. Es sind im Ganzen etwa 2,2 CC. Wasser eingepresst worden.

Der Zweig wird in Wasser gestellt. Nach einem Tage ($9{,}5^0$ C.) sind die Blätter gar nicht mehr injicirt. Nach 9 Tagen (3.5^0, 9^0 C.) ist der Zweig noch vollkommen frisch und lebenskräftig.

Versuch 9.

Aucuba japonica. 24. Apr. '78.

Ein Zweig mit 4 Blättern wird aus dem Garten geholt und um 11 U. Vorm. auf das mit destillirtem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Quecksilberdruck: anfangs 10,5, Centim., Senkung unbedeutend. Temperatur 11^0, $11{,}5^0$, 11^0, 12^0 C.

Resultat. Nach 4 Stunden: noch keine Ausscheidung oder Injection.

Nach 24 Stunden hat nur ein Blatt am Rande der unteren Blattfläche ein Paar kleine Tropfen ausgeschieden. Alle Blätter haben zerstreute und sehr kleine injicirte Stellen. Es ist fast kein Wasser eingepresst worden. Die Blätter werden jetzt abgetrocknet und der Druck wird auf 14,5 Centim. gebracht.

Nach 2 Tagen sind alle Blätter trocken, die Injection noch so wie bei der vorigen Beobachtung. Es ist im Ganzen noch nicht 1 CC. Wasser eingepresst worden.

Der nachher in Wasser gestellte Zweig ist nach 2 Ta-

gen (12^0 C.) noch vollkommen frisch, die Injection ist verschwunden.

Versuch 10.

Begonia incarnata. 22. Febr. '79.

Ein Zweig mit einem noch jungen und 2 erwachsenen Blättern wird aus dem Gewächshause geholt und um 4 U. Nachm. auf das mit destillirtem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Quecksilberdruck: anfangs 19 Centim., Senkung nicht notirt. Temperatur: 5,5^0, 4,5^0 C.

Resultat. Schon nach 16 Minuten tragen sehr viele feine Blattzähne kleine Tropfen auf ihrer Oberseite.

Nach 2 Tagen sind grosse Tropfen durch fast alle Blattzähne ausgeschieden.

Der Zweig wird in Wasser unter eine Glasglocke gestellt, und ist nach 7 Tagen (4,5^0, 5^0, 5,5^0 C.) noch vollkommen frisch.

Versuch 11.

Begonia manicata. 29. Apr. '79.

Ein einziges Blatt einer im Zimmer gezogenen Pflanze wird um 12 U. Mittags auf das mit destillirtem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Quecksilberdruck: anfangs 32 Centim., am Ende 31,5 Centim. Temperatur: 11,5^0, 12,5^0, 10^0 C.

Resultat. Nach 4 Stunden tragen fast alle Blattzähne auf ihrer Oberseite grosse Tropfen.

Nach 2 Tagen sind die Tropfen zum Theil verdunstet. Es ist im Ganzen nur etwa 0,3 CC. Wasser eingepresst worden.

Das in Wasser gestellte Blatt ist nach 4 Tagen (12,5^0 C.) noch vollkommen frisch und lebenskräftig.

Versuch 12.

Boehmeria pilosiuscula. 1. Dec. '78.

Ein Zweig mit 4 erwachsenen Blattpaaren wird aus dem Gewächshause geholt und um 1 U. Nachm. auf das mit gewöhnlichem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Quecksilberdruck: anfangs 22,5 Centim., am Ende 16,5 Centim. Temperatur: 8,5°, 6,5° C.

Resultat. Nach einer Stunde ist alles noch ungeändert. Nach einem Tage hat bei allen Blättern die ganze obere Blattfläche gleichmässig Wasser ausgeschieden und ist demzufolge ganz und gar nass. Die untere Blattfläche ist vollkommen trocken. Es sind etwa 2 CC. Wasser eingepresst worden.

Der nachher in Wasser gestellte Zweig ist nach 5 Tagen 8°, 14° C.) noch vollkommen frisch und lebenskräftig.

Versuch 13.

Borrago officinalis. 6. Oct. '78.

Ein Zweig mit einigen Blättchen und ein Dutzend Blüthen verschiedenen Alters wird um 11 U. Vorm. auf das mit gewöhnlichem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Quecksilberdruck: anfangs 14,5 Centim., am Ende 4 Centim. Temperatur: 15°, 14,5°. C.

Resultat. Nach 24 Stunden tragen verschiedene Blättchen und auch Kelchblätter einen grossen Tropfen an der Spitze. Die Blätter werden abgetrocknet.

Nach 6 Tagen hat wieder eine reichliche Ausscheidung stattgefunden. Es sind im Ganzen etwa 5 CC. Wasser eingepresst worden.

Versuch 14.

Buxus sempervirens. 28. Nov. '78.

Ein Zweig mit verschiedenen Seitenzweigen und sehr vielen

Blättern wird um 11 U. Vorm. auf das mit gewöhnlichem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Quecksilberdruck: anfangs 22 Centim., am Ende 18 Centim. Temperatur: 13°, 9,5° C.

Resultat. Nach 2 Tagen sind fast alle Blätter von dem Mittelnerven ausgehend fast bis zum Rande gleichmässig injicirt. Es ist 1,5 CC. Wasser eingepresst worden.

Ein einige Centim. langer Theil des Zweiges wird unter Wasser abgeschnitten und der Zweig in Wasser gestellt. Nach 5 Tagen (8,5°, 6°, 8° C.) ist die Injection noch nicht verschwunden.

Nach 7 Tagen sind nur noch wenige Blätter schwach injicirt, die meisten wieder normal.

Nach 9 Tagen (6° C.) ist die Injection ganz verschwunden, der Zweig frisch und normal.

Versuch 15.

Calamagrostis variegatus. 21. Juli '79.

Ein Stengel mit 5 Blättern (das obere noch aufgerollt) wird dicht unter einem Knoten abgeschnitten und um 11 U. Vorm. auf das mit destillirtem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Quecksilberdruck: anfangs 18 Centim., Senkung nicht notirt. Temperatur: 17°, 17° C.

Resultat. Nach 17 Minuten haben die drei ältesten Blätter an nicht näher bestimmten Stellen des Randes schon verschiedene Tropfen ausgeschieden. Die 2 ältesten Blätter werden jetzt abgeschnitten.

Nach $1^3/_4$ Stunde trägt jedes der 3 übriggebliebenen Blätter einen grossen Tropfen an der Spitze.

Der Zweig wird in Wasser unter eine Glasglocke gestellt und ist am nächsten Tage (17,8° C.) noch vollkommen frisch und lebenskräftig.

Versuch 16.

Callicoma serratifolia. 5. Nov. '78.

Ein aus dem Gewächshause geholter Zweig mit einigen kleinen Seitenzweigen und etwa 25 Blättern verschiedenen Alters wird um 11 U. Vorm. auf das mit gewöhnlichem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Quecksilberdruck: anfangs 18 Centim., am Ende 14 Centim. Temperatur: 14⁰, 9,5⁰, 9,5⁰ C.

Resultat. Nach 4 Stunden haben 7 Blätter auf der Oberseite einiger Blattzähne einen Tropfen ausgeschieden.

Nach einem Tage haben fast alle Blätter auf dieselbe Weise grosse Tropfen ausgeschieden. Es sind jetzt etwa 2 CC. Wasser eingepresst worden.

Der in Wasser gestellte Zweig bleibt noch längere Zeit frisch.

Versuch 17.

Camellia japonica. 5. Dec. '78.

Ein verholzter Zweig mit 10 Blättern wird aus dem Gewächshause geholt und um 2 U. Nachm auf das mit gewöhnlichem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Quecksilberdruck: anfangs 20 Centim., am Ende 17 Centim. Temperatur: 8,5⁰, 15⁰ C.

Resultat. Nach 2 Tagen sind alle Blätter injicirt; die ganze untere Blattfläche ist gleichmässig mit kleinen dunkelgrünen Stellen wie besät. Es ist etwa 1,6 CC. Wasser eingepresst worden.

Der Zweig wird in Wasser gestellt. Nach 2 Tagen (8,5⁰ C.) ist die Injection der 3 jüngsten Blätter wieder verschwunden, die der übrigen nicht.

Nach 3 Tagen (6⁰ C.) sind nur noch die 2 ältesten Blätter an ihrer Basis ein wenig injicirt.

Nach 5 Tagen (5° C.) ist die Injection aller Blätter vollkommen verschwunden.

Nach 16 Tagen (9° C.) ist der ganze Zweig noch vollkommen frisch und lebenskräftig.

Versuch 18.

Camellia japonica. 1. Mai '79.

Ein Zweig mit 4 Blättern wird aus dem Gewächshause geholt und um 12 U. Mittags auf das mit destillirtem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Quecksilberdruck: anfangs 30,5 Centim., am Ende 27,5 Centim. Temperatur: 10°, 15,5°, 12,5° C.

Resultat. Nach 4 Stunden sind alle Blätter injicirt; die untere Blattfläche ist dunkelgrün punktirt, bei den 3 oberen, jüngeren Blättern am stärksten, bei den 2 unteren, älteren nur schwach.

Nach 2 Tagen sind alle Blätter stark injicirt, ihre untere Fläche ist gleichmässig dunkelgrün gefärbt. Das älteste Blatt trägt über die Unterfläche zerstreut einige ausfiltrirte Wassertropfen. Es ist im Ganzen etwa 1,5 CC. Wasser eingepresst worden.

Am nachher in Wasser gestellten Zweige ist nach 5 Tagen die Injection der Blätter vollkommen verschwunden.

Versuch 19.

Castanea vesca. 23. Juli '79.

Ein Zweig mit 7 erwachsenen Blättern wird um 3 U. Nachm. auf das mit gewöhnlichem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Quecksilberdruck: anfangs 19 Centim., am Ende: 14 Centim. Temperatur 18,5°, 18,2°, 17,5° C.

Resultat. Nach einer Stunde macht sich an den Blättern noch keine Veränderung bemerkbar.

Nach 20 Stunden sind alle Blätter sehr stark inji-

cirt, die untere Blattfläche gleichmässig dunkelgrün gefärbt, indem sie zerstreute, ausfiltrirte Wassertropfen trägt. Es sind im Ganzen 2,6 CC Wasser eingepresst worden.

Der Zweig wurde nicht weiter beobachtet, das Verschwinden der Injection also nicht constatirt.

Versuch 20.

Cestrum Regelii. 12. Dec. '78.

Ein Zweig mit 7 Blättern wird aus dem Gewächshause geholt und um 12 U. Mittags auf das mit gewöhnlichem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Quecksilberdruck: anfangs 19 Centim., am Ende 11 Centim. Temperatur: 5°, 9° C.

Resultat. Fortwährend beobachtend, sehe ich schon nach einer Viertelstunde an nicht näher bestimmten Stellen des glatten Blattrandes kleine Tropfen austreten. Zugleich zeigen sich am Rande kleine injicirte Stellen.

Nach zwei Tagen tragen alle Blätter am Rande der unteren Blattfläche sehr grosse Tropfen. Auch haben die Blätter über die ganze Fläche zerstreute, injicirte Stellen, die grössten am Rande. Es sind im Ganzen 4,5 CC. Wasser eingepresst worden.

Der Zweig wird in Wasser gestellt. Nach 2 Stunden (9° C.) ist die Injection vollkommen verschwunden; jetzt wird das Glas mit dem Zweige unter eine Glasglocke gestellt.

Nach 7 Tagen (4,5°, 5°, 6°, 9,5° C.) ist der Zweig noch vollkommen frisch und lebenskräftig.

Versuch 21.

Cestrum Regelii. 24. Apr. '79.

Ein Zweig mit 15 Blättern wird aus dem Gewächshause

rolt und um 11 U. Vorm. auf das mit destillirtem Wasser füllte Rohr befestigt. Quecksilberdruck: anfangs 10 Centim. mperatur: 11°, 11,5°, 11°, 12° C.

Resultat. Nach 40 Minuten zeigen die 2 unteren Blät- einige kleine injicirte Stellen am Rande. Keine sscheidung.

Nach 4 Stunden: noch ebenso.

Nach 25 Stunden: Tropfenausscheidung am Rande r meisten Blätter, injicirte Stellen wie oben. wöhnlich findet keine Injection statt an den Stellen, wo Was- r austretet und umgekehrt. Druck noch 6 Centim. Es sind s jetzt etwa 2 CC. Wasser eingepresst worden. Der Druck rd auf 12 Centim. gebracht.

Nach 2 Tagen: Injection und Tropfenausscheidung wie oben. ruck noch 6,5 Centim. Es sind im Ganzen etwa 5 CC. asser eingepresst worden.

Der in Wasser gestellte Zweig ist nach 2 Tagen (12° C.) welkt.

Versuch 22.

Cestrum Regelii. 18. Juli '79.

Ein gewelkter Zweig mit 9 erwachsenen Blättern wird um 4 U. hm. auf das mit destillirtem Wasser gefüllte Rohr befestigt. ecksilberdruck: anfangs 22 Centim., am Ende 16 Centim. mperatur: 20,3°, 20° C.

Resultat. Alle Blätter, auch die ganz schlaffen sind h wenigen Minuten ganz frisch geworden Nach $1/_2$ Stunde keine Ausscheidung oder Injection.

ch 19 Stunden: reichliche Tropfenausscheidung nicht näher bestimmten Stellen des Randes. Blätter sind am Rande stellenweise inji- , die älteren über ihre ganze Oberfläche. Es etwa 2,2 CC. Wasser eingepresst worden.

Der Zweig wird in Wasser unter eine Glasglocke gestellt. Nach einem Tage (19° C.) ist die Injection verschwunden und der Zweig noch frisch und lebenskräftig.

Versuch 23.

Cestrum Regelii. 19. Juli '79.

Ein Zweig mit etwa 25, meist erwachsenen Blättern wird um 12 U. Mittags auf das mit destillirtem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Quecksilberdruck: anfangs 24,5 Centim., am Ende 21,3 Centim. Temperatur: 20° C.

Resultat. Fortwährend beobachtend sehe ich schon nach 10 Minuten am Rande vieler Blätter die Injection stellenweise erscheinen.

Nach 2 Stunden: ziemlich grosse injicirte Stellen wie oben. Am Rande der unteren Blattfläche trägt jedes Blatt zahlreiche Wassertropfen (im Mittel 10 an einem Blatte). Die Tropfen treten aus injicirten, wie auch aus nicht injicirten Stellen hervor. Es ist im Ganzen etwa 1 CC. Wasser eingepresst worden.

Der Zweig wird in Wasser unter eine Glasglocke gestellt. Nach einem Tage (19° C.) sind die Blätter nicht mehr injicirt, dazu frisch und lebenskräftig.

Versuch 24.

Cestrum roseum. H. B. 18. Jan. '79.

Ein Zweig mit 9 grossen Blättern wird aus dem Gewächshause geholt und um 2 U. Nachm. auf das mit destillirtem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Quecksilberdruck: anfangs 20 Centim., Senkung nicht notirt. Temperatur: 5,5° C.

Resultat. Schon nach fünf Minuten hat der Rand der Blattoberseite wie auch der Unterseite zahlreiche kleine Tropfen ausgeschieden. Zugleich

zeigen sich am Rande schon kleine injicirte Stellen.

Nach $^1/_2$ Stunde sind die Tropfen sehr gross geworden und ist der Blattrand fast gleichmässig zur Breite von etwa 3 Millim. injicirt. Die Tropfen treten sowohl aus injicirten, wie aus nicht injicirten Theilen des Randes zum Vorschein.

Der Zweig wird in Wasser gestellt. Nach 2 Tagen (2,5^0 C.) ist die Injection noch ziemlich stark.

Nach 3 Tagen (5^0 C.) sind die Blätter nicht mehr injicirt, frisch und normal.

Nach 7 Tagen (4^0, 6,5^0 C.) noch ebenso.

Versuch 25.

Cestrum roseum. 27. Febr. '79.

Ein Zweig mit 6 Blättern wird aus dem Gewächshause geholt und um 12 U. Nachm. auf das mit destillirtem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Quecksilberdruck: anfangs 23 Centim., am Ende 19 Centim. Temperatur: 5,5^0, 5,5^0 C.

Resultat. Schon nach $^1/_4$ Stunde tragen die Blätter schöne Tropfen am Rande (etwa 6 pro Blatt). Das älteste Blatt hat am Rande schon ein Paar injicirte Stellen.

Nach 21 Stunden sind die Tropfen sehr gross geworden. Nur 2 Blätter besitzen am Rande einzelne injicirte Stellen. Es ist etwa 1,6 CC. Wasser eingepresst worden.

Der Zweig wird in Wasser unter eine Glasglocke gestellt.

Nach 3 Tagen (5,5^0 C.) ist die Injection verschwunden, der Zweig frisch und lebenskräftig.

Versuch 26.

Cestrum roseum. 18. Juli '79.

Ein etwas gewelkter Zweig mit 10 erwachsenen, 3 noch jun-

gen Blättern und eine sich entwickelnde Endknospe wird um 3 U. Nachm. auf das mit destillirtem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Quecksilberdruck: anfangs 23 Centim., Senkung nicht notirt. Temperatur 20° C.

Resultat. Der Zweig wird sehr rasch wieder turgescent. Schon nach 8 Minuten treten sehr kleine Tropfen am Rande auf.

Nach 20 Minuten tragen die erwachsenen und das älteste der noch wachsenden Blätter zahlreiche Tropfen am Rande der Ober- wie auch der Unterseite (z. B. 24 an einem Blatte). Die jüngsten Blätter sind trocken. Injection fand an keinem Blatte statt.

Der Zweig wird in Wasser unter eine Glasglocke gestellt und ist nach 2 Tagen (20°, 19° C.) noch vollkommen frisch und lebenskräftig.

Versuch 27.

Colubrina nepalensis. 29. April '79.

Ein Zweig mit etwa 12 Blättern wird aus dem Garten geholt und um 12 U. Mittags auf das mit destillirtem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Quecksilberdruck: anfangs 26 Centim., am Ende 19 Centim. Temperatur 11,5°, 12,5°, 10° C.

Resultat. Nach 4 Stunden sind die unteren Blätter ganz und gar gleichmässig injicirt indem zugleich, über die Unterseite unregelmässig verbreitet, viele ausfiltrirte Tropfen vorkommen. Die oberen Blätter sind nicht so stark injicirt, ihre Unterseite ist trocken.

Nach 2 Tagen sind alle Blätter ganz und gar gleichmässig injicirt; die 2 jüngsten sind trocken, bei den übrigen ist die untere, wie die obere Blattfläche mit ausfiltrirten Wassertropfen besetzt. Keine Ausscheidung am Blattrande. Es sind im Ganzen etwa 4 CC. Wasser eingepresst worden.

Der Zweig wird in Wasser gestellt; nach 36 Stunden (28^0 C.) ist die Injection verschwunden, der ganze Zweig frisch und normal.

Versuch 28.

Cordia Franciscea. 18. Nov. '78.

Ein Zweig mit 4 Blättern wird aus dem Gewächshause geholt und um 11 U. Vorm. auf das mit gewöhnlichem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Quecksilberdruck: anfangs 18 Centim., am Ende 16 Centim. Temperatur: 13^0, 10^0, 9,5^0 C.

Resultat. Nach 4 Stunden haben einige Blattzähne auf ihrer Oberseite einen kleinen Tropfen ausgeschieden.

Nach einem Tage tragen 2 Blätter auf mehreren Zähnen einen Tropfen. Die 4 Blätter sind ganz und gar injicirt, so dass die untere Blattfläche gleichmässig dunkelgrün gefärbt ist. Es ist etwa 1 CC. Wasser eingepresst worden.

Der Zweig wird in Wasser gestellt. Nach 40 Minuten (9,5^0 C.) ist die Injection der oberen Blätter zum Theil verschwunden.

Nach 4 Stunden ist nur das untere Blatt an der Basis noch ein wenig injicirt.

Nach 3 Tagen sind alle Blätter ganz normal, frisch und lebenskräftig.

Versuch 29.

Cordia Franciscea. 26. Apr. '79.

Ein junger, noch nicht verholzter Zweig mit 6 Blättern wird aus dem Gewächshause geholt und um 3 U. Nachm. auf das mit destillirtem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Quecksilberdruck: anfangs 10 Centim. Temperatur 12^0, 12^0, 11,5^0 C.

Resultat. Nach 2 Tagen tragen fast alle Blattzähne auf ihrer Unterseite grosse Wassertropfen. Keine Injection. Druck noch 4 Centim.; es sind 3,3 CC. Wasser ein-

gepresst worden. Der Druck wird jetzt auf 19 Centim. gebracht, die Blätter werden abgetrocknet. Nach 3 Tagen hat wieder eine sehr reichliche Ausscheidung stattgefunden, aber keine Injection. Druck noch 18 Centim.; es sind im Ganzen etwa 3,8 CC. Wasser eingepresst worden. Der Zweig wird abgeschnitten und das Hervorquellen des Wassers aus der Schnittfläche beobachtet (man vergleiche S. 252).

Der abgeschnittene Zweig wird in Wasser gestellt und ist nach 2 Tagen (10⁰ C.) abgewelkt.

Versuch 30.

Datura sanguinea. 10. Dec. '78.

Ein Zweig mit 5 grossen Blättern wird aus dem Gewächshause geholt und um 11 U. Vorm. auf das mit gewöhnlichem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Quecksilberdruck: anfangs 23 Centim., am Ende 9 Centim. Temperatur: 6^0, 12^0, 5^0 C.

Resultat. Nach 4 Stunden tragen die Spitzen der Blätter und der Blattzähne grosse Wassertropfen.

Nach 2 Tagen tragen nur die Blattspitzen noch Tropfen. Es sind im Ganzen etwa 5,6 CC. Wasser eingepresst worden

Der Zweig wird in Wasser unter eine Glasglocke gestellt und ist nach 11 Tagen (9^0 C.) noch vollkommen frisch und lebenskräftig.

Versuch 31.

Datura sanguinea. 3. Mai '79.

Ein Zweig mit 9 Blättern wird aus dem Garten geholt und um 12 U. Mittags auf das mit destillirtem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Quecksilberdruck: anfangs 39 Centim., am Ende 15,5 Centim. Temperatur: $12{,}5^0$, $12{,}5^0$ C.

Resultat. Nach 2 Minuten zeigen sich schon sehr zahlreiche kleine Tropfen zerstreut am Blattrande, die Ausscheidung ist keineswegs auf den Zahnspitzen beschränkt,

die Tropfen befinden sich auf der Ober-, wie auf der Unterseite des Randes.

Nach 2 Tagen sind die Tropfen am Rande zum grössten Theil verschwunden. Es finden sich jetzt viele kleine Tropfen, zerstreut über die ganze obere, aber zumal über die untere Blattfläche. Die fünf ältesten Blätter haben kleine zerstreute injicirte Stellen, unabhängig von der Tropfenausscheidung. Es sind im Ganzen etwa 9,5 CC. Wasser eingepresst worden.

Der Zweig wird in Wasser gestellt. Nach einem Tage (13⁰ C.) ist die Injection verschwunden; alles frisch und lebenskräftig.

Versuch 32.

Datura sanguinea. 19. Juli '79.

Ein Zweig mit 13 erwachsenen und einigen noch ganz jungen Blättchen wird um 2 U. Nachm. auf das mit destillirtem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Quecksilberdruck: anfangs 23 Centim., Senkung nicht notirt. Temperatur: 20,5⁰ C.

Resultat. Nach 7 Minuten hat die Ausscheidung schon angefangen.

Nach $^1/_2$ Stunde finden sich überall auf der Unter-, wie auf der Oberseite des Blattrandes schöne Tropfen (z. B. 50 am einem nicht sehr grossen Blatte). Die jungen, noch nicht erwachsenen Blättchen haben nichts ausgeschieden. Injection fand nicht statt.

Der Zweig wird in Wasser unter eine Glasglocke gestellt und ist nach einem Tage (19⁰ C.) noch ganz frisch und lebenskräftig.

Versuch 33.

Dichroa cyanitis. 11. Nov. '78.

Ein grosses, etwa 2 Decim. langes Blatt wird aus dem Gewächshause geholt und auf das mit gewöhnlichem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Quecksilberdruck: anfangs 22 Centim., am Ende 14 Centim. Temperatur: 12,5⁰, 14,5⁰, 12⁰ C.

Resultat. Schon nach 6 Minuten fängt die Ausscheidung an allen Blattzähnen an.

Nach 17 Minuten tragen alle Blattzähne grosse Tropfen.

Nach einem Tage: sehr reichliche Wasserausscheidung. Es sind im Ganzen etwa 3 CC. Wasser eingepresst worden.

Das Blatt bleibt noch längere Zeit frisch.

Versuch 34.

Eupatorium triplinerve. VAHL. 19. Nov. '78.

Ein Zweig mit 10 grossen und einigen kleinen Blättern wird aus dem Gewächshause geholt und um 11 U. Vorm. auf das mit gewöhnlichem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Quecksilberdruck: anfangs 18 Centim., Senkung nicht notirt. Temperatur: 9,5°, 9° C.

Resultat. Nach 10 Minuten tragen die Blattzähne bei 2 älteren Blättern schon kleine Tropfen auf ihrer Oberseite.

Nach 25 Minuten tragen verschiedene, aber gar nicht alle Blätter grosse Tropfen.

Nach $4^1/_2$ Stunde tragen alle Blätter grosse Tropfen auf den Blattzähnen und an der Blattspitze.

Versuch 35.

Evonymus fimbriatus. WALL. 21. Dec. '78.

Ein Zweig mit 11 Blättern wird aus dem Gewächshause geholt und um 3 U. Nachm. auf das mit destillirtem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Bei fünf Blättern wird die Spitzenhälfte mit einem scharfen Messer abgeschnitten. Quecksilberdruck: anfangs 23 Centim., am Ende 14 Centim. Temperatur: 8°, 3,5° C.

Resultat. Nach 10 Minuten tragen 4 der abgeschnittenen Blätter schon einen Tropfen an der Schnittfläche.

Nach 2 Tagen haben die abgeschnittenen Blätter sehr viel Wasser hervorquellen lassen. Die unversehrten Blätter

sind sehr stark injicirt, ihre Unterfläche ist dunkelgrün punktirt. Die Blätter ohne Spitze sind viel weniger stark injicirt, und nur an der Basis; gar nicht in der Nähe der Schnittfläche. Es sind im Ganzen etwa 3,5 CC. Wasser eingepresst worden.

Der Zweig wird in Wasser gestellt. Nach 4 Tagen (9°, 7° C.) ist die Injection der Blätter ohne Spitze ganz, die der unversehrten zum grossen Theil verschwunden.

Nach 6 Tagen (9,5° C.) ist kein einziges Blatt mehr injicirt.

Nach 11 Tagen (7,5° C.) ist der ganze Zweig noch vollkommen frisch und lebenskräftig.

Versuch 36.

Evonymus japonicus, fol. variegatis. 7. Nov. '78.

Ein Zweig mit 10 Blättern wird aus dem Gewächshause geholt und um 11 U. Vorm. auf das mit gewöhnlichem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Quecksilberdruck: anfangs 22 Centim., am Ende 20 Centim. Temperatur: 10°, 10°, 12,5° C.

Resultat. Nach 5 Stunden zeigt sich an den Blättern noch keine Veränderung.

Nach 2 Tagen sind alle Blätter vollkommen injicirt, ihre Unterseite ist gleichmässig dunkelgrün (resp. dunkelgelb) gefärbt. Es ist im Ganzen etwa 1 CC. Wasser eingepresst worden.

Der Zweig wird in Wasser gestellt. Nach 2 Tagen 12,5° C sind die Blätter nicht mehr injicirt, vollkommen frisch und lebenskräftig.

Versuch 37.

Fuchsia globosa. 28. Sept. '78.

Ein Zweig mit 8 Blättern wird aus dem Garten geholt und um 1 U. Nachm. auf das mit gewöhnlichem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Quecksilberdruck: anfangs 21 Centim. Temperatur: 15° C.

Resultat. Nach 20 Minuten tragen die Spitzen aller Blattzähne schöne Tropfen.

Nach 2 Tagen sind viele Blattzähne wieder trocken. Der Druck ist noch 13 Centim., es sind bis jetzt etwa 3 CC. Wasser eingepresst worden. Die Blätter werden alle abgetrocknet.

Nach 8 Tagen sind alle Blätter trocken; 3 Blätter und das obere Glied des Zweiges fallen bei Berührung ab. Druck noch 9 Centim. Est sind jetzt im Ganzen etwa 4,6 CC. Wasser eingepresst worden. Der Zweig wird aus dem Apparate genommen und ein 4 Centim. langes, basales Stück unter Wasser abgeschnitten. Dann wird er von Neuem auf das Rohr befestigt bei etwa 17 Centim. Druck. Eine halbe Stunde nachdem dies geschehen, tragen alle Blätter wieder auf die gewöhnliche Weise schöne Tropfen. Auch wo ein Blatt und der obere Stengeltheil sich abgelöst haben, tretet ein grosser Tropfen hervor.

Versuch 38.

Hedera Helix. 26. Nov. '78.

Ein Zweig mit 7 Blättern wird um 11 U. Vorm. auf das mit gewöhnlichem Wasser gefültte Rohr befestigt. Quecksilberdruck: 22 Centim., Senkung nicht notirt. Temperatur: 12,5°, 12° C.

Resultat. Nach einem Tage sind alle Blätter ganz und gar sehr stark injicirt; die untere Blattfläche ist dunkelgrün punktirt.

Der Zweig wird in Wasser gestellt. Nach 19 Stunden (13° C.) sind nur die 2 unteren Blätter noch injicirt, die übrigen ganz normal.

Nach 3 Tagen (10° C.) ist die Injection aller Blätter verschwunden.

Nach 10 Tagen (8°, 6°, 14° C.) ist der ganze Zweig noch frisch und lebenskräftig.

Versuch 39.

Helleborus niger. 17. Febr. '79.

Ein achttheiliges Blatt des vorigen Jahres wird um 11 U.

Vorm. auf das mit gewöhnlichem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Quecksilberdruck: anfangs 23 Centim., am Ende 19 Centim. Temperatur 7,5^0, 6,5^0 6,5^0 C.

Resultat. Nach 5 Stunden zeigen verschiedene Blatttheile schon ziemlich grosse injicirte Stellen.

Nach einem Tage hat das ganze Blatt überall viele und grosse, vollkommen injicirte Stellen. An verschiedenen dieser Stellen sind auf der Blattunterseite grosse Tropfen ausfiltrirt. Es ist im Ganzen etwa 1,6 CC. Wasser eingepresst worden.

Das Blatt wird in Wasser gestellt. Nach einem Tage (12^0 C.) ist die Injection vollkommen verschwunden.

Nach 4 Tagen ist das Blatt noch ganz frisch und lebenskräftig.

Versuch 40.

Helleborus niger. 26. Apr. '79.

Ein zehntheiliges junges Blatt, das sich seit Febr. '79 entwickelt hat, wird um 3 U. Nachm. auf das mit destillirtem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Quecksilberdruck: anfangs 10 Centim. Temperatur: 12^0, 12^0, 11,5^0 C.

Resultat. Nach 2 Tagen tragen einige Blatttheile Wassertropfen auf der Oberseite einiger Zähne. Keine Injection. Druck noch 8 Centim.; es ist etwa 0,8 CC. Wasser eingepresst worden. Der Druck wird jetzt auf 17 Centim. gebracht.

Nach 3 Tagen: keine Ausscheidung oder Injection. Druck noch 16,5 Centim.; im Ganzen ist 1 CC. Wasser eingepresst worden. Der Blattstiel wird jetzt abgeschnitten, um das Hervorquellen des Wassers aus der Schnittfläche zu beobachten (man vergleiche Seite 252).

Das nachher in Wasser gestellte Blatt ist nach 2 Tagen noch ganz frisch und lebenskräftig.

Versuch 41.

Hydrangea Hortensia. 7. Nov. '78.

Ein Zweig mit 5 grossen Blättern wird aus dem Garten geholt und um 11 U. Vorm. auf das mit gewöhnlichem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Quecksilberdruck: anfangs 18 Centim., Senkung nicht notirt. Temperatur: 10°, 10°, 12,5° C.

Resultat. Nach 25 Minuten tragen 3 Blätter auf der Oberseite sämmtlicher Blattzähne schöne Wassertropfen.

Nach 5 Stunden haben alle Blätter reichlich ausgeschieden. Nach 2 Tagen: ebenso.

Versuch 42.

Hordeum vulgare. 21. Juli '79.

Der obere Theil eines Stengels mit zwei erwachsenen Blättern und einem jungen Blatte, das eben mit der Spitze hervortritt, wird dicht unter einem Knoten abgeschnitten und am 11 U. Vorm. auf das mit destillirtem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Druck: anfangs 20,5 Centim., Senkung nicht notirt. Temperatur: 17° C.

Resultat. Nach 10 Minuten haben die 3 Blätter am Rande und an der Spitze der oberen Blattfläche schon zahlreiche Tropfen ausgeschieden.

Der Zweig wird in Wasser unter eine Glasglocke gestellt und ist nach einem Tage (17,8° C.) noch ganz frisch und lebenskräftig.

Versuch 43.

Ilex aquifolium. 19. Nov. '78.

Ein Zweig mit 12 Blättern wird um 4 U. Nachm. auf das mit gewöhnlichem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Quecksilber-

druck: anfangs 22 Centim., am Ende 21 Centim. Temperatur: 9°, 10° C.

Resultat. Nach einem Tage: keine Ausscheidung oder Injection.

Nach 2 Tagen sind alle Blätter injicirt, die ganze untere Blattfläche stark dunkelgrün-punktirt. Es ist etwa 1/2 CC. Wasser eingepresst worden.

Der Zweig wird in Wasser gestellt. Nach 2 Tagen (9° C.) sind die Blätter dieses Jahres nicht mehr injicirt, die vorjährigen stellenweise noch ein wenig.

Nach 4 Tagen (10° C.) ist die Injection überall verschwunden, der ganze Zweig frisch und lebenskräftig.

Versuch 44.

Impatiens Balsamina. 14. Oct. '78.

Ein Zweig mit 10 Blättern wird aus dem Garten geholt und um 4 U. Nachm. auf das mit gewöhnlichem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Quecksilberdruck: anfangs 15 Centim., am Ende etwa 11 Centim. Temperatur: 12°, 12,5° C.

Resultat. Nach einer halben Stunde tragen alle Blattzähne sämmtlicher Blätter einen Wassertropfen.

Nach einem Tage: sehr reichliche Ausscheidung. Es sind im Ganzen etwa 2 CC. Wasser eingepresst worden.

Der Zweig wird in Wasser unter eine Glasglocke gestellt und ist nach 3 Tagen (12,5° C.) noch ganz frisch und lebenskräftig.

Versuch 45.

Impatiens Balsamina. 17. Oct. '78.

Ein Zweig mit vielen Blättern wird aus dem Garten geholt und um 11 U. Vorm. auf das mit gewöhnlichem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Quecksilberdruck: anfangs 15 Centim., am Ende 5 Centim. Temperatur: 12,5°, 12,5° C.

Resultat. Nach $^1/_4$ Stunde tragen alle Blattzähne schon grosse Tropfen.

Nach einem Tage: noch sehr reichliche Ausscheidung. Es sind im Ganzen etwa 4 CC. Wasser eingepresst worden.

Versuch 46.

Juglans regia. 23. Juli '79.

Ein grosses, im Ganzen etwa 50 Centim. langes Blatt mit 9 Fiederblättchen wird um 3 U. Nachm. auf das mit gewöhnlichem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Quecksilberdruck: anfangs 21,5 Centim., am Ende 17,5 Centim. Temperatur: 18,5⁰, 18,2⁰, 17,5⁰, 18,5⁰ C.

Resultat. Nach 20 Stunden sind alle Blättchen injicirt; die Unterfläche ist sehr stark dunkelgrün punktirt. Auch finden sich, über die ganze untere Blattfläche zerstreut, ausfiltrirte Wassertropfen vor. Es ist 1,5 CC. Wasser eingepresst worden.

Das Blatt wird in Wasser gestellt. Nach 2 Tagen (19⁰ C.) sind die Blättchen nicht mehr injicirt; alles frisch und lebenskräftig.

Versuch 47.

Lavatera arborescens. 4. Nov. '78.

Ein Blatt wird aus dem Garten geholt und um 4 U. Nachm. auf das mit gewöhnlichem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Quecksilberdruck: anfangs 21 Centim. Temperatur: 9,5⁰, 14⁰, 9,5⁰, 9,5⁰, 8⁰ C.

Resultat. Nach einem Tage noch keine Ausscheidung oder Injection.

Nach 2 Tagen trägt das Blatt ziemlich viele Wassertropfen über die ganze untere Fläche zerstreut. Druck noch 19 Centim.; est ist etwa 0,8 CC. Wasser einge-

presst worden. Das Blatt wird abgetrocknet und der Druck auf 26 Centim. gebracht.

Nach 3 Tagen sind wieder ziemlich viele Tropfen ausgeschieden worden, zumal an den Ohren des Blattes. Dazu ist das Blatt stellenweise injicirt, die Unterseite zeigt zerstreute, kleine, dunkelgrüne Stellen, zumal an den Ohren.

Das Blatt wird im Wasser gestellt. Nach 6 Stunden ist est nicht mehr injicirt; nach 2 Tagen ist es noch ganz frisch und lebenskräftig.

Versuch 48.

Lemone dulce. 17. Febr. '78.

Ein Zweig mit 5 grossen Blättern wird aus dem Gewächshause geholt und um 11 U. Vorm. auf das mit destillirtem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Quecksilberdruck: anfangs 21 Centim., am Ende 19 Centim. Temperatur: 7,5^0, 6,5^0, 6,5^0 C.

Resultat. Nach 5 Stunden noch keine Ausscheidung oder Injection.

Nach einem Tage sind alle Blätter injicirt; die Unterseite ist fast gleichmässig dunkelgrün gefärbt. Es ist etwa 1 CC. Wasser eingepresst worden.

Der Zweig wird in Wasser gestellt. Nach 29 Stunden (12^0 C.) sind alle Blätter noch injicirt.

Nach 4 Tagen (5,5^0 C.) ist bei den 4 oberen Blättern die Injection aus der Blattspitze ganz, sonst zum grossen Theil verschwunden. Das untere Blatt ist noch injicirt.

Nach 6 Tagen sind die 4 oberen Blätter gar nicht, das untere fast nicht mehr injicirt.

Nach 7 Tagen (4,5^0 C.) ist kein Blatt mehr injicirt.

Nach 9 Tagen (5^0 C) ist der ganze Zweig noch frisch und lebenskräftig.

Versuch 49.

Pelargonium inquinans. 5. Dec. '78.

Ein Zweig mit 3 gut entwickelten Blättern wird aus dem Gewächshause geholt und um 12 U. Mittags auf das mit gewöhnlichem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Quecksilberdruck: anfangs 21 Centim., Senkung nicht notirt. Temperatur: 8,5°, 8,5° C.

Resultat. Schon nach 4 Minuten tragen die Blätter an jedem Blattzähne einen kleinen Tropfen.

Nach $1^1/_2$ Stunde tragen die Zähne grosse Tropfen auf ihrer Oberseite; die Ausscheidung ist sehr reichlich.

Der Zweig wird in Wasser gestellt und ist nach 9 Tagen (14°, 9° C.) noch ganz frisch und lebenskräftig.

Versuch 50.

Peristrophe speciosa. NEES. 14. Oct. '78.

Ein Zweig mit 6 Blättern wird aus dem Garten geholt und um 11 U. Vorm. auf das mit gewöhnlichem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Quecksilberdruck: anfangs 20 Centim., Senkung nicht notirt. Temperatur: 11,5° C.

Resultat. Nach 4 Stunden haben alle Blätter an nicht näher bestimmten Stellen des glatten Randes zahlreiche Tropfen ausgeschieden. Einzelne Stellen des Blattrandes sind injicirt

Versuch 51.

Peristrophe speciosa. 5. Mai '79.

Ein Zweig mit 11 Blättern wird aus dem Gewächshause geholt und um 11 U. Vorm. auf das mit destillirtem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Quecksilberdruck: anfangs 20 Centim., am Ende 18 Centim. Temperatur: 12,5°, 14,5°, 13° C.

Resultat. Nach $4^1/_2$ Stunde noch keine Ausscheidung oder Injection.

Nach einem Tage haben verschiedene Blätter an dem Rande der unteren Fläche an nicht näher bestimmten Stellen Tropfen ausgeschieden. Nur sehr einzelne Tropfen am Rande der oberen Blattfläche. Es ist etwa 1 CC. Wasser eingepresst worden.

Der Zweig wird abgeschnitten und das Hervorquellen des Wassers aus der Schnittfläche beobachtet (man vergleiche S. 253).

Versuch 52.

Phaseolus multiflorus. 31. Juli '79.

Eine im Topfe gewachsene Keimpflanze mit zwei, 8 Centim. langen Primordialblättern wird abgeschnitten und um 3 U. Nachm. auf das mit destillirtem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Quecksilberdruck: anfangs 20 Centim., am Ende 15,7 Centim. Temperatur: 23°, 21° C.

Resultat. Nach 19 Stunden trägt die untere, wie die obere Blattfläche beider Primordialblätter eine sehr grosse Zahl kleiner Wassertropfen, über die ganze Fläche zerstreut, aber zumal in der Nähe der Nerven. Die Tropfen der Unterseite sind bedeutend grösser als die der Oberseite. Keine Injection. Es sind etwa 4 CC. Wasser eingepresst worden.

Die Pflanze wird in Wasser unter eine Glocke gestellt und ist nach einem Tage (22° C.) noch ganz frisch und lebenskräftig.

Versuch 53.

Phaseolus multiflorus. 31. Juli '79.

Eine im Topfe gezogene Keimpflanze mit zwei, 7 Centim. langen Primordialblättern wird abgeschnitten und um 3 U. Nachm. auf das mit Wasser gefüllte Rohr befestigt. Quecksilberdruck: anfangs 15 Centim., am Ende 13 Centim. Temperatur: 23°, 21° C.

Resultat. Nach 19 Stunden trägt die untere Fläche der Blätter sehr viele Wassertropfen und zwar immer an solchen Stellen, wo grössere oder kleinere Nerven sich verzweigen. Die Oberseite der Blätter ist trocken. Keine Injection. Es ist etwa 1 CC. Wasser eingepresst worden.

Die Keimpflanze wird in Wasser unter eine Glasglocke gestellt und ist nach einem Tage (22° C.) noch ganz frisch und lebenskräftig.

Versuch 54.

Philadelphus coronarius. 4. Nov. '78.

Ein Zweig mit 6 grossen, aber alten Blättern wird aus dem Garten geholt und um 11 U. Vorm. auf das mit gewöhnlichem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Quecksilberdruck: anfangs 19 Centim., Senkung nicht notirt. Temperatur: 10,5°, 14° C.

Resultat. Nach 5 Stunden noch keine Ausscheidung oder Injection.

Nach einem Tage sind die 2 unteren Blätter am Rande injicirt; dieselben Blätter tragen auf der Unter- oder auf der Oberseite einiger Blattzähne einen Tropfen. Die übrigen Blätter zeigen keine Veränderung.

Der Zweig wird in Wasser gestellt. Nach einem Tage ist die Injection verschwunden, die Blätter sind wieder normal.

Versuch 55.

Philadelphus coronarius. 26. Juni '79.

Ein Zweig mit 10 schönen Blättern wird um 11 U. Vorm. auf das mit gewöhnlichem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Quecksilberdruck: anfangs 26 Centim., am Ende 7 Centim. Temperatur: 18,5°, 19°, 19,5°, 20° C.

Resultat. Nach 3 Stunden hat ein einziges Blatt, und zwar des unteren Blattpaares, auf der Oberseite dreier Zähne

einen kleinen Tropfen ausgeschieden. Es ist 0,75 CC. Wasser eingepresst worden.

Nach einem Tage tragen alle Zähne sämmtlicher Blätter auf der Oberseite einen grossen Tropfen. Keine Injection. Es sind im Ganzen etwa 2,7 CC. Wasser eingepresst worden.

Nach 6 Tagen sind die 6 unteren Blätter abgeworfen, aber noch frisch. Auch die Tropfen der 4 übrigen sind verschwunden. Es sind im Ganzen etwa 7 CC. Wasser eingepresst worden.

Versuch 56.

Phygelius capensis. 23. Nov. '78.

Ein Zweig mit 9 gut entwickelten Blättern wird aus dem Garten geholt und um 12 U. Mittags auf das mit gewöhnlichem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Quecksilberdruck: anfangs 22 Centim, Senkung nicht notirt. Temperatur: 8,5^0 C.

Resultat. Nach 13 Minuten tragen die 6 oberen Blätter schon kleine Wassertropfen auf der Oberseite der meisten Blattzähne.

Nach 47 Minuten sind die 3 ältesten Blätter noch trocken, sonst sehr ausgiebige Ausscheidung.

Der Zweig wird in Wasser gestellt und ist nach 7 Tagen (10^0, 10^0 C.) noch ganz frisch und lebenskräftig.

Versuch 57.

Phytolacca decandra. 12. Oct. '78.

Ein Zweig mit etwa 10 Blättern wird um 2 U. Nachm. auf das mit gewöhnlichem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Quecksilberdruck: anfangs 14,5 Centim., am Ende: 12,5 Centim. Temperatur: 14,5^0, 11,5^0 C.

Resultat. Nach 1$^1/_2$ Stunde hat die Ausscheidung schon angefangen.

Nach 2 Tagen haben alle Blätter an dem Rande der unteren Blattfläche, an nicht näher bestimmten Stellen reichlich Wasser ausgeschieden. Es ist etwa 1 CC. Wasser eingepresst worden.

Versuch 58.

Phytolacca decandra. 17. Juli '79.

Ein Zweig mit 5 erwachsenen und einigen sehr jungen Blättern wird um 2 U. Nachm. auf das mit destillirtem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Quecksilberdruck: anfangs 21 Centim. Senkung nicht notirt. Temperatur: 19,7°, 20° C.

Resultat. Nach 20 Minuten tragen alle Blätter sehr zahlreiche kleine Tropfen am Rande der unteren Blattfläche, an nicht näher bestimmten Stellen.
Nach 2 Stunden: Ausscheidung sehr reichlich.

Versuch 59.

Pinus Abies L. 18. Januar '79.

Ein Zweig mit 5 kleinen Seitenzweigen und sehr vielen Blättern wird um 3 U. Nachm. auf das mit destillirtem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Bei etwa 20 Blättern wird die Spitzenhälfte abgeschnitten. Quecksilberdruck: anfangs 20 Centim., am Ende 19,5 Centim. Temperatur: 5,5°, 2,5° C

Resultat. Nach 2 Tagen sind alle Blätter, auch die zur Hälfte abgeschnittenen, stellenweise injicirt, wie man an den dunkelgrün gefärbten Stellen und zumal auch bei durchfallenden Lichte sehr deutlich sehen kann. Die Blätter des vorigen Jahres, unten am Zweige, sind am stärksten injicirt. Jedes abgeschnittene Blatt trägt an der Schnittfläche einen Tropfen. Es ist etwa 0,2 CC. Wasser eingepresst worden.

Der Zweig wird in Wasser gestellt. Nach 8 Tagen (4°,

6,5⁰, 4⁰ C.) ist die Injection noch nicht verschwunden; der Zweig wird jetzt ins geheizte Zimmer gebracht.

Nach 10 Tagen (11⁰ C.) ist die Injection aller Blätter ganz verschwunden.

Nach 20 Tagen (16⁰ C.) ist der Zweig noch ganz frisch und lebenskräftig, nur die zur Hälfte abgeschittenen Blätter sind vertrocknet.

Versuch 60.

Platanus occidentalis. L. 8. Juli '79.

Ein Zweig mit 5 Blättern und einer sich noch entwickelnden Endknospe wird um 1 U. Nachm. auf das mit destillirtem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Von den 5 Blättern sind die 2 unteren ganz erwachsen, die 2 darauffolgenden haben zwar ihre definitive Grösse erreicht, sind aber noch jung und zart; das obere Blatt ist noch sehr jung und hat erst die Hälfte der definitiven Grösse erreicht. Quecksilberdruck: anfangs 24,5 Centim., am Ende 11,5 Centim. Temperatur: 17,5⁰, 17,8⁰, 17,2⁰, 16,3⁰ C.

Resultat. Nach $^1/_2$ Stunde tragen das dritte und vierte Blatt (von unten an gezählt) auf der Oberseite oder gelegentlich auf der Unterseite sehr vieler Blattzähne schöne Wassertropfen.

Nach $1^1/_2$ Stunde ist die Ausscheidung dieser zwei Blätter schon viel reichlicher. Auch das obere Blatt trägt jetzt fast an jeder Zahnspitze einen Tropfen. Die 2 unteren Blätter sind trocken. Zugleich sind die 4 unteren Blätter injicirt, bei 3 ist die ganze untere Fläche dunkelgrün punktirt. Das obere Blatt ist nicht injicirt.

Nach 4 Stunden: die 2 unteren Blätter injicirt wie oben, ohne Ausscheidung; die 2 nachfolgenden Blätter sehr stark injicirt, die untere Fläche gleichmässig dunkelgrün gefärbt, dazu reichliche Ausscheidung an den Blattzähnen. Das obere Blatt scheidet viel Wasser aus, ist aber gar nicht injicirt. Es ist bis jetzt etwa 1,3 CC. Wasser eingepresst worden.

Nach 2 Tagen sind die 4 unteren Blätter sehr stark injicirt, das untere stellenweise; bij den 3 nachfolgenden aber ist die ganze untere Blattfläche gleichmässig dunkelgrün gefärbt. Das obere Blatt ist nicht injicirt, trägt aber viele grosse Tropfen an den Zahnspitzen. Es sind im Ganzen etwa 5,6 CC. Wasser eingepresst worden.

Der Zweig wird in Wasser gestellt. Nach 20 Stunden (15,8° C.). sind die zwei mittleren Blätter noch stellenweise injicirt.

Nach 2 Tagen (16° C.) ist die Injection aller Blätter verschwunden; der Zweig ist noch ganz frisch und lebenskräftig.

Versuch 61.

Potentilla atrosanguinea. 2. Nov. '78.

Ein grosses, aber ziemlich altes, dreizähliges Blatt wird aus dem Garten geholt und um 2 U. Nachm. auf das mit gewöhnlichem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Quecksilberdruck anfangs 29 Centim., Senkung nicht notirt. Temperatur: 12,5° C.

Resultat. Nach $^{3}/_{4}$ Stunde tragen sehr viele Blattzähne auf ihrer Oberseite einen Wassertropfen.

Das Blatt wird in Wasser unter eine Glasglocke gestellt und ist nach 3 Tagen (14° C.) noch ganz frisch und lebenskräftig.

Versuch 62.

Primula sinensis. 1. Mai '79.

Ein Blatt wird aus dem Gewächshause geholt und um 1 U. Nachm. auf das mit destillirtem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Quecksilberdruck: anfangs 25 Centim., am Ende 15 Centim. Temperatur. 10°, 15,5°, 12,5° C.

Resultat. Nach $3^{1}/_{2}$ Stunde haben fast alle Blattzähne, auch die kleinsten, einen Wassertropfen

ausgeschieden, die meisten auf der Oberseite, ziemlich viele andere auf der Unterseite. Zwei längliche Stellen an der Blattbasis sind injicirt.

Nach zwei Tagen: alles noch ebenso. Es sind im Ganzen etwa 4 CC. Wasser eingepresst worden.

Das Blatt wird in Wasser gestellt und ist nach 2 Tagen (12,5° C.) noch ganz frisch; es ist nur noch eine injicirte Stelle vorhanden.

Versuch 63.

Prunus Laurocerasus. 2. Dec. '78.

Ein Zweig mit 4 Blättern wird aus dem Garten geholt und um 12 U. Mittags auf das mit gewöhnlichem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Quecksilberdruck: anfangs 22 Centim., am Ende 20 Centim. Temperatur: 6,5°, 8° C.

Resultat. Nach 3 Tagen sind die Blätter sehr stark injicirt; die untere Blattfläche ist in der Nähe des Mittelnerven gleichmässig dunkelgrün gefärbt, sonst sehr stark dunkelgrün punktirt. Es ist etwa 0,8 CC. Wasser eingepresst worden.

Der Zweig wird in Wasser gestellt. Nach 4 Tagen (14°, 8,5° C.) ist die Injection noch nicht ganz verschwunden.

Nach 7 Tagen (5° C.) sind die Blätter nicht mehr injicirt. Nach 16 Tagen (9° C.) ist der Zweig noch ganz frisch und lebenskräftig.

Versuch 64.

Prunus lusitanica. 17. Dec. '78.

Ein Zweig mit 8 Blättern wird aus dem Garten geholt und um 11 U. Vorm. auf das mit gewöhnlichem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Quecksilberdruck: anfangs 21 Centim., am Ende 15 Centim. Temperatur: 5°, 5,5° C.

Resultat. Nach 2 Tagen sind alle Blätter vollkommen injicirt, die untere Fläche gleichmässig dunkelgrün gefärbt und dazu mit zerstreuten, ausfiltrirten Wassertropfen besetzt. Es sind etwa 2,4 CC. Wasser eingepresst worden.

Der Zweig wird in Wasser gestellt. Nach 2 Tagen (6°, 9,5° C.) zeigen sich schon bei 4 Blättern nicht mehr injicirte Stellen.

Nach 8 Tagen (3,5°, 9°, 7,2° C.) ist die Injection bei 5 Blättern zum Theil verschwunden.

Nach 10 Tagen (9,5° C.) sind 4 Blätter so gut wie nicht mehr injicirt, die übrigen noch ziemlich stark. Der Zweig wird jetzt trocken auf den Tisch gelegt und 4 Stunden nachher (15,5° C.) ist die Injection sämmtlicher Blätter vollkommen verschwunden. Dann wird der Zweig wieder in Wasser gestellt.

Nach 15 Tagen (16,5° C.) ist der Zweig noch ganz frisch und lebenskräftig.

Versuch 65.

Rhododendron ponticum. 19. Dec. '78.

Ein Zweig mit 7 Blättern wird um 12 U. Mittags auf das mit gewöhnlichem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Quecksilberdruck: anfangs 22,5 Centim., am Ende 16,5 Centim. Temperatur: 5,5°, 6° C.

Resultat. Nach einem Tage sind alle Blätter vollkommen injicirt; die untere Blattfläche ist gleichmässig dunkelgrün gefärbt und trägt zugleich überall sehr zahlreiche, ausfiltrirte Wassertropfen. Es sind etwa 2,4 CC. Wasser eingepresst worden.

Der Zweig wird in Wasser gestellt. Nach 15 Tagen (9,5°, 3,5°, 9°, 7,2°, 9,5°, 8° C.) sind die Blätter nicht mehr injicirt.

Nach 24 Tagen (11,6°, 13°, 15,5° C.) ist der Zweig noch ganz frisch und lebenskräftig.

Versuch 66.

Rhododendron ponticum. 2. Juli '79

Ein Zweig mit 11 Blättern, die zwar ihre definitive Grösse erreicht haben, aber noch jung und zart sind, wird um 2 U. Nachm. auf das mit destillirtem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Quecksilberdruck: anfangs 21 Centim., am Ende 16,7 Centim. Temperatur: 19,5^0, 19,5^0, 18,5^0 C.

Resultat. Nach 20 Stunden sind alle Blätter vollkommen injicirt, die Unterseite gleichmässig dunkelgrün gefärbt. Drei Blätter tragen einen grossen Tropfen an der Spitze. Es ist etwa 1,3 CC. Wasser eingepresst worden.

Nach 26 Stunden noch ebenso. Es sind im Ganzen etwa 2 CC. Wasser eingepresst worden.

Der Zweig wird in Wasser gestellt. Nach 2 Tagen (16,5^0 C). ist die Injection einiger Blätter schon verschwunden.

Nach 4 Tagen (16^0 C.) ist kein Blatt mehr injicirt; der Zweig ist ganz frisch und lebenskräftig.

Versuch 67.

Sambucus nigra. 2. Nov. '78.

Ein Zweig mit 4 Blättern wird aus dem Garten geholt und um 3 U. Nachm. auf das mit gewöhnlichem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Quecksilberdruck: anfangs 19 Centim., am Ende 15 Centim. Temperatur: 12,5^0, 13,5^0 C.

Resultat. Nach 2 Tagen tragen die Spitzen und auch einzelne Zähne der Blättchen einen Wassertropfen. Die Blättchen des unteren Blattpaares sind vollkommen injicirt, die des oberen nicht so stark. Es sind etwa 2 CC. Wasser eingepresst worden.

Der Zweig wird in Wasser gestellt. Nach $4^1/_2$ Stunde (13,5⁰ C.) ist die Injection vollkommen verschwunden. Es wird jetzt eine Glasglocke übergestülpt.

Nach einem Tage ist der Zweig noch ganz frisch und lebenskräftig.

Versuch 68.

Sambucus nigra. 2. Juni '79.

Ein junger, noch nicht verholzter Zweig mit 4 Blättern wird um 12 U. Mittags in einen Apparat mit absolut constantem Quecksilberdrucke befestigt. Es wird gewöhnliches Wasser eingepresst. Druck: 23 Centim. Temperatur: $16,5^0$, $16,7^0$, $16,5^0$ C.

Resultat. Nach 7 Stunden tragen die Blättchen auf der Oberseite aller Blattzähne einen Tropfen. Keine Injection. Es ist 0,65 CC. Wasser eingepresst worden. Der Druck wird jetzt auf 34 Centim. constant gebracht.

Nach einem Tage ist die Ausscheidung sehr reichlich; keine Injection. Es ist im Ganzen 1,45 CC. Wasser eingepresst worden. Der Zweig wird abgeschnitten, um das Hervorquellen des Wassers aus der Schnittfläche zu beobachten (man vergleiche S. 253).

Der Zweig wird in Wasser gestellt und ist nach 2 Tagen ($16,8^0$ C.) noch ganz frisch und lebenskräftig.

Versuch 69.

Saxifràga rotundifolia. 23. Nov. '78.

Eine Blattrosette, aus zahlreichen Blättern zusammengesetzt, wird aus dem Garten geholt und um 2 U. Nachm. auf das mit gewöhnlichem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Quecksilberdruck: anfangs 21 Centim., am Ende 20 Centim. Temperatur: $10,5^0$, 10^0, $10,5^0$ C.

Resultat. Nach $^3/_4$ Stunde noch keine Ausscheidung.
Nach 2 Tagen haben die meisten Blätter auf der Oberseite vieler Blattzähne schöne Wassertropfen ausgeschieden; die jüngeren Blätter am stärksten. Es ist etwa 0,5 CC. Wasser eingepresst worden. Die Blätter werden abgetrocknet und sind 5 Stunden nachher noch trocken.

Die Blattrosette wird in Wasser gestellt und ist nach 5 Tagen (12,5°, 10° C.) noch vollkommen frisch und lebenskräftig.

Versuch 70.

Sciadocalyx digitaliflora. 9. Dec. '78.

Ein Blatt wird aus dem Gewächshause geholt und um 11 U. Vorm. auf das mit gewöhnlichem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Quecksilberdruck: anfangs 19 Centim., Senkung nicht notirt. Temperatur: 7,5°, 5,5° C.

Resultat. Schon nach 5 Minuten zeigen sich kleine Tropfen an vielen Zahnspitzen.
Nach einem Tage tragen die Blattzähne auf ihrer Oberseite grosse Tropfen.

Versuch 71.

Sempervivum ciliatum 9. Dec. '78.

Ein Zweig mit 2 Blattrosetten, einer grösseren und einer kleineren, wird aus dem Gewächshause geholt und um 12 U. Mittags auf das mit gewöhnlichem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Quecksilberdruck: anfangs 21 Centim., Senkung nicht notirt. Temperatur: 8,5°, 11°, 5,5° C.

Resultat. Nach $3^1/_2$ Stunde haben 2 junge Blätter an der Spitze der unteren Blattfläche einen kleinen Tropfen ausgeschieden. Die kleine Blattrosette wird zufällig abgebrochen; aus der Bruchfläche tretet in einigen Minuten ein grosser Tropfen hervor.

Nach einem Tage haben 8 junge Blätter einen grossen Tropfen an der Spitze der unteren Blattfläche ausgeschieden. Die älteren Blätter sind alle trocken.

Der Zweig wird in Wasser gestellt und ist nach 4 Tagen (5°, 9° C.) noch frisch und lebenskräftig.

Versuch 72.

Sempervivum tortuosum. 18. Januar '79.

Ein Zweig mit 6 Blattrosetten wird aus dem Gewächshause geholt und um 3 U. Nachm. auf das mit destillirtem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Quecksilberdruck: anfangs 22,5 Centim., am Ende 21,5 Centim. Temperatur: 5,5°, 2,5° C.

Resultat. Nach 3/4 Stunde noch keine Ausscheidung.
Nach 2 Tagen haben die meisten Blätter (mehr als 40) einen Tropfen an der Spitze ausgeschieden, die meisten an der oberen Fläche, verschiedene aber an der unteren Fläche des Blattes. Es ist etwa 0,4 CC. Wasser eingepresst worden.

Der Zweig wird in Wasser gestellt und ist nach einem Tage (5° C.) noch ganz frisch und lebenskräftig.

Versuch 73.

Senecio vulgaris. L. 30. Nov. '78.

Eine Pflanze mit 12 grossen Blättern wird aus dem Garten geholt und um 12 U. Mittags auf das mit gewöhnlichem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Das Wasser wird nicht in den hohlen Stengel, sondern in die Wurzel gepresst, da diese zum grossen Theil mit der Pflanze in Verbindung bleibt, und nur die Wurzelspitze abgeschnitten ist. Quecksilberdruck: anfangs 22,5 Centim., am Ende 18,5 Centim. Temperatur: 10°, 7,5° C.

Resultat. Nach 1/2 Stunde: noch keine Ausscheidung.

Nach einem Tage tragen alle Blätter am Rande der oberen, wie der unteren Blattfläche sehr viele, zerstreute und grosse Wassertropfen, sowohl an den Zahnspitzen, wie auch an den Einschnitten. Es ist etwa 1,6 CC. Wasser eingepresst worden.

Die Pflanze wird in Wasser gestellt und eine Glasglocke übergestülpt. Nach 6 Tagen (6^0, 14^0 C.) ist sie noch ganz frisch und lebenskräftig.

Versuch 74.

Syringa vulgaris. 14. Oct. '78.

Ein Zweig mit 6 grossen Blättern wird aus dem Garten geholt und um 4 U. Nachm. auf das mit gewöhnlichem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Quecksilberdruck: anfangs 18 Centim., Senkung nicht notirt. Temperatur: 12^0, $12{,}5^0$. C.

Resultat. Nach 19 Stunden sind alle Blätter vollkommen injicirt, die untere Blattfläche ist gleichmässig dunkelgrün gefärbt.

Der Zweig wird in Wasser gestellt. Nach 2 Tagen (12^0 C.) ist die Injection aller Blätter vollkommen verschwunden.

Versuch 75.

Syringa vulgaris. 1. Juni '79.

Ein noch nicht verholzter Zweig mit 6 zwar grossen, aber noch jungen und zarten Blättern, wird um 8 U. Nachm. in einen Apparat mit absolut constantem Quecksilberdrucke befestigt. Es wird gewöhnliches Wasser eingepresst. Druck 25 Centim. Temperatur: 15^0, 16^0 C.

Resultat. Nach 15 Stunden sind alle Blätter sehr stark injicirt; die untere Blattfläche ist fast gleichmässig dunkelgrün gefärbt, und überall mit kleinen, zerstreuten, ausfiltrirten Wasser-

tropfen besetzt. Es ist 1,3 CC. Wasser eingepresst worden.

Der Zweig wird in Wasser gestellt. Nach 9 Stunden (16,7° C.) sind nur die 2 unteren Blätter an der Basis noch ein wenig injicirt.

Nach einem Tage (16,5° C.) ist die Injection ganz verschwunden, der Zweig ist ganz frisch und lebenskräftig

Versuch 76.

Taxus baccata. 19. Nov. '78.

Ein Zweig mit 9 Seitenzweigen und zahlreichen Blättern wird um 4 U. Nachm. auf das mit gewöhnlichem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Quecksilberdruck: anfangs 20 Centim., am Ende 12 Centim. Temperatur: 9°, 10,5°, 10°, 9° C.

Resultat. Nach einem Tage: keine Ausscheidung oder Injection.

Nach 2 Tagen sind alle Blätter zum grossen Theil injicirt, die untere Fläche zeigt grosse, dunkelgrün gefärbte Stellen. Es sind etwa 2,2 CC. Wasser eingepresst worden.

Nach 4 Tagen sind die vorjährigen Blätter vollkommen injicirt, die untere Blattfläche gleichmässig dunkelgrün gefärbt. Die diesjährigen zeigen einige kleine, noch nicht injicirte Stellen. Es sind im Ganzen etwa 4,4 CC. Wasser eingepresst worden.

Der Zweig wird in Wasser gestellt. Nach 2 Tagen (10° C.) sind die vorjährigen Blätter noch stellenweise injicirt, die diesjährigen fast ohne Injection.

Nach 5 Tagen (12,5°, 13° C.) sind fast alle Blätter wieder normal, nur die unteren, älteren noch ein wenig injicirt.

Nach 8 Tagen (10°, 8,5° C.) ist die Injection aller Blätter vollkommen verschwunden.

Nach 14 Tagen (14° C.) ist der Zweig noch ganz frisch und lebenskräftig.

Versuch 77.

Taxus baccata. 20. Dec. '78.

Ein Zweig mit Seitenzweigen und vielen Blättern wird um 12 U. Mittags auf das mit destillirtem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Bei vielen diesjährigen Blättern wird die Spitzenhälfte abgeschnitten. Quecksilberdruck: anfangs 20 Centim., am Ende 12 Centim. Temperatur: 7,5°, 9,5°, 3,5° C.

Resultat. Nach einem Tage sind die vorjährigen Blätter vollkommen injicirt; ihre Unterseite gleichmässig dunkelgrün gefärbt. Die diesjährigen Blätter sind stellenweise injicirt. Die zur Hälfte abgeschnittenen Blätter tragen einen grossen Wassertropfen an der Schnittfläche; sie sind aber gar nicht injicirt. Es sind etwa 3,3 CC. Wasser eingepresst worden. Die zur Hälfte abgeschnittenen Blätter werden mit Löschpapier abgetrocknet, haben aber eine Stunde später schon wieder einen grossen Tropfen ausgeschieden.

Nach 3 Tagen zeigen die diesjährigen Blätter sehr grosse injicirte Stellen. Reichliche Ausscheidung, ohne Injection, der abgeschnittenen Blätter. Es sind im Ganzen etwa 4,4 CC. Wasser eingepresst worden.

Der Zweig wird in Wasser gestellt. Nach 2 Tagen (9° C.) ist die Injection der diesjährigen Blätter schon viel weniger stark.

Nach 4 Tagen (7,2° C.) ist die Injection der diesjährigen Blätter ganz verschwunden, die vorjährigen sind noch zum Theil injicirt.

Nach 6 Tagen (9,5° C.) sind die vorjährigen Blätter noch zum Theil injicirt.

Nach 11 Tagen (8° C.) ist die Injection aller Blätter vollkommen verschwunden; der Zweig ist noch ganz frisch und lebenskräftig.

Versuch 78.

Taxus baccata. 5. Juli '79.

Ein Zweig mit 15 in diesem Jahre entwickelten Seitenzweigen wird um 12 U. Mittags auf das mit destillirtem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Die Blätter haben ihre definitive Grösse erreicht, sind aber noch jung und zart. Quecksilberdruck: anfangs 21 Centim., am Ende 11 Centim. Temperatur: 17°, 16,3° C.

Resultat. Nach 2 Tagen sind die vorjährigen Blätter vollkommen injicirt, ihre Unterfläche ist gleichmässig dunkelgrün gefärbt. Die jungen, diesjährigen Blätter sind sehr stark stellenweise injicirt. Es sind etwa 4 CC. Wasser eingepresst worden.

Der Zweig wird in Wasser gestellt. Nach 3 Tagen (17,5°, 16,5° C.) ist die Injection aller Blätter verschwunden; der ganze Zweig ist frisch und lebenskräftig.

Versuch 79.

Tropaeolum majus. 6. Oct. '78.

Ein Zweig mit 5 Blättern wird um 12 U. Mittags auf das mit gewöhnlichem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Quecksilberdruck: anfangs 14 Centim. Temperatur: 15°, 15°, 14° C.

Resultat. Nach einem Tage tragen die Blätter Wassertropfen am Rande und zwar wo die Hauptnerven endigen Es sind etwa 3 CC. Wasser eingepresst worden; der Druck ist noch 6,4 Centim. Die Blätter werden abgetrocknet.

Nach 6 Tagen ist der Zweig ganz frisch, aber die Blätter sind vollkommen trocken. Es sind im Ganzen etwa 5 CC. Wasser eingepresst worden; Druck noch 1,4 Centim. Der

Druck wird jetzt wieder auf 15 Centim. gebracht. Zwei und eine halbe Stunde später sind die Blätter noch ganz trocken.

Versuch 80.

Ulmus campestris. 7. Juli '79.

Ein Zweig mit 16 ohne Ausnahme erwachsenen Blättern, deren Stipulae schon alle abgefallen sind, wird um 12 U. Mittags auf das mit destillirtem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Quecksilberdruck: anfangs 23,5 Centim., am Ende 19,7 Centim. Temperatur: 17°, 17,3° C.

Resultat. Nach einer Stunde: keine Ausscheidung; alle Blätter haben schon kleine injicirte Stellen, zumal in der Nähe des Mittelnerven.

Nach 7 Stunden sind alle Blätter vollkommen injicirt; die untere Fläche ist gleichmässig dunkelgrün gefärbt, und trägt einige zerstreute ausfiltrirte Wassertropfen. Keine Ausscheidung am Blattrande. Es sind im Ganzen etwa 2,1 CC. Wasser eingepresst worden.

Der Zweig wird in Wasser gestellt. Nach 3 Tagen (17,7° C.) ist die Injection aller Blätter verschwunden und ist der Zweig noch frisch und lebenskräftig.

Versuch 81.

Ulmus campestris. 7. Juli '79,

Ein Zweig mit 8 Blättern, unter denen die 4 oberen noch sehr klein sind und eine sich entwickelnde Endknospe bilden, wird um 7 U. Nachm. auf das mit destillirtem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Nur die 3 unteren Blätter sind erwachsen, auch an diesen aber sind die Stipulae noch in ganz frischem Zustande vorhanden. Quecksilberdruck: anfangs 28,3 Centim., am Ende 20 Centim. Temperatur: 17,5°, 17,5° C.

Resultat. Nach einer Stunde zeigt das untere Blatt schon kleine injicirte Stellen. Keine Ausscheidung.

Nach 18 Stunden tragen die 4 unteren Blätter entweder auf der Ober- oder auf der Unterseite der Blattzähne einen Tropfen. Dieselben Blätter sind vollkommen injicirt; die Unterfläche ist gleichmässig dunkelgrün gefärbt und trägt bei den 2 unteren Blättern auch viele zerstreute, ausfiltrirte Tropfen.

Die 4 oberen, noch sehr kleinen Blätter haben keine Tropfen ausgeschieden und sind, soviel ich sehen kann, nicht injicirt. Es sind etwa 3 CC. Wasser eingepresst worden.

Der Zweig wird in Wasser gestellt. Nach $2^1/_2$ Stunde (17,7°C.) ist die Injection aller Blätter schon vollkommen verschwunden.

Nach 2 Tagen ist der Zweig ein wenig welk.

Versuch 82.

Vitis vinifera. 5. Mai '79.

Ein Zweig mit 5 Blättern wird aus dem Gewächshause (man vergl. S. 243) geholt und um 11 U. Vorm. auf das mit destillirtem Wasser gefüllte Manometer befestigt. Quecksilberdruck: anfangs 26 Centim., am Ende 21.5 Centim. Temperatur: 12,5°, 14,5°, 18° C.

Resultat. Nach $4^1/_2$ Stunde tragen alle grosse und kleine Blattzähne einen grossen Wassertropfen, entweder auf der Ober- oder auf der Unterseite.

Nach einem Tage ist die Ausscheidung noch sehr reichlich. Es sind im Ganzen etwa 3,6 CC. Wasser eingepresst worden. Der Zweig wird abgeschnitten um das Hervortreten des Wassers aus der Schnittfläche zu beobachten (man vergleiche S. 253.).

Versuch 83.

Weigelia amabilis. 17. Oct. '78.

Ein Zweig mit 8 Blättern wird um 11 U. Vorm. auf das mit gewöhnlichem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Quecksilber-

druck: anfangs 18 Centim., am Ende 15 Centim. Temperatur: 12,5⁰, 12,5⁰ C.

Resultat. Nach 40 Minuten haben alle Blätter schon kleine Wassertropfen an den Spitzen der Blattzähne ausgeschieden.

Nach einem Tage ist die Ausscheidung sehr reichlich. Es ist im Ganzen etwa 1,6 CC. Wasser eingepresst worden.

Versuch 84.

Zea Mais. 10. Febr. '79.

Eine etwa 15 Centim. hohe Keimpflanze wird aus dem Gewächshause geholt, dicht unter einem Knoten abgeschnitten und um 11 U. Vorm. auf das mit gewöhnlichem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Quecksilberdruck: anfangs 17 Centim., Senkung nicht notirt. Temperatur: 11,5⁰, 11,5⁰, 10,5⁰ C.

Resultat. Nach 10 Minuten sind schon 7 Wassertropfen am Rande der verschiedenen Blätter ausgeschieden worden.

Nach 25 Minuten sind die Tropfen am Rande zahlreicher und grösser, auch tragen die 2 ältesten Blätter einen grossen Tropfen an der Spitze. Die Blätter werden abgetrocknet; schon 5 Minuten später fängt die Ausscheidung wieder an.

Nach 5 Stunden: sehr grosse Tropfen an den 3 Blattspitzen, wie überall am Rande.

Nach einem Tage sind im Ganzen 16 sehr grosse Tropfen ausgeschieden worden.

Die Keimpflanze wird in Wasser unter eine Glasglocke gestellt und ist nach einem Tage (14⁰ C.) noch ganz frisch und lebenskräftig.

III. Die resultate.

Im vorhergehenden Abschnitte habe ich nur die Thatsachen beschrieben, die sich als Resultate der gemachten Versuche ergeben haben. Jetzt will ich zuerst die allgemeine Bedeutung dieser Thatsachen und ihren Zusammenhang kürzlich erörtern, um dann in einigen besonderen Paragrafen ein jedes der gewonnenen Resultate eingehend zu besprechen und noch einige Fragen zu beantworten, die sich ohne Weiteres aus den folgenden Auseinandersetzungen ergeben werden. Die oben schon theilweise angedeuteten Hauptresultate, deren Bedeutung ich hier vohr Allem hervorheben will, sind die folgenden:

1⁰. Viele Blätter sondern in Folge des Druckes Wassertropfen an bestimmten Stellen ab.

2⁰. Bei vielen anderen Blättern werden in Folge des Druckes die Intercellularräume injicirt.

3⁰. Die Blätter ziemlich vieler Pflanzen zeigen beide Erscheinungen. Bei solchen Pflanzen scheiden jüngere Blätter leichter Wasser aus als ältere, diese werden aber leichter injicirt als jene.

Bei meinen Betrachtungen gehe ich nun aus von dem Satze: dass die Blätter nicht aller Pflanzen die Fähigkeit haben, bei innerem Wasserdrucke, Tropfen an bestimmten Stellen auszuscheiden.

Es besitzen somit die ausscheidenden Blätter gewisse Eigenthümlichkeiten in ihrem Baue, die den Abfluss des eingepressten Wassers möglich machen und die den nicht ausscheidenden Blättern fehlen. Diese Absonderungsorgane, sie mögen morphologisch ausgebildet sein wie sie wollen, werde ich im Folgenden mit dem Namen Emissarien belegen. Ueber den Bau dieser Organe werde ich später in den Paragrafen 4 und 5 dieses Abschnittes noch einiges mittheilen.

Wenn auch den nicht ausscheidenden Blättern solche Organe fehlen, so macht sich dennoch auch bei diesen der Druck ohne

Ausnahme in bestimmter Weise bemerkbar. Die Blätter ohne Emissarien werden als Folge des Druckes injicirt, ihre Intercellularräume füllen sich mit Wasser.

Diese bis jetzt unbekannte Thatsache ist auch insofern interessant als uns dadurch die Bedeutung der Emissarien für das Leben der sie besitzenden Pflanzen einigermassen erklärlich wird. Die Injection der Intercellularräume nämlich kann dem Leben der Blätter und der Pflanze im Allgemeinen nur schädlich sein, denn der freie Gaswechsel zwischen dem Blattinnern und der Aussenluft, die Athmung und die Kohlensäurezersetzung werden dadurch gehindert. Wo nun aber wirksame Emissarien vorhanden sind, und also Wasserabfuhr stattfinden kann, wird selbstverständlich Injection nicht so leicht zu Stande kommen. Diese Organe schützen also die Blätter vor der nachtheiligen Injection, die auch bei unverletzten Pflanzen unter Umständen, bei starkem Wurzeldrucke und gehemmter Transpiration, stattfinden könnte.

Und dass wirklich auch Blätter, die Emissarien besitzen, injicirt werden, sobald diese Organe nicht mehr wirksam sind, lehrten meine Versuche ebenfalls. Die Blätter ziemlich vieler Pflanzen zeigten Ausscheidung und Injection beide, entweder zur selben oder zu verschiedenen Zeiten. Wo ich bei diesen Pflanzen jüngere und ältere Blätter untersucht habe, fand ich stets, dass die jungen Blätter reichlich Wasser ausschieden, indem bei den älteren die Ausscheidung ganz oder zum grossen Theil unterblieb. Solche alte Blätter wurden aber ohne Ausnahme injicirt, auch wenn, wie fast immer der Fall war, bei den jungen, stark ausscheidenden Blättern derselben Pflanze gar keine Injection stattfand.

Es geht hieraus hervor, dass bei Blättern mit Emissarien im Alter diese Organe unter Umständen unwirksam werden können, und dass in diesem Zustande auch solche Blätter bei innerem Wasserdrucke der schädlichen Einwirkung der Injection ausgesetzt sind.

Was die Ursache ist, dass die Emissarien im Alter der Blätter zuweilen unwirksam werden, habe ich durch Versuche bis jetzt noch nicht entscheiden können. Wenn man aber bedenkt, dass die Wurzel nicht reines Wasser, sondern eine verdünnte Lösung verschiedener Substanzen hinaufpresst, so wird es nicht unwahrscheinlich, dass im Laufe der Zeit sich oft ein Theil dieser gelösten Stoffe in den Emissarien absetzen könnte, und demzufolge bei alten Blättern schliesslich die Undurchlässigkeit dieser Organe verursachen.

Im Einklange mit dieser Hypothese ist die bekannte Thatsache, dass die Durchtrittstellen für abgeschiedene Wassertropfen bei manchen Blättern aus diesen Tropfen abgesetzte und aus kohlensaurem Kalk gebildete Schüppchen tragen *).

Vielleicht wird es durch spätere Untersuchungen möglich sein, die Richtigkeit der hier ausgesprochenen Hypothese experimentell zu prüfen.

Auf welche Weise solche Blätter, denen die Emissarien fehlen, vor Injection der Intercellularräume geschützt sind, ist eine Frage, die ich einstweilen nur theilweise beantworten kann. Wie ich in der Einleitung schon hervorhob, zeigen, nach HOFMEISTER's Beobachtung, die Coniferen nie Wurzeldruck. Dementsprechend besitzen die von mir untersuchten Coniferenblätter (Pinus, Taxus) auch keine Emissarien.

Möglich wäre es allerdings, dass alle Pflanzen ohne Emissarien auch den Wurzeldruck entbehren. Ebenfalls möglich wäre es aber, dass bei solchen Pflanzen auf andere Weise das Zustandekommen der Injection unter normalen Bedingungen unmöglich gemacht werde. Dies zu entscheiden war jetzt nicht mein Zweck und muss späteren Untersuchungen vorbehalten bleiben.

Nach diesen Auseinandersetzungen gehe ich zu der eingehenden Besprechung des hier im Zusammenhang aber flüchtig Mitgetheilten über.

---

*) A. DE BARY. Vergleichende Anatomie der Vegetationsorgane der Phanerogamen und Farne. S. 54, 57, 113 und 114.

§ 1. *Die Tropfenausscheidung.*

Wie dem Leser schon beim Durchblättern der Versuchsbeschreibungen klar geworden sein wird, zeigte eine nicht unbeträchtliche Anzahl der von mir untersuchten Pflanzen eine Tropfenausscheidung, auf dieselbe Weise, wie man es im Freien oft beobachten kann. Ich will jetzt zuerst eine alphabetische Liste dieser Pflanzen folgen lassen und bei einer jeden erwähnen, an welchen Theilen der Blätter die Ausscheidung stattfand.

Da auch bei den Versuchsbeschreibungen im vorigen Abschnitte die alphabetische Folge gewählt wurde, so wird es leicht sein, für jeden Pflanzennamen der nachfolgenden Liste den betreffenden Versuch aufzufinden.

1. Ageratum coeruleum.	Oberseite der Blattzähne.
2. Arbutus Unedo.	Oberseite der Blattzähne.
3. Adhatoda Vasica.	Zerstreute Stellen der Unterseite des glatten Blattrandes.
4. Aucuba japonica.	Unter- oder Oberseite der Blattzähne.
5. Begonia incarnata.	Oberseite der Blattzähne.
6. Begonia manicata.	Oberseite der Blattzähne.
7. Boehmeria pilosiuscula.	Ganze obere Blattfläche.
8. Borrago officinalis.	Blattspitze.
9. Calamagrostis variegatus.	Blattspitze und sonst am Rande.
10. Callicoma serratifolia.	Oberseite der Blattzähne.
11. Cestrum Regelii.	Zerstreute Stellen der Unterseite des glatten Blattrandes.
12. Cestrum roseum.	Zerstreute Stellen der Ober- oder Unterseite des glatten Blattrandes.
13. Cordia Franciscea.	Unter- oder Oberseite der Blattzähne.
14. Datura sanguinea.	Zerstreute Stellen der Ober- oder Unterseite des Randes; an den Zähnen wie an den Einschnitten.

15. Dichroa cyanitis.	Blattzähne.
16. Eupatorium triplinerve.	Oberseite der Blattzähne.
17. Fuchsia globosa.	Blattzähne
18. Helleborus niger.	Oberseite der Blattzähne.
19. Hydrangea Hortensia.	Oberseite der Blattzähne.
20. Hordeum vulgare.	Blattspitze und sonst am Rande.
21. Impatiens Balsamina.	Blattzähne.
22. Lavatera arborescens.	Ganze untere Blattfläche.
23. Pelargonium inquinans.	Oberseite der Blattzähne.
24. Peristrophe speciosa.	Zerstreute Stellen der Unterseite, zuweilen auch der Oberseite des glatten Blattrandes.
25. Phaseolus vulgaris.	Ganze untere und obere Blattfläche.
26. Philadelphus coronarius.	Ober- oder Unterseite der Blattzähne.
27. Phygelius capensis.	Oberseite der Blattzähne.
28. Phytolacca decandra.	Zerstreute Stellen der Unterseite des glatten Blattrandes.
29. Platanus occidentalis.	Ober- oder Unterseite der Blattzähne.
30. Potentilla atrosanguinea.	Oberseite der Blattzähne.
31. Primula sinensis.	Ober- oder Unterseite der Blattzähne.
32. Sambucus nigra.	Oberseite der Blattzähne.
33. Saxifraga rotundifolia.	Oberseite der Blattzähne.
34. Sciadocalyx digitaliflora.	Oberseite der Blattzähne.
35. Sempervivum ciliatum.	Unterseite der Blattspitze.
36. Sempervivum tortuosum.	Ober- oder Unterseite der Blattspitze.
37. Senecio vulgaris.	Zerstreute Stellen der Ober- oder Unterseite des Blattrandes; an den Zähnen wie an den Einschnitten.
38. Tropaeolum majus.	Stellen des Randes, wo die grossen Nerven endigen.
39. Ulmus campestris.	Ober- oder Unterseite der Blattzähne.

40. Vitis vinifera.	Ober- oder Unterseite der Blattzähne.
41. Weigelia amabilis.	Blattzähne.
42. Zea Mais.	Blattspitze und sonst am Rande.

Ich komme also zu dem Resultate: dass von den 60 untersuchten Pflanzen, 42 eine Tropfenausscheidung zeigen, auf dieselbe Weise, wie sie an unverletzten Pflanzen oft beobachtet wird.

Bei 25 dieser Pflanzen tragen die Blätter die ausgesonderten Wassertropfen an den Blattzähnen (respective der Blattspitze) und zwar an deren Spitze, Unter- oder Oberseite.

Das Austreten zerstreuter Wassertropfen an nicht näher bestimmten Stellen des Blattrandes (respective an der Blattspitze) findet bei 11 Pflanzen statt. Bei 9 dieser Pflanzen sind die Blätter glattrandig und nur bei Tropaeolum treten die Tropfen am Rande genau über die Endigungen der grossen Nerven hervor. Die 2 übrigen (Datura sanguinea und Senecio vulgaris) besitzen eingeschnittene Blätter.

Eine Ausscheidung, die sich auf die Spitze der Blätter beschränkt, wird nur bei drei Pflanzen beobachtet (Borrago officinalis, Sempervivum ciliatum und tortuosum).

Bei 3 Pflanzen schliesslich findet die Ausscheidung über die ganze obere oder untere Blattfläche, oder über beide statt (Boehmeria pilosiuscula, Lavatera arborescens, Phaseolus vulgaris).

Als Pflanzen, bei denen eine reichliche Ausscheidung innerhalb einer Stunde stattfindet, die also zu Vorlesungsversuchen besonders geeignet sind, nenne ich ausser Fuchsia und die Gräser beispielweise noch die folgenden: Adhatoda Vasica, Begonia incarnata, Cestrum Regelii und roseum, Datura sanguinea, Hydrangea Hortensia, Impatiens Balsamina, Pelargonium inquinans, Weigelia amabilis.

---

§ 2. *Die Injection.*

Wie ich schon früher hervorgehoben habe, war es eine fast ebenso allgemeine Erscheinung als die Tropfenausscheidung, dass die

Blätter in Folge des im Innern des Zweiges herrschenden Wasserdruckes injicirt wurden. Bei der Injection wird die Luft aus den Intercellularräumen durch das eingepresste Wasser verdrängt. Da diese sich hauptsächlich an der Unterseite der Blätter vorfinden und die in ihnen befindliche Luft die blassgrüne Farbe der unteren Fläche verursacht, so wird die Betrachtung der Blattunterseite jedesmal genügen, wenn man entscheiden will, ob Injection stattfand oder nicht.

Diese Seite ist, je nachdem die Injection mehr oder weniger vollkommen war, ganz und gar, oder auch nur stellenweise dunkelgrün gefärbt. Die injicirten Stellen sind gewöhnlich über die ganze Blattfläche gleichmässig verbreitet. Sie sind zuweilen sehr klein, aber dann meistens überaus zahlreich, so dass die Unterseite des Blattes dunkelgrün punktirt aussieht. Zugleich sind alle injicirte Blatttheile bei durchfallendem Lichte bedeutend durchscheinender als solche Theile, deren Intercellularräume noch mit Luft erfüllt sind. Festzustellen, ob ein Blatt injicirt ist, bietet somit niemals auch nur die geringste Schwierigkeit.

Im Allgemeinen kann man sagen, dass zum Zustandekommen der Injection eine längere Einwirkung des Druckes nothwendig ist, als zu der Ausscheidung von Wassertropfen. Doch kommen auch einzelne Ausnahmen vor.

Ich will jetzt das alphabetische Verzeichniss der Pflanzen, bei deren Blättern ich Injection beobachtet habe, folgen lassen:

1. Acer Pseudoplatanus.
2. Ailanthus glandulosa.
3. Arbutus Unedo. *
4. Aucuba japonica. *
5. Buxus sempervirens.
6. Camellia japonica.
7. Castanea vesca.
8. Cestrum Regelii. *
9. Cestrum roseum *
10. Colubrina nepalensis.
11. Cordia Franciscea. *
12. Datura sanguinea. *

13. Evonymus fimbriatus.
14. Evonymus japonicus.
15. Hedera Helix.
16. Helleborus niger. *
17. Ilex aquifolium.
18. Juglans regia.
19. Lavatera arborescens. *
20. Lemone dulce.
21. Peristrophe speciosa. *
22. Philadelphus coronarius. *
23. Pinus Abies L.
24. Platanus occidentalis. *
25. Prunus Laurocerasus.
26. Prunus lusitanica.
27. Rhododendron ponticum.
28. Sambucus nigra. *
29. Syringa vulgaris.
30. Taxus baccata.
31. Ulmus campestris. *

Ich komme also zu dem Resultate: dass bei 31 der 60 von mir untersuchten Pflanzen die Blätter, in Folge des inneren Wasserdruckes, zum Theil oder ganz injicirt werden.

Unter diesen 31 Pflanzen giebt es 13 durch * angedeutete, die neben der Injection auch Ausscheidung zeigten. Im folgenden Paragrafen komme ich auf diese noch zurück. Ich will aber schon jetzt ausdrücklich hervorheben, dass sich möglicherweise unter den Pflanzen bei deren Blättern ich nur Injection beobachtete, einige vorfinden deren Blätter im jüngeren Zustande auch Tropfen ausscheiden können. Die Zahl der Pflanzen deren Blätter nur injicirt werden können, ohne je Wasser abzusondern, ist somit in Wirklichkeit möglicherweise etwas kleiner als aus der hier gegebenen Liste zu- folgen scheint. Hedera, Syringa, Taxus, u. a. aber gehören unzweifelbar zu dieser Zahl.

An den injicirten Blättern wurde übrigens ziemlich oft eine Absonderung von Wassertropfen beobachtet, die mit der im

vorigen Paragrafen behandelten, eigentlichen Tropfenausscheidung nicht verwechselt werden darf.

Diese letztere ist dadurch characterisirt, dass sie immer unabhängig von der Injection stattfindet und dazu fast ohne Ausnahme an bestimmten Theilen der Blätter, am Rande oder an der Blattspitze. Nur in drei vereinzelten Fällen beobachtete ich eine Tropfenausscheidung über die ganze obere oder untere Blattfläche (man vergl. S. 307).

Bei injicirten Blättern kann es nun aber selbstverständlich oft vorkommen, dass alle Intercellularräume mit Wasser erfüllt sind und somit der stets fortwirkende Druck sich nur ausgleichen kann, wenn Wasser an der Oberfläche des Blattes hinausfiltrirt Eine solche Ausscheidung findet dann nicht an bestimmten Stellen statt, sondern über die ganze Blattfläche und zwar zumeist nur an der unteren. Ich habe sie bei den folgenden Pflanzen beobachtet:

1. Ailanthus glandulosa.
2. Camellia japonica.
3. Castanea vesca.
4. Colubrina nepalensis.
5. Helleborus niger.
6. Juglans regia.
7. Prunus lusitanica.
8. Rhododendron ponticum.
9. Syringa vulgaris.
10. Ulmus campestris.

Dass man hier wirklich nur eine Ausscheidung als Folge der übermässigen Injection vor sich hat, schliesse ich aus den folgenden Thatsachen.

Erstens sah ich bei Camellia japonica (Vers. 18), Helleborus niger (Vers. 39) und Ulmus campestris (Vers. 81) erst die Injection, und dann, längere Zeit nachher, die erwähnte Ausscheidung anfangen. Ferner kann man auch bei Pflanzen, deren Blätter unter einem gewissen Drucke nur injicirt werden, durch Verstärkung des Druckes Ausscheidung an den injicirten Blättern hervorrufen.

So wurden in Versuch 17 die Blätter der Camellia japonica bei einem Quecksilberdrucke van 20 Centim. nur injicirt, während in Versuch 18, bei 30,5 Centim. Druck auch Wassertropfen an der unteren Blattfläche hinausfiltrirten.

Auch die Blätter von Syringa vulgaris wurden bei einem 18 Centim. grossen Quecksilberdrucke nur injicirt (Vers. 74), indem bei 25 Centim. Druck die untere Blattfläche noch dazu viele Tropfen ausgeschieden hatte (Vers. 75).

Schliesslich will ich hier noch zwei Versuche beschreiben, die zu dem nämlichen Schlusse führen.

Versuch 85.

Prunus lusitanica. 3. März. '79.

Ein Zweig mit 15 Blättern wird um 2 U. Nachm. auf das mit destillirtem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Temperatur: 5,5^0, 7,5^0, 7,5^0, 9^0, 9,5^0 C.

Resultat. Quecksilberdruck: anfangs 10 Centim. Nach 20 Stunden sind alle Blätter stellenweise injicirt, aber ganz trocken. Der Druck ist noch etwa 10 Centim., es ist höchtens 0,5 CC. Wasser eingepresst worden. Jetzt wird der Druck auf 21 Centim. gebracht.

Nachdem der Zweig einen Tag dem Drucke von 21 Centim. ausgesetzt gewesen ist, sind fast alle Blätter vollkommen injicirt, so dass die Unterseite gleichmässig dunkelgrün gefärbt ist. Zugleich trägt die Unterseite fast aller Blätter einige ausfiltrirte Wassertropfen. Druck noch 14 Centim. Es sind etwa 3,8 CC. Wasser eingepresst worden.

Jetzt wird der Zweig aus dem Apparate genommen, der untere, 1 Centim. lange Theil wird unter Wasser abgeschnitten, die Blätter werden abgetrocknet, und der Zweig wird sogleich wieder auf das mit destillirtem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Nachdem der Zweig nun 18 Stunden einem Quecksilberdrucke von 10 Centim. ausgesetzt gewesen ist, trägt die untere Fläche der Blätter sehr

viele Wassertropfen. Dann ist der Druck noch 8 Centim. Es ist etwa 1 CC. Wasser eingepresst worden.

Der Zweig wird in Wasser gestellt. Nach 4 Tagen ist die Injection aller Blätter vollkommen verschwunden.

Versuch 86.

Rhododendron ponticum. 3. März '79.

Ein Zweig mit 9 Blättern wird aus dem Garten geholt und um 2 U. Nachm. auf das mit gewöhnlichem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Temperatur: 5,5^0, 7,5^0, 7,5^0, 9^0, 9,5^0 C.

Resultat. Quecksilberdruck: 11 Centim. Nach einem Tage sind alle Blätter sehr stark stellenweise injicirt, die untere Blattfläche ist trocken. Druck noch 10 Centim.; es ist etwa 0.4 CC. Wasser eingepresst worden. Der Druck wird jetzt auf 23 Centim. gebracht.

Nachdem der Zweig 5 Stunden einem Drucke von 23 Centim. ausgesetzt gewesen, sind alle Blätter vollkommen injicirt, die Unterseite ist gleichmässig dunkelgrün gefärbt und trägt ausfiltrirte Wassertropfen. Die Blätter werden abgetrocknet.

Ein Tag später ist die Injection wie oben, die Ausscheidung wieder sehr reichlich. Druck noch 18 Centim. Es sind etwa 2 CC. Wasser eingepresst worden.

Jetzt wird der Zweig aus dem Apparate genommen, der untere, 1 Centim. lange Theil wird unter Wasser abgeschnitten und der Zweig sogleich wieder auf das mit destillirtem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Schon nach einer halben Stunde haben die vorher sorgfältig abgetrockneten Blätter, unter einem 12 Centim. grossen Drucke über die ganze untere Fläche zerstreut, wieder sehr viele Tropfen ausgeschieden. Achtzehn Stunden später ist es noch ebenso. Druck noch 11 Centim. Es ist etwa 0,5 CC. Wasser eingepresst worden.

Der Zweig wird in Wasser gestellt. Nach 7 Tagen ist die Injection aller Blätter vollkommen verschwunden.

Es genügte somit in diesen Versuchen der Druck von 10 (resp. 11) Centim. zur theilweisen Injection, nicht aber zum Ausfiltriren des Wassers. Bei 21 (resp. 23) Centim. Druck wurde die Injection vollständig und es wurde Wasser hinausgepresst. Als ich dann die Blätter, deren Intercellularräume schon ganz mit Wasser gefüllt waren, wieder einem Drucke von 10 (resp. 12) Centim. aussetzte, so konnte das eingepresste Wasser im Blatte nicht mehr Raum finden. Desshalb fand jetzt unter dem schwachen, 10—12 Centim. grossen Drucke dennoch eine reichliche Aussonderung an der Unterseite des Blattes statt.

Wenn mann bei solchen Pflanzen, deren Blätter als Folge des Druckes injicirt werden, am Anfang des Versuchs den Spitzentheil eines Blattes abschneidet, so wird selbstverständlich bald an der Schnittfläche ein Theil des eingepressten Wassers in der Form von Tropfen hervortreten. Der auf diese Weise zu Stande kommende Abfuhr des Wassers kann nun einen Einfluss auf das Eintreten der Injection üben, wie ich mehrmals beobachtet habe.

Bei Taxus baccata (Vers. 77) sind nach 3-tägiger Einwirkung des Druckes, die zur Hälfte abgeschnittenen Blätter ganz ohne Injection, und haben an der Schnittfläche viel Wasser ausgeschieden, während die unverletzten Blätter desselben Zweiges sehr stark injicirt sind.

Die zur Hälfte abgeschnittenen Blätter von Evonymus fimbriatus (Vers. 35) haben nach 2 Tagen viel Wasser ausgeschieden, sind aber nur an der Blattbasis ein wenig injicirt, und gar nicht in der Nähe der Schnittfläche. Zugleich sind alle andere Blätter desselben Zweiges sehr stark injicirt.

Bei Pinus Abies (Vers. 59) hingegen sind die zur Hälfte abgeschnittenen Blätter nach 2 Tagen eben so stark injicirt, wie die unverletzten, indem sie zugleich Wassertropfen ausgeschieden haben.

Die durch das Abschneiden eines Blatttheiles verursachte Wasserabfuhr kann also so reichlich sein, dass keine Injection mehr zu Stande kommt. Es kann aber auch noch so viel Wasser verfügbar bleiben, dass eine theilweise Injection stattfindet. Endlich kann die Wasserabfuhr beziehungsweise so unbedeutend sein, dass die abgeschnittenen Blätter injicirt werden, als wären sie unversehrt.

Wie ich oben schon erwähnt habe, und auch aus den Versuchsbeschreibungen erhellt, verdunstet das Wasser aus den Intercellularräumen in kürzerer oder längerer Zeit, wenn man die injicirten Zweige nach Beendigung des Versuchs, in Wasser stehend, weiter beobachtet.

Nie habe ich auch nur die geringste schädliche Folge des Injicirens an den Versuchsblättern bemerken können, sie wurden ohne Ausnahme wieder vollkommen normal, wie sie vor Anfang des Versuchs waren. Doch will ich keineswegs behaupten, dass im Allgemeinen die Injection der Blätter dem Leben der Pflanze nicht sehr schädlich sei. Wie ich oben schon hervorhob, leidet sogar der Gegentheil keinen Zweifel, zumal bei jüngeren, noch wachsenden und stark athmenden Pflanzentheilen. Dass in meinen Versuchen die nachtheiligen Folgen sich nicht zeigten, wird wohl zum Theil daher rühren, dass ich fast immer mit älteren Blättern und bei sehr niedriger Temperatur arbeitete, während die Dauer der Injection relativ kurz war.

Nur bei wenigen Pflanzen haben die Blätter die Eigenschaft, innerhalb einer Stunde, sei es auch nur theilweise, injicirt zu werden. Es findet dies aber statt bei Cestrum Regelii und roseum, Platanus occidentalis und Ulmus campestris. Diese Pflanzen eignen sich somit am Besten zu Vorlesungsversuchen. Innerhalb weniger Stunden sah ich die Injection stattfinden bei Arbutus Unedo, Camellia japonica, Colubrina nepalensis, u. a.

§ 3. *Tropfenausscheidung und Injection bei derselben Pflanze.*

Wie ich schon hervorhob, werden verschiedene Pflanzennamen in der ersten, wie in der zweiten der vorigen Paragrafen angetroffen, das heisst, bei einer ziemlich grossen Zahl der untersuchten Pflanzen zeigten sich Ausscheidung und Injection beide. Die betreffenden Pflanzen waren:

1. Arbutus Unedo.
2. Aucuba japonica.
3. Cestrum Regelii.
4. Cestrum roseum.
5. Cordia Franciscea.
6. Datura sanguinea.
7. Helleborus niger.
8. Lavatera arborescens.
9. Peristrophe speciosa.
10. Philadelphus coronarius.
11. Platanus occidentalis.
12. Sambucus nigra.
13. Ulmus campestris.

Dreizehn der von mir untersuchten Pflanzen zeigten also Ausscheidung und Injection beide.

Bei einigen dieser Pflanzen habe ich Beobachtungen an jungen, wie an alten Blättern machen können. Ich will hier einige dieser Beobachtungen, die in den einzelnen Versuchsbeschreibungen zerstreut vorkommen, zusammenstellen.

Sie weisen darauf hin, dass bei solchen Pflanzen, bei denen Injection wie Tropfenausscheidung stattfinden, das Alter der Blätter einen entscheidenden Einfluss auf das zu Stande kommen der einen oder der anderen Erscheinung üben kann. Nur füge ich noch hinzu, dass die Beobachtungen an jungen Blättern sich fast ohne Ausnahme auf solche beziehen, die ihre definitive Grösse schon erreicht hatten, aber noch ganz jung und zart waren. Noch im Flächenwachsthum begriffene, sehr kleine Blätter habe ich nur selten beobachtet.

Cordia Franciscea.

Am 18. Nov. '78 wird ein Zweig mit alten Blättern untersucht. Die Blätter sonderen nicht sehr viele Wassertropfen ab und werden vollkommen injicirt (Vers. 28).

Am 26. April '79 wird ein Zweig derselben Pflanze untersucht, mit erwachsenen, aber jungen, schon seit Januar gebildeten Blättern. Die Ausscheidung ist sehr reichlich; Injection findet gar nicht statt (Vers. 29).

Helleborus niger.

Am 17. Febr. '79 wird ein altes Blatt des vorigen Jahres, das den Winter über lebendig geblieben war, zu dem Versuche benutzt. Injection findet statt, keine Tropfenausscheidung (Vers. 39).

Am 26. April '79 wird der Versuch gemacht mit einem erwachsenen, aber jungen, seit Febr. '79 gebildeten Blatte, unter schwacherem Drucke. Nur Tropfenausscheidung, keine Injection (Vers. 40).

Philadelphus coronarius.

Am 4. Nov. '78 werden alte Blätter an ihrem Rande injicirt; sparsame Ausscheidung (Vers. 54).

Am 26. Juni '79 zeigen erwachsene, aber noch junge Blätter eine sehr reichliche Ausscheidung, ohne Injection (Vers. 55).

Platanus occidentalis.

An dem Versuchszweige befinden sich 5 Blätter; die 2 unteren sind ganz erwachsen, dunkelgrün gefärbt und nicht jung mehr; die 2 folgenden haben ihre definitive Grösse erreicht, sind aber noch zart und hellgrün gefärbt; das obere Blatt hat nur die Hälfte der definitiven Grösse erreicht.

Die 2 ältesten Blätter werden nur injicirt, ohne Ausscheidung; die 2 nach oben folgenden, jüngeren

Blätter werden zwar injicirt, sondern aber zugleich reichlich Wassertropfen aus; das jüngste, noch wachsende Blatt scheidet viel Wasser aus, wird aber nicht injicirt (Vers. 60).

Sambucus nigra.

Am 2. Nov. '78 werden alte Blätter injicirt, scheiden aber nur wenige Tropfen aus (Vers. 67).

Am 2. Juni '79 wird unter stärkerem Drucke sehr viel Wasser ausgeschieden, findet aber gar keine Injection statt an erwachsenen, aber noch jungen und zarten Blättern (Vers. 68).

Ulmus campestris.

Am 7. Juli '79 werden ältere, erwachsene Blätter, deren Stipulae schon alle abgefallen sind, injicirt; es findet aber keine Tropfenausscheidung statt (Vers. 80).

An demselben Tage, unter etwas stärkerem Drucke werden erwachsene, aber jüngere Blätter, deren Stipulae noch ganz frisch sind, injicirt und scheiden zugleich viele Tropfen aus (Vers. 81).

Aus diesen Beobachtungen schliesse ich, dass bei den erwachsenen Blättern gewisser Pflanzen das Alter einen Einfluss auf das durch Einpressung von Wasser zu erhaltende Resultat üben kann.

Blätter, die, als sie noch jung sind, nur Wasser ausscheiden, können nachher im älteren Zustande injicirt werden, indem sie gar nicht mehr, oder nur wenig Wasser ausscheiden. Ebenso können Blätter, die im jüngeren Zustande Tropfen ausscheiden und zugleich injicirt werden, wenn sie älter sind, nur die letztere Erscheinung auftreten lassen.

Jüngere Blätter scheiden also leichter Wasser aus als ältere, diese werden aber leichter injicirt als jene.

Ich brauche wohl kaum noch hervorzuheben, dass diese Regel nur gilt für solche Pflanzen, bei deren Blättern ich zugleich, oder auch zu verschiedenen Zeiten, Injection und Ausscheidung vorkommen sah.

So habe ich zum Beispiel bei sehr alten Blättern van Fuchsia globosa, Impatiens Balsamina, Potentilla atrosanguinea, u. a. nur Ausscheidung beobachten können, ohne dass je Injection stattfand, wenn ich auch keineswegs behaupten will, dass unter Umständen nicht auch bei diesen Pflanzen die letztere Erscheinung auftreten könnte.

Auf der anderen Seite aber wurden Blätter von Syringa, Taxus, Hedera, u. a, die zwar ihre definitive Grösse erreicht hatten, aber noch ganz jung und zart waren, ebenso gut und ebenso stark injicirt, wie sehr alte Blätter derselben Pflanzen, ohne dass je Ausscheidung stattfand. Uebrigens habe ich schon im vorigen Paragrafen darauf hingewiesen, dass unter denjenigen Pflanzen, deren Blätter in meinen Versuchen nur injicirt wurden, vielleicht auch einige vorkommen könnten, die, wenn ich jüngere Blätter benutzt hätte, Wasser ausgeschieden haben würden.

---

§ 4. *Ueber die Ausscheidung gelöster Stoffe aus den Emissarien.*

Die Beantwortung der von mir anfangs gestellten Fragen hat selbstverständlich wieder neue zu Tage gefordert. Eine der interessantesten dieser Fragen, die auch ohne Zweifel zu weiteren Untersuchungen Veranlassung geben kann, ist wohl die nach den Ursachen, welche es bedingen, dass gewisse Blätter injicirt werden, während andere Wasser ausscheiden und noch andere beide Erscheinungen zeigen.

Um diese Ursachen kennen zu lernen, wird es jedenfalls nöthig sein, den Bau und die Beschaffenheit der Emissarien zu erforschen.

Wenn es nun auch bei der vorliegenden Untersuchung nicht meine Absicht war, diesen Gegenstand weiter zu verfolgen, so will ich doch in diesem und dem folgenden Paragrafen dasje-

nige mittheilen, was mir schon jetzt von der Einrichtung der Emissarien bekannt ist.

In dieser Hinsicht war es mir zuerst von Interesse durch Versuche zu entscheiden, ob bei Pflanzen, deren Blätter Emissarien besitzen, in dem eingepressten Wasser gelöste Stoffe durch diese Organe mit ausgeschieden werden, ober ob solche Stoffe vielleicht in dem Blatte zurückgehalten werden, während nur reines Wasser abgesondert wird. Die Beantwortung dieser Frage ist ja geeignet, wenigstens vorläufig einiges Licht auf die Beschaffenheit der Emissarien zu werfen.

Wenn in dem eingepressten Wasser gelöste Stoffe nicht mit ausgeschieden, sondern in dem Blatte zurückgehalten werden, so könnte man offenbar die Emissarien als eine Art Drüsen betrachten, deren Bau und Eigenthümlichkeiten auf die Zusammenstellung des Secretionsproduktes einen überwiegenden Einfluss üben.

Werden dagegen gelöste Stoffe durch die Emissarien mit ausgeschieden, so besteht diese Aehnlichkeit mit Drüsen nicht, sondern muss mann diese Organe, ihrer Funktion nach, nur als durchlässige Theile des Blattes betrachten, welche auf die Zusammenstellung der durch sie auszuscheidenden Flüssigkeit keinen Einfluss üben.

Zur Lösung dieser Frage habe ich mit dem Safte der Phytolacca-beeren und mit Tanninlösung Versuche angestellt. Die Zweige wurden auf die gewöhnliche Weise in den oben beschriebenen Apparat befestigt; das Rohr war aber nicht mit gewöhnlichem oder destillirtem Wasser, sondern mit einer Lösung der fremden Substanz gefüllt.

Ich benutzte zu diesen Versuchen nur Zweige solcher Pflanzen, bei denen ich schon früher gewöhnliches Wasser eingepresst hatte.

Ich habe nicht beobachtet, dass die fremden Stoffe den Versuchszweigen geschadet hätten; sie gingen, nachher in Wasser stehend, nicht früher ein als man es sonst hätte erwarten können. Nur waren einzelne Pflanzen, deren Blätter gewöhnliches Wasser leicht und reichlich ausscheiden, für diese Flüssigkeiten undurchlässig, so dass keine Tropfenabsonderung stattfand, wie ich an geeigneter Stelle noch hervorheben werde.

Die mit Phytolacca-saft angestellten Versuche werde ich nun zuerst beschreiben. Einige Beeren wurden ausgepresst, die so erhaltene Flüssigkeit mit Wasser verdünnt und dann abfiltrirt. Mit dieser Lösung wurde das Versuchsrohr gefüllt; die weitere Einrichtung war so, wie ich es schon im ersten Abschnitte dieser Abhandlung ausführlich beschrieb. Verschiedene Lösungen wurden angewendet: dunklere und hellere.

Sobald die Blätter Flüssigkeitstropfen ausgeschieden hatten, wurden diese mit hellweissem, feinem Fliesspapier aufgesogen. Auf diese Weise war es sehr leicht, auch eine schwache Färbung des Papiers durch das aufgenommene Wasser mit Sicherheit zu erkennen.

Als nun eine sehr dunkle Lösung in einen Zweig von Tropaeolum majus gepresst wurde, unter einem 15 Centim. grossen Drucke, blieben die Blätter vollkommen trocken und wurde fast keine Flüssigkeit durch die Schnittfläche aufgenommen. Nachdem der Versuch beendigt war, wurde der untere Theil des Zweiges unter Wasser abgeschnitten und der obere Theil in Wasser gestellt. Er blieb noch längere Zeit frisch. Von der ursprünglichen Schnittfläche aus, waren die Gefässbündel etwa 2 Centim. hoch vom Safte gefärbt.

Die übrigen Versuche ergaben ein positives Resultat; ich beschreibe sie hier ausführlich.

Versuch 87.

Fuchsia globosa. 19. Oct. '78.

Ein Zweig mit 12 Blättern wird aus dem Garten geholt und um 11 U. Vorm. auf das mit einer hellen Lösung des Phytolaccasaftes gefüllte Rohr befestigt. Quecksilberdruck: anfangs 15 Centim., Senkung nicht notirt. Temperatur: 14,5^0 C.

Resultat. Nach wenigen Minuten fängt die Ausscheidung schon an.

Nach 2 Stunden tragen die Blattzähne grosse Tropfen die das Fliesspapier röthlich färben.

Der Zweig wird in Wasser gestellt, nachdem der untere Theil unter Wasser abgeschnitten worden ist. Der obere Theil ist nach 2 Tagen noch vollkommen frisch und lebenskräftig. Nach 3 Tagen (17,5° C.) fangen die Blätter abzufallen an.

Versuch 88.

Fuchsia globosa. 19. Oct. '78.

Ein Zweig mit 12 Blättern wird aus dem Garten geholt und um 2 U. Nachm. auf das mit einer dunklen Lösung des Phytolaccasaftes gefüllte Rohr befestigt. Quecksilberdruck: anfangs 16 Centim., Senkung nicht notirt. Temperatur: 14,5° C.

Resultat. Nach 10 Minuten sind schon kleine Tropfen ausgeschieden, die das Papier schwach röthlich färben.

Nach 25 Minuten sind die Tropfen grösser; das Papier wird sehr deutlich roth gefärbt.

Der untere Theil des Zweiges wird unter Wasser abgeschnitten, dann der obere Theil mit den Blättern in Wasser gestellt. Nach 2 Tagen ist er noch frisch und lebenskräftig.

Nach 3 Tagen (17,5° C.) fangen die Blätter abzufallen an.

Versuch 89.

Impatiens Balsamina. 21. Oct. '78.

Ein Zweig mit 12 Blättern wird aus dem Garten geholt und um 1 U. Nachm. auf das mit einer dunklen Lösung des Phytolaccasaftes gefüllte Rohr befestigt Quecksilberdruck: anfangs 17 Centim., Senkung nicht notirt. Temperatur: 14,5° C.

Resultat. Nach $^1/_2$ Stunde tragen die Blattzähne Flüssigkeitstropfen, die das Papier deutlich roth färben.

Nach einer Stunde ebenso.

Nach $3^1/_2$ Stunde sind die Blätter trocken geworden.

Nach einem Tage sind die Blätter trocken, die unteren fangen zu welken an.

Nach 3 Tagen sind alle Blätter etwas welk.

Der Zweig wird, nachdem die Schnittfläche unter Wasser erneuert worden, in Wasser unter eine Glasglocke gestellt. Nach 2 Tagen sind die Blätter wieder ganz frisch.

Diese Versuche führen somit zu dem Schlusse, dass eingepresste Phytolaccalösung bei ausscheidenden Pflanzen bald aus den Blättern tropfenweise hervortritt.

Ich gehe nun zu der Beschreibung der mit Tannin gemachten Versuche über. Zu fast jedem Versuche wurde eine frische Lösung bereitet, die ohne Ausnahme 1 Gramm Tannin auf 100 CC. Wasser enthielt uud nach ihrer Darstellung abfiltrirt wurde. Wenn Ausscheiding stattfand wurden die Tropfen wieder mit weissem Löschpapier aufgesogen, das dann in eine Lösung von Sulphas ferrosus getaucht wurde. Enthielt das ausgeschiedene Wasser Tannin, so wurde die durch dasselbe benetzte Stelle des Papiers in der Eisenlösung sogleich blauschwarz gefärbt. Je nachdem die Färbung mehr oder weniger intensiv war, konnte ich schliessen, dass die aufgesogene Flüssigkeit viel oder wenig Tannin enthielt.

Die Beobachtung ist viel leichter und sicherer als bei der Phytolaccalösung; die Streifen Löschpapier, welche die Reaction zeigen, kann man trocknen und aufbewahren.

Selbstverständlich habe ich mich durch Controllversuche überzeugt, dass bei keiner einzigen der zu diesen Versuchen verwendeten Pflanzen, wenn reines Wasser hineingepresst wird, die ausgeschiedenen Tropfen auch nur eine Spur Tannin enthalten.

Bei zwei Pflanzen, die bei Einpressung von Wasser, eine sehr reichliche Tropfenausscheidung zeigen, unterblieb dieselbe

ganz, als der Versuch mit Tanninlösung gemacht wurde. Dies war der Fall bei Borrago officinalis und Hydrangea Hortensia, unter einem Quecksilberdrucke von 18 Centim.; die Versuche dauerten 2 Tage, es wurde so gut wie keine Flüssigkeit durch die Schnittfläche hineingepresst.

Die Versuche mit positivem Resultate sind die folgenden.

Versuch 90.

Begonia incarnata. 24. Febr. '79.

Ein Zweig mit 6 grossen und einigen sehr kleinen Blättern wird aus dem Gewächshause geholt und um 11 U. Vorm. auf das mit Tannninlösung gefüllte Rohr befestigt. Quecksilberdruck: anfangs 21 Centim., Senkung nicht notirt. Temperatur: 5^0, $5{,}5^0$ C.

Resultat. Nach 24 Minuten sind schon Tropfen an den Zahnspitzen ausgeschieden; sie enthalten Tannin.

Nach 5 Stunden haben die 4 unteren Blätter Tropfen ausgeschieden, die übrigen sind trocken. Die abgesonderte Flüssigkeit enthält viel Tannin.

Der Zweig wird in Wasser gestellt, nachdem die Schnittfläche unter Wasser erneuert worden. Nach 7 Tagen ($4{,}5^0$, 5^0, $5{,}5^0$ C.) ist er noch vollkommen frisch und lebenskräftig.

Versuch 91.

Cestrum roseum. 22. Febr. '79.

Ein Zweig mit 9 Blättern wird aus dem Gewächshause geholt und um 3 U. Nachm. auf das mit Tanninlösung gefüllte Rohr befestigt. Quecksilberdruck: anfangs 21 Centim., am Ende 17 Centim. Temperatur: 6^0, 5.5^0, $4{,}5^0$ C.

Resultat. Nach $1^1/_2$ Stunde noch keine Ausscheidung oder Injection.

Nach 2 Tagen haben sich am glatten Rande der unteren

wie der oberen Blattfläche grosse, zerstreute Tropfen ausgeschieden. Die Flüssigkeit enthält sehr viel Tannin. Es ist etwa 1,6 CC. der Tanninlösung eingepresst worden.

Der Zweig wird in Wasser unter eine Glasglocke gestellt. nachdem die Schnittfläche unter Wasser erneuert worden. Er ist nach 2 Tagen (5° C.) noch ganz frisch und lebenskräftig.

Versuch 92.

Dichroa cyanitis. 12. Nov. '78.

Das schon zu Versuch 33 benutzte Blatt wird, nachdem die Schnittfläche unter Wasser erneuert worden, um 11 U. Vorm. auf das mit Tanninlösung gefüllte Rohr befestigt. Quecksilberdruck: anfangs 22 Centim., Senkung nicht notirt. Temperatur: 10° C.

Resultat. Nach 10 Minuten haben alle Blattzähne schon kleine Tropfen ausgesondert, die aber kein Tannin enthalten.

Nach 25 Minuten ist in der ausgeschiedenen Flüssigkeit etwas Tannin, wenn auch nur wenig, vorhanden.

Nach 35 Minuten ist die Reaction schon ziemlich stark.

Nachdem die Schnittfläche unter Wasser erneuert worden, wird das Blatt in Wasser unter eine Glasglocke gestellt. Nach 18 Tagen (12°, 10° C.) ist es noch vollkommen frisch und lebenskräftig.

Versuch 93.

Fuchsia globosa. 26. Oct. '78.

Ein Zweig mit 6 Blättern wird aus dem Garten geholt und um 2 U. Nachm. auf das mit Tanninlösung gefüllte Rohr befestigt. Quecksilberdruck: anfangs 22 Centim., Senkung nicht notirt. Tempetatur: 14,5° C.

Resultat. Nach 5 Minuten tragen alle Blattzähne einen Tropfen; die Flüssigkeit enthält kein Tannin.

Nach 15 Minuten führen die Tropfen viel Tannin.

Nach $^1/_2$ Stunde ist die Reaction sehr intensiv.

Die Schnittfläche wird unter Wasser erneuert, und dann der Zweig in Wasser gestellt. Nach 2 Tagen (12,5^0 C.) ist er noch ganz frisch und lebenskräftig.

Versuch 94.

Impatiens Balsamina. 26. Oct. '78.

Ein Zweig mit 10 alten Blättern wird aus dem Garten geholt und um 4 U. Nachm. auf das mit Tanninlösung gefüllte Rohr befestigt. Quecksilberdruck: anfangs 23 Centim., Senkung nicht notirt Temperatur: 15^0, 12,5^0 C.

Resultat Nach 15 Minuten sind schon kleine Tropfen an den Blattzähnen ausgeschieden, die eine schwache Tanninreaction zeigen.

Nach 30 Minuten enthält die reichlich ausgeschiedene Flüssigkeit viel Tannin.

Nach 2 Tagen: ebenso. Ein Paar Blätter sind auch theilweise injicirt.

Die Schnittfläche wird unter Wasser erneuert und der Zweig in Wasser unter eine Glasglocke gestellt. Nach einem Tage ist er noch frisch; die Injection ist geblieben.

Versuch 95.

Pelargonium inquinans. 22. Febr. '79.

Ein Zweig mit 3 erwachsenen Blättern und einem noch zusammengefalteten wird aus dem Gewächshause geholt und um 3 U. Nachm. auf das mit Tanninlösung gefüllte Rohr befestigt. Quecksilberdruck: anfangs 19 Centim., Senkung nicht notirt. Temperatur: 6^0 C.

Resultat. Nach 2 Minuten zeigen sich schon kleine Tropfen an verschiedenen Zahnspitzen.

Nach 19 Minuten enthalten die Tropfen noch kein Tannin.

Nach 43 Minuten enthält die ausgeschiedene Flüssigkeit ein wenig Tannin.

Nach 53 Minuten ist die Reaction viel stärker.

Die Schnittfläche wird unter Wasser erneuert, der Zweig in Wasser unter die Glocke gestellt. Nach 5 Tagen (4.5°, 5° C.) ist er noch ganz frisch und lebenskräftig.

Versuch 96.

Phygelius capensis. 23. Nov. '78.

Ein Zweig mit 10 grösseren und vielen sehr kleinen Blättern wird aus dem Garten geholt und um 2 U. Nachm. auf das mit Tanninlösung gefüllte Rohr befestigt. Quecksilberdruck: anfangs 20 Centim., am Ende 19 Centim. Temperatur: 10,5°, 10° C.

Resultat. Nach $1^1/_4$ Stunde noch keine Ausscheidung.

Nach 2 Tagen tragen alle Blätter auf der Oberseite der Blattzähne grosse Tropfen, die sehr viel Tannin enthalten. Es ist etwa 0,5 CC. Tanninlösung eingepresst worden.

Die Schnittfläche wird unter Wasser erneuert, dann der Zweig in Wasser gestellt. Nach 5 Tagen (12,5°, 12°, 13, 10° C.) ist er noch ganz frisch und lebenskräftig.

Versuch 97.

Taxus baccata. 24. Febr. '79.

Ein Zweig mit einigen Nebenzweigen und sehr vielen Blättern wird aus dem Garten geholt und um 4 U. Nachm. auf das mit Tanninlösung gefüllte Rohr befestigt. Bei vielen Blättern wird die Spitzenhälfte abgeschnitten. Quecksilber-

druck: anfangs 20 Centim., am Ende 19 Centim. Temperatur: 5^0, $4{,}5^0$ C.

Resultat. Nach 18 Stunden hat ein jedes der zur Hälfte abgeschnittenen Blätter an der Schnittfläche einen Tropfen ausgeschieden, der sehr viel Tannin enthält. Injection kommt bei keinem Blatte vor. Es ist etwa 0,5 CC. Tanninlösung eingepresst worden.

Der Zweig wird in Wasser gestellt und ist nach 6 Tagen (5^0, $5{,}5^0$ C.) noch ganz frisch und lebenskräftig.

Wenn man also Tanninlösung bei Tropfenausscheidenden Pflanzen einpresst, tretet sie, ebenso wie Phytolacca-saft, bald aus den Blättern hervor. Bei Dichroa, Fuchsia und Pelargonium wurde nur in den zuerst abgesonderten Tropfen kein Tannin aufgefunden.

Nur eine Pflanze, deren Blätter die Eigenschaft haben durch Wassereinpressung injicirt zu werden, habe ich hier mit untersucht (Taxus). Bei zur Hälfte abgeschnittenen Blättern wurden Tannin enthaltende Tropfen an der Wundfläche ausgeschieden; die Injection blieb bei diesen, und auch bei den unverletzten Blättern aus. Ob dies auch bei anderen, sonst injicirt werdenden Pflanzen der Fall sei, können nur weitere Versuche entscheiden.

Sämmtliche Versuche führen also zu dem Resultate, dass Phytolaccasaft und Tanninlösung, wenn sie in Zweige gepresst werden, deren Blätter zu Tropfenausscheidung fähig sind, diese Zweige in ziemlich raschem Strome durchlaufen, um bald durch die Blätter, in der Form von Tropfen ausgeschieden zu werden.

Daraus schliesse ich: die Emissarien sind derartig gebaut, dass in dem eingepressten Wasser gelöste Stoffe durch diese Organe mit ausgeschieden werden.

---

§ 5. *Ueber den morphologischen Bau der Emissarien.*

Ohne Zweifel findet die Tropfenausscheidung bei vielen Blättern oft aus sogenannten Wasserporen statt. Als allgemein bekannte Beispiele dieser Art nenne ich viele Aroideen, Fuchsia und Tropaeolum.

Es führt die Kenntniss dieser Thatsache zu der Frage, inwiefern vielleicht die Emissarien an der Oberfläche der Blätter morphologisch stets als sogenannte Wasserporen ausgebildet seien.

Ziemlich oft habe ich zu meinen Versuchen auch solche Pflanzen benutzt, die in dem schon in der Einleitung citirten Verzeichnisse DE BARY's als Wasserporen besitzend genannt werden. Was ich in diesen Fällen beobachtete, will ich zuerst in aller Kürze hier zusammenstellen.

Helleborus niger trägt 3—6 Wasserporen auf der Oberseite der Blattzähne. Die Ausscheidung findet nur ebendaselbst statt (Vers. 40).

Platanus occidentalis trägt 6—8 Wasserporen auf der Oberseite der Blattzähne. Die Ausscheidung findet bei den erwachsenen Blättern entweder auf der Oberseite der Blattzähne, oder auch nur auf deren Unterseite statt (Vers. 60).

Potentilla atrosanguinea. DE BARY erwähnt (l. c. S. 56), dass Potentilla Thuringiaca u. a Species eine reichzählige Gruppe von Poren auf der Oberseite eines jeden Blattzahnes tragen. Die Ausscheidung findet nur ebendaselbst statt (Vers. 61).

Primula sinensis trägt einen grossen Porus auf der Spitze der Blattzähne. Die ausgeschiedenen Tropfen befinden sich entweder auf der Ober- oder auf der Unterseite der Zähne (Vers 62).

Sambucus nigra trägt 1 oder 2 Wassersporen auf der Oberseite der Blattzähne. Die Ausscheidung findet ebendaselbst statt. (Vers. 68).

Senecio vulgaris trägt eine reichzählige Gruppe von Poren auf der Oberseite der Blattzähne. Die Ausschei-

dung findet an der Oberseite, wie an der Unterseite des Blattrandes statt und ebensogut an den Blattzähnen, wie an den Einschnitten. (Vers. 78).

Ulmus campestris trägt 3—6 Wasserporen auf der Oberseite der Blattzähne. Die Ausscheidung findet entweder an der Oberseite oder an der Unterseite der Zähne statt. (Vers. 81).

Vitis vinifera trägt nach eigener Beobachtung auf der Oberseite der Blattzähne eine meistens reichzählige Gruppe von Wasserporen, indem sonst die Oberseite des Blattes keine Spaltöffnungen besitzt. Die Ausscheidung findet entweder an der Oberseite, oder an der Unterseite der Blattzähne statt (Vers. 82).

Die Ausscheidung findet also oft statt an denjenigen Stellen des Blattes, wo Wasserporen vorkommen. Es fällt aber sogleich auf, dass bei Platanus, Senecio, Ulmus und Vitis die Ausscheidung sich zwar theilweise an diesen Stellen zeigt, aber auch ebenso oft an der Unterseite der Zähne, wo nur gewöhliche Spaltöffnungen vor kommen. Diese Beobachtungen weisen schon darauf hin, dass zu der Tropfenausscheidung der Blätter keineswegs die Anwesenheit der Wasserporen nothwendig sei.

Ich habe diesen Gegenstand weiter verfolgt, und die Frage experimentell zu entscheiden gesucht. Zu dem Zwecke wählte ich fast nur Pflanzen mit glattrandigen Blättern, die zugleich die Eigenschaft besassen an dem Rande Tropfen abzusondern. Wenn die Ausscheidung stattgefunden hatte, wurden die Blätter abgeschnitten, und die Stellen des Randes, an denen sich Tropfen vorfanden, genau markirt. Dann wurde das Chlorophyll mit Alkohol ausgezogen und nachher die zu untersuchenden Blattheile auf Objectgläsern längere Zeit der Einwirkung verdünnter Kalilauge ausgesetzt, bis sie durchscheinend geworden waren. Nach dieser Vorbereitung war es leicht die markirte Stellen des Randes, an denen in Folge des Druckes Tropfen ausgeschieden waren, mikroskopisch zu untersuchen. Es war nun die Frage, ob an solchen Stellen immer Wasserporen angetroffen wurden. Die Antwort findet man in den nachfolgenden Beobachtungen.

Adhatoda Vasica.

Die Tropfen werden am Rande der unteren Blattfläche ausgeschieden (Vers. 6).

Es werden 4 Stellen des Randes, an denen Tropfen sich vorfanden, untersucht. Es kommen hier, wie auch sonst überall an den trocken gebliebenen Theilen des Randes und über die ganze Unterseite des Blattes nur gewöhnliche Spaltöffnungen vor.

Calamagrostis variegatus.

Ausscheidung am Blattrande und an der Spitze (Vers. 15).

Es werden 4 Stellen des Randes, an denen Tropfen abgesondert waren, untersucht. Diese Stellen besitzen nur gewöhnliche Spaltöffnungen, wie auch die ganze Ober- und Unterseite des Blattes.

Cestrum Regelii.

Ausscheidung am Rande der unteren Blattfläche (Vers. 23).

Fünf Stellen, an denen ein Tropfen ausgesondert war, werden untersucht. Hier, wie auch überall an den trocken gebliebenen Stellen des unteren Randes kommen gewöhnliche Spaltöffnungen vor, die im Allgemeinen etwas grösser sind, als die mehr nach der Mitte des Blattes liegenden.

Cestrum roseum.

Ausscheidung am Rande entweder der oberen, oder der unteren Blattfläche (Vers. 26).

Fünf Stellen des unteren Blattrandes, an denen ein Tropfen ausgesondert war, werden untersucht. Hier, wie an den trocken gebliebenen Stellen des Randes und über die ganze untere Blattfläche kommen nur gewöhnliche Spaltöffnungen vor.

Auch werden 5 Stellen des oberen Blattrandes untersucht, an denen ein Tropfen ausgesondert war. Hier, wie überall

sonst an der Oberseite des Blattes, fehlen die Spaltöffnungen ganz.

Datura sanguinea.

Ausscheidung überall zerstreut: an den Zähnen, wie an den Einschnitten des Randes der oberen oder der unteren Blattfläche (Vers. 32).

Sechs Stellen des unteren Blattrandes, an denen ein Tropfen ausgeschieden war, werden untersucht. Hier, wie an den trocken gebliebenen Stellen des unteren Randes kommen gewöhnliche Spaltöffnungen vor, die etwas grösser sind als die, welche mehr nach der Mitte des Blattes liegen.

Auch werden 4 Stellen des oberen Blattrandes untersucht, an denen ein Tropfen ausgeschieden war. An diesen Stellen fehlen die Spaltöffnungen ganz, wenn auch sonst auf der Blattoberseite, aber mehr nach der Mitte des Blattes zu, einzelne vorkommen

Auch auf der Oberseite der Zahnspitzen und der Blattspitze gelang es mir nicht Spaltöffnungen aufzufinden.

Hordeum vulgare.

Ausscheidung am Rande und an der Spitze der oberen Blattfläche (Vers. 42).

Drei Stellen des oberen Blattrandes, an denen ein Tropfen ausgesondert war, werden untersucht. Hier, wie auch überall sonst auf der Unter- und Oberseite des Blattes kommen gewöhnliche Spaltöffnungen vor.

Peristrophe speciosa

Ausscheidung am Rande der unteren, selten der oberen Blattfläche (Vers. 51).

Die untere Blattfläche trägt viele Spaltöffnungen an den Stellen, wo Tropfen ausgeschieden sind, wie auch überall sonst.

Der Blattoberseite fehlen die Spaltöffnungen ganz, auch an denjenigen Stellen, wo Tropfen ausgeschieden sind.

Phytolacca decandra.

Ausscheidung am Rande der unteren Blattfläche (Vers. 58). Es werden 6 Stellen des unteren Randes, an denen ein Tropfen ausgesondert war, untersucht. Hier, wie auch an den trocken gebliebenen Stellen des Randes und über die ganze untere Blattfläche kommen nur gewöhnliche Spaltöffnungen vor.

Bei den hier untersuchten Pflanzen findet also in 3 Fällen (Cestrum roseum, Datura, Peristrophe) Tropfenausscheidung selbst an solchen Theilen der Blätter statt, wo Spaltöffnungen gar nicht vorhanden sind. Aber auch in allen anderen, hier beschriebenen Fällen habe ich nie Wasserporen entdecken können, aus denen die Flüssigkeitstropfen hervorgequollen sein sollten. Nur gewöhnliche Stomata in derselben Zahl, wie sie überall sonst, über die ganze Fläche und auch am Rande des betreffenden Blattes vorkommen, haben sich an den Tropfen absondernden Theilen auffinden lassen.

Ich komme somit zu dem Resultate: dass die Tropfenausscheidung bei Blättern keineswegs immer an der Anwesenheit sogenannter Wasserporen und ebensowenig an der gewöhnlicher Spaltöffnungen gebunden ist.

Daraus schliesse ich: dass die physiologisch gleichwerthigen Emissarien morphologisch, wenigstens äusserlich, sehr verschieden ausgebildet sind.

Sie können sich äusserlich von dem umliegenden Gewebe unterscheiden, zumal bei den sehr stark absondernden Pflanzen, wie z. B. bei den Aroideen, deren Wasserporen eine ungewöhnliche Grösse erreichen. In anderen Fällen aber findet wenig-

stens eine äusserlich sichtbare morphologische Differenzirung der Emissarien nicht statt.

---

§ 6. *Versuche mit Zweigen, denen ein Rindenring entnommen ist.*

In diesem Paragrafen will ich es versuchen, einen Einwand zu beseitigen, den man möglicherweise gegen einen Theil des im Vorhergehenden mitgetheilten erheben könnte. Da im Allgemeinen die oben beschriebene Injection der Blätter in Folge des Druckes nur langsam stattfindet, so könnte man vielleicht meinen, dass diese Erscheinung nicht, wie die Tropfenausscheidung, als eine Folge des Wasserdruckes im Holze aufzufassen sei. Es wäre ja möglich, dass bei Pflanzen deren Blätter injicirt werden, neben der raschen Wasserbewegung (respective Spannung) im Holze auch eine langsame Strömung durch die Rinde des Zweiges stattfände, und dass gerade das auf diesem Wege emporgepresste Wasser in die Intercellularräume des Blattes gelänge. Das bald vertrocknende Mark darf hier wohl ausser Acht gelassen werden.

Gegen eine solche Auffassung des Zustandekommens der Injection sprechen schon die folgenden Thatsachen.

Erstens findet sich die Injection meistens an allen Theilen der Blattspreite gleichzeitig ein. Ist dies nicht der Fall, so werden die Theile in der Nähe des grossen Mittelnerven, oder auch der Blattrand, zuerst injicirt und kann sogar die Injection auf solchen Theilen beschränkt bleiben (z. B. Buxus, Vers. 14; Cestrum Regelii und roseum, Vers. 20—26).

Auch kommen injicirte Blatttheile, die ringsum von nicht injicirtem Gewebe ungeben sind, sehr allgemein vor.

Fände die Injection von der Rinde ausgehend statt, so würde sie ohne Zweifel an der Blattbasis zuerst auftreten, um von dort aus sich über das ganze Blatt zu verbreiten.

Der grösseren Sicherheit wegen habe ich aber einige Versuche angestellt mit Zweigen, bei denen am unteren Ende ein Rindenring bis auf das Holz entfernt worden war. Ich wählte zu diesen Versuchen natürlich solche Pflanzen, deren Blätter

unter gewöhnlichen Umständen injicirt werden. Es war die Frage, ob diese Erscheinung auch auftreten würde, wenn eine Wasserströmung nur durch das Holz und nicht mehr durch die Rinde stattfinden könnte.

Die Versuche waren die folgenden.

Versuch 98.

Hedera Helix, var. arborea. 18. Juli '79.

Ein Zweig mit 2 Seitenzweigen und 30 zwar erwachsenen, aber noch ziemlich zarten Blättern wird um 12 U. Mittags auf das mit destillirtem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Es wird unten am Zweige ein Rindenring von 0,5 Centim. Breite bis auf das Holz entfernt. Quecksilberdruck: anfangs 23 Centim., am Ende 14 Centim. Temperatur: 19,5^0, 20,2^0, 20^0, 20,5^0 C.

Resultat. Nach 4 Stunden sind alle Blätter stark stellenweise injicirt, die untere Blattfläche ist fein dunkelgrün punktirt. Druck noch 21 Centim.; es ist etwa 1,1 CC. Wasser eingepresst worden.

Nach einem Tage sind viele Blätter vollkommen injicirt; die untere Fläche gleichmässig dunkelgrün gefärbt. Es sind etwa 5 CC. Wasser eingepresst worden.

Der Zweig wird in Wasser gestellt. Nach 2 Tagen (19^0, 17,2^0 C.) ist die Injection verschwunden, der Zweig noch ganz frisch und lebenskräftig.

Versuch 99.

Syringa vulgaris. 15. Juli '79.

Ein Zweig mit 4 Seitenzweigen und 30 Blättern wird um 12 U. Mittags auf das mit destillirtem Wasser gefüllte Rohr befestigt. An dem unteren Theile wird ein Rindenrung von 0,6 Centim. Breite entfernt. Quecksilberdruck: anfangs 23 Centim. Temperatur: 18,6^0, 18,3^0, 18,7^0, 16,5^0 C.

Resultat. Nach 2 Stunden haben einige Blätter ein Paar injicirte Stellen. Druck noch 18,3 Centim.; es sind etwa 3,5 CC. Wasser eingepresst worden. An der Ringwunde ist viel Wasser ausgeschieden worden. Der Druck wird jetzt auf 29 Centim. gebracht.

Nach einem Tage sind alle Blätter sehr stark injicirt, die meisten vollkommen, so dass ihre untere Fläche gleichmässig dunkelgrün gefärbt ist. Druck noch 13 Centim. Es sind seit der vorigen Beobachtung etwa 6 CC. Wasser eingepresst worden.

Der Zweig wird in Wasser gestellt. Nach einem Tage (17°, 17°, 19° C.) ist die Injection verschwunden, der Zweig noch frisch und lebenskräftig.

Versuch 100.

Ulmus effusa. 16. Juli '79.

Ein Zweig mit 9 grossen, erwachsenen, 3 jüngeren Blättern und einer sich entwickelnden Endknospe wird um 1 U. Nachm. auf das mit destillirtem Wasser gefüllte Rohr befestigt. Am unteren Theile des Zweiges ist ein Rindenring von 0,6 Centim. Breite entfernt worden. Quecksilberdruck: anfangs 24 Centim. Temperatur: 17°, 17,7°, 17°, 19° C.

Resultat. Nach $1^1/_2$ Stunde tragen die 9 erwachsenen Blätter einen Tropfen, entweder auf der Ober-, oder auf der Unterseite eines jeden Blattzahnes. Auch sind sie alle ziemlich stark stellenweise injicirt, zumal in der Nähe des Mittelnerven. Die 3 jüngeren Blätter zeigen weder Ausscheidung, noch Injection. Druck noch 17,7 Centim.; es sind etwa 2,2 CC. Wasser eingepresst worden. Der Druck wird jetzt auf 23 Centim. gebracht.

Nach einem Tage ist die Ausscheidung sehr reichlich; die 8 ältesten Blätter sind stark stellenweise injicirt, zumal in der Nähe des Mittelnerven; das 9te viel weniger, Druck noch 5 Centim. Seit der vorigen Beobachtung sind etwa 8 CC. Wasser eingepresst worden.

Der Zweig wird in Wasser gestellt. Nach 3 Stunden (19,5° C.)

ist die Injection vollkommen verschwunden, der Zweig noch ganz frisch und lebenskräftig.

Diese Versuche führen also zu dem Resultate: dass auch bei Zweigen, denen am unteren Theile ein Rindenring entnommen ist, Injection der Blätter und Tropfenausscheidung stattfinden, wie bei unverletzten.

Injection und Tropfenausscheidung beide werden also durch einen im Holze sich fortpflanzenden Druck verursacht.

ZUSAMMENSTELLUNG DER RESULTATE.

Die Resultate dieser Untersuchung sind die folgenden.

1. Bei Einpressung von Wasser in den Stengel zeigen, aus 60 untersuchten Pflanzen, 42 eine Tropfenausscheidung an bestimmten Blatttheilen, auf dieselbe Weise, wie sie bei unverletzten Pflanzen oft beobachtet wird.

2. Unter denselben Umständen werden bei 31 Pflanzen die Intercellularräume der Blätter injicirt.

3. Bei solchen Pflanzen, deren Blätter Ausscheidung und Injection beide zeigen, scheiden jüngere Blätter leichter Wasser aus als ältere, die älteren werden aber leichter injicirt als die jüngeren.

4. Injicirte Blätter, die in Wasser an die Luft gestellt werden, verlieren ohne Ausnahme durch Verdunstung, nach kürzerer oder längerer Zeit das Wasser aus ihren Intercellularräumen und werden wieder ganz normal.

5. Wenn mann den rothen Saft der Phytolaccabeeren, oder 1-procentige Tanninlösung in die Stengel solcher Pflanzen presst, deren Blätter zur Tropfenausscheidung fähig sind, so werden die gelösten Stoffe bald aus den Blättern mit ausgeschieden.

6. Die Tropfenausscheidung bei Blättern ist weder an der Anwesenheit sogenannter Wasserporen, noch an der gewöhnlicher Spaltöffnungen gebunden.

7. Tropfenausscheidung und Injection der Blätter finden bei Zweigen, denen am unteren Theile ein Rindenring entnommen ist, ebensogut statt, wie bei unverletzten. Beide Erscheinungen werden also durch einen im Holze sich fortpflanzenden Druck verursacht.

Diese Resultate führen mich zu der Aufstellung folgender Sätze.

1. Es giebt Blätter mit und auch solche ohne Emissarien, d. h. Organe die eine Wasserlosung bei innerem Wasserdrucke möglich machen.

2. Die Blätter ohne, oder mit unwirksamen Emissarien (alte Blätter) werden als Folge des Druckes injicirt, ihre Intercellularräume füllen sich mit Wasser; Athmung und Kohlensäurezersetzung werden theilweise gehemmt.

3. Wirksame Emissarien schützen somit die sie besitzenden Blätter vor der nachtheiligen Injection. In bestimmten Fällen ist dieser Schutz kein vollständiger und beobachtet man somit gleichzeitig Tropfenausscheidung und Injection.

4. Die Einrichtung der Emissarien ist derartig, dass fremde, aber unschädliche Stoffe, die in dem eingepressten Wasser gelöst vorkommen, durch diese Organe mit ausgeschieden werden.

5. Die morphologische Differenzirung der physiologisch gleichwerthigen Emissarien ist, wenigstens an der Oberfläche der Blätter, bei verschiedenen Pflanzen sehr verschieden.

Utrecht, am 19. Februar 1880.



338-1

N

n
n
n

ie
-
-
le
e
i-

n
i-
le
-
r-
gd
ht

ADVIES

AANGAANDE HET DERDE GEDEELTE VAN HET

VERSLAG AAN ZIJNE EXCELLENTIE DEN MINISTER VAN KOLONIËN

OVER EENE

MAGNETISCHE OPNEMING IN DEN INDISCHEN ARCHIPEL,

IN DE JAREN 1874—1877 GEDAAN,

DOOR

Dr. VAN RIJCKEVORSEL.

(Uitgebracht in de Vergadering van 27 Maart 1880).



De ondergeteekenden hebben de eer rapport uit te brengen over de 3e Verhandeling van Dr E. VAN RIJCKEVORSEL, waarin de bepalingen der magnetische declinatie op 131 plaatsen in den Ned. Oost-Indischen Archipel worden medegedeeld.

Zij zijn verricht met een declinatie-instrument, zooals die te Kew en elders in gebruik zijn. In deze instrumenten bestaat de magneet uit een gemagnetiseerden stalen hollen cilinder, aan de eene zijde gesloten door een objectief, hebbende tot brandpuntsafstand de lengte van dien cilinder, aan de andere zijde door eene glazen plaat, waarop in het midden eene vertikale streep, en verder nog eene verdeeling is aangebracht.

Om de vertikale as van het instrument bevindt zich een vaste horizontale verdeelde cirkel en bovendien nog een draaibare, met twee noniën voorziene ring, die aan ééne zijde een radiaal gerichten kijker draagt, waarmede zeer nauwkeurig op de as van den genoemden magneet kan ingesteld worden, en aan de tegenovergestelde zijde een spiegel, bevestigd aan en evenwijdig aan eene horizontale as, welke loodrecht

staat op de richting des kijkers. Deze spiegel dient om er het teruggekaatst beeld der zon in waar te nemen, waartoe dan het oculair van den kijker noch in-, noch uitgeschoven behoeft te worden.

Bij de instelling op den magneet is geene grootere fout dan 20" te verwachten, maar meer onzekerheid blijkt te bestaan in de bepaling van het noordpunt door het waarnemen in den voornoemden spiegel van het beeld der zon; op sommige plaatsen werd de onzekerheid vermeerderd doordien de juiste ware tijd niet zoo nauwkeurig bekend was als had kunnen wezen, indien Dr. VAN RIJCKEVORSEL zelf op zijne reizen tijdsbepalingen genomen had

Bij het gebruik van dit instrument is het van veel belang, dat de as, waarom de genoemde spiegel draait, juist horizontaal en loodrecht op de as van den kijker zij, hetgeen op de wijze als SABINE aangegeven heeft, met behulp van reflektie van een paslood, geverifieerd en gerectificeerd werd. Nog te Batavia zijnde, had zich Dr. VAN RIJCKEVORSEL overtuigd, dat de overblijvende fout geen grooteren invloed hebben kon dan 1',5.

Dr. VAN RIJCKEVORSEL merkt terecht op, dat indien de spiegel niet parallel aan de omwentelingsas was, de tweede bepaling van het noordpunt, die na het omleggen verricht werd, van de eerste een verschil in standvastigen zin zou hebben moeten verraden, hetgeen het geval niet was; het grootste verschil der twee uitkomsten is gewoonlijk 1',5 en dit is met afwisselend teeken.

Hiermede is wel het parallellisme van den spiegel aan zijne as bewezen, maar nog niet dat die as loodrecht stond op de as des kijkers.

Wij vinden niet vermeld, of de kijker niet van een zoogenaamd Bohnenbergersch oculair voorzien was, waardoor de loodrechte stand van den spiegel op de as des kijkers onmiddellijk kan geverifieerd worden; het schijnt dus, dat dit niet het geval was, hetgeen te bejammeren is, daar het gebruik hiervan èn gemakkelijk èn nauwkeurig is.

Dr. VAN RIJCKEVORSEL is zelf de eerste om de leemten te erkennen, die er in zijnen arbeid nog overgebleven zijn, slechts voor een gedeelte dus kan hem daarvan een grief gemaakt worden.

Zoo vermeldt hij, dat de aanwijzingen der medegenomene

ijdmeters, (gelet op den gang), niet altijd naar wensch overeenstemden, zoodat hij zich soms bij de aanwijzing van den besten tijdmeter moest bepalen.

De gangen nu der tijdmeters werden afgeleid uit de standen op die plaatsen, waar de tijd nauwkeurig te verkrijgen was, dus op de stationsplaatsen der nederlandsche marine. En, met behulp van de lengten der tusschenliggende waarnemingsplaatsen, volgden daaruit dan de standen voor die plaatsen, ten tijde der waarnemingen.

Alles hing dus af van de lengten dier plaatsen en van den regelmatigen gang der tijdmeters. Daar de Heer VAN RIJCKEVORSEL voor observatieplaats juist die plaatsen uitkoos, waarvan de lengten nauwkeurig bekend waren, kon hieruit geene onzekerheid ontstaan; het waren dus alleen de gangen der tijdmeters, die bij enkele perioden zijner reizen wel eenige onzekerheid gaven. Het grootste verschil dat Dr. VAN RIJCKEVORSEL tusschen de aanwijzingen van twee zijner tijdmeters vond, was 47 sekonden; doch al ware eene fout van die grootte begaan, zou zij bij de geringe verandering der zon in azimuth, in de nabijheid van den equator, slechts een invloed van ééne minuut gehad hebben.

Toch ware het, onzes inziens, wenschelijker geweest, als Dr. VAN RIJCKEVORSEL, al was het met een klein sextant, dat toch zulke groote bagage niet uitmaakt, bij die gelegenheid zelf telkens eenige zonshoogten had genomen, een werk, dat met bepaling van indexfout, hoogstens een kwartier behoefde te kosten.

De Heer VAN RIJCKEVORSEL geeft als voorbeeld van berekening eenige waarnemingen, door hem te Soerabaja verricht. Hoewel de noordpunten, door de 4 waarnemingen voor en na het omleggen van het spiegeltje verkregen, niet veel van elkander verschillen, zoo is het toch in het oog loopend, dat daarvoor eene steeds toenemende waarde verkregen wordt, namelijk:

Vóór het omleggen.	Na het omleggen.
171° 0′ 59″	170° 57′ 45″
171 1 26	170 58 37
171 2 54	171 1 59
171 3 44	171 2 16

Bij de aflezingen van den magneet is deze toeneming niet

zichtbaar, hoewel tusschen de aflezingen vóór en na de zonwaarnemingen een half uur ligt, terwijl de zonwaarnemingen met tusschenruimten van ongeveer ééne minuut gedaan zijn. De vraag rijst dus, als de waarnemingen voortgezet waren, wat zou dan wel het finale resultaat geworden zijn? Dat aanhoudend toenemen van de waarde van het noordpunt doet het vermoeden ontstaan, dat bij de meting of berekening eene doorloopende fout gemaakt is, of althans dat er eene doorloopende storende oorzaak in het spel geweest is.

Merkwaardigerwijze geeft juist Soerabaja aanleiding tot eene andere opmerking. Dr. VAN RIJCKEVORSEL heeft deze plaats tweemaal bezocht; beide keeren heeft hij er de declinatie bepaald. Hij vond

de eerste keer	7	Sept.	1874	te	7^u38^m	$1^o46'58''$
de tweede 〃	17	Maart	1876	te	8 7	1 59 19
					Verschil . . .	12'21"

Daarop slaat eene aanmerking in de 8e kolom: The discrepancy between Soerabaja I and II is probably owing to the longitude and latitude for both being a little uncertain.

Wij moeten ons twee aanmerkingen hierop veroorloven:

1°. Is de lengte en breedte, niet alleen van het tijdbalgebouw te Soerabaja, maar — aangezien er nauwkeurig opgemetene platte gronden dier stad bestaan — ook van elk ander punt aldaar met eene zeer hooge nauwkeurigheid te kennen.

2°. Zou eene fout van 12'21" in het azimuth der zon, bij waarneming van dit hemellichaam des morgens te half acht of acht uren, met zulk eene kolossale fout in lengte of breedte moeten overeenstemmen, dat daar toch in waarheid niet aan gedacht kan worden. Het verschil schijnt ons dus toe, aan andere oorzaken te moeten toegeschreven worden.

Gaarne zagen wij ook in dit voorbeeld vermeld, hoe de correctie der tijdmeters verkregen was; wij kunnen alleen gissen dat te Soerabaja de tijd wel aan het tijdbalgebouw ontleend zal zijn.

Dergelijke storende invloeden, als hier te Soerabaja werkzaam geweest zijn, blijken ook nu en dan op andere plaatsen invloed op de waarnemingen van Dr. VAN RIJCKEVORSEL gehad te hebben;

althans, hoewel op de meeste plaatsen de verschillende bepalingen der declinatie vrij goed, d. i. binnen 4 of 5 minuten met elkander overeenstemden, komen op enkele plaatsen grootere verschillen voor, als:

te	Timor Koepang . . .	van	13′
〃	Larentoeka.	〃	16
〃	Gorontalo	〃	6
〃	Parigi.	〃	6
〃	Pondang.	〃	16
〃	Kema.	〃	24
〃	Mamoedjoe.	〃	6
〃	Kei Doela.	〃	10
〃	Buitenzorg.	〃	18

〃 Samarang, doch dit werd aan de tegenwoordigheid van ijzer in de nabijheid toegeschreven, 45′,

te Padang . . . . van 30′, om welke groote afwijking Dr. VAN RIJCKEVORSEL deze plaats verworpen heeft.

te Bondjol . . . . van 9′.

In het geheel hebben deze groote verschillen zich dus voorgedaan op 10, of als wij Kebon Agoeng medetellen, waar een verschil van meer dan twee graden gevonden werd, welk station dan ook verworpen werd, op 11 van de 131 plaatsen. Het is den Heer VAN RIJCKEVORSEL niet gelukt de oorzaken van deze verschillen op te sporen. Rapporteurs kunnen bij gebrek aan kennis van de waarnemingsmethode ter nauwernood hieromtrent eene gissing wagen, maar zouden zich wel twee vragen willen veroorloven, 1°. of wel door het plaatsen van een niveau op de horizontale as van het spiegeltje de horizontaliteit er van steeds onderzocht is en of ook de bedoelde verschillen toe te schrijven zijn aan eene werking van de zon op den drievoet van het instrument. Zijn de waarnemingen zoo ingericht als het opgegevene, boven besprokene voorbeeld aangeeft, dus dat 4 instellingen op den magneet, 4 instellingen op de zon, weder 4 instellingen op de zon, met omgelegden spiegel, en 4 instellingen op den magneet, elkander onmiddellijk opvolgden, dan kan de invloed der zon op den drievoet zoo groot niet

zijn, daar zij nagenoeg uit het resultaat geëlimineerd wordt; maar is wellicht, overeenkomstig het aangenomen stelsel, de magneet des morgens op het gewone uur, d. i. 7 à 8 uren, ingesteld en was de waarnemer door betrokkene lucht genoodzaakt, het instrument te laten staan, en eerst een paar uur later de zon waar te nemen, dan is de vraag of er geene torsie in den voet ontstaan kan zijn, al schijnt hij nog zoo sterk van constructie te wezen.

Wat de resultaten op de overige 120 plaatsen aangaat, hoewel het ons voorkomt dat de nauwkeurigheid der declinatiebepalingen van den Heer VAN RIJCKEVORSEL, ook op deze stations bereikt, niet onovertrefbaar genoemd kan worden, zoo is toch het geheel eene zeer welkome bijdrage tot de kennis van het aardmagnetisme in onzen Oost-Indischen Archipel. De verhandeling sluit zich aan de beide vorige aan, die de Afdeeling reeds in hare werken heeft opgenomen, en waarvan de eerste de inclinatie-waarnemingen, de tweede de bepalingen der horizontale intensiteit bevat.

Met het mededeelen dus van bovengenoemde aanmerkingen, willen wij in geenen deele afbreuk doen aan de verdiensten die Dr. VAN RIJCKEVORSEL zich met zoovele opofferingen verworven heeft, om eene magnetische opneming van den Oost-Indischen Archipel uit te voeren, bijna zoo volledig als de bestaande transportmiddelen hem dat veroorloofden, en wenschen slechts daarmede te toonen, dat wij zijn arbeid met belangstelling en aandacht hebben gevolgd, zonder daarom nog blind te zijn voor de onvolkomenheden, die hem aankleven. — Wellicht geven onze aanmerkingen hem aanleiding tot nadere ophelderingen.

Wij aarzelen niet, de Afdeeling te advizeeren, tot de opneming van deze verhandeling in hare werken te besluiten.

Utrecht, 26 Maart 1880.

BUIJS BALLOT.
J. A. C. OUDEMANS.

RAPPORT

OVER DE

VERHANDELING VAN DEN HEER

Dr. H. A. LORENTZ,

GETITELD

DE BEWEGINGSVERGELIJKINGEN DER GASSEN EN DE VOORTPLANTING VAN HET GELUID, VOLGENS DE KINETISCHE GASTHEORIE.

(Uitgebracht in de Vergadering van 27 Maart 1880).



De Commissie, benoemd om over bovengenoemde verhandeling advies uit te brengen, heeft gemeend, ten einde de Akademie in staat te stellen over de waarde dezer verhandeling te oordeelen, een korte analyse van dit stuk te moeten doen voorafgaan door een vluchtig overzicht van den ontwikkelingsgang der kinetische theorie, voor zoover deze theorie dit onderwerp in den kring harer toepassingen heeft zien brengen.

De vergelijkingen, die in de mechanica voor de beweging van vloeistoffen en gassen worden afgeleid, gaan, zooals bekend is, niet uit van de theorie, dat de molekulen in warmtebeweging verkeeren, noch van eenige andere bijzondere onderstelling omtrent het wezen van vloeistoffen en gassen. Zij moeten dan ook in het algemeen geldig zijn, en in zooverre neemt de wijze van afleiding, zooals de mechanica die geeft, een hoogeren rang in dan eene, die op bijzondere onderstellingen omtrent den aard der stoffen zou gegrond zijn. Is dit een niet te miskennen voordeel, er staat een gewichtig nadeel tegenover. Een dergelijke algemeene wijze van behandeling kan

namelijk onmogelijk rekenschap geven van die soort bewegingsverschijnselen, die slechts het gevolg zijn van den bijzonderen toestand der stof. Zoo is dan ook de hydrodynamica niet bij machte geweest de wetten der *diffusie*, der *warmtegeleiding* en der *wrijving* bij gassen af te leiden of de waarde der daarbij optredende constanten te bepalen. En geen wonder. Deze verschijnselen toch staan, óf wat haar bestaan betreft, óf wat de mate betreft, waarin zij voorkomen, in een nauw verband met den toestand, waarin de molekulen verkeeren, als er volgens de wetten der hydrodynamica evenwicht is.

Voor de afleiding van de vergelijkingen van alle bewegingsverschijnselen, die een stof vertoonen kan, is het dus noodzakelijk om een bijzondere onderstelling te maken omtrent haar aard en haar wezen.

Zal deze onderstelling de juiste zijn, dan is het in de eerste plaats noodzakelijk, dat uit haar ook de gewone bewegingsvergelijkingen kunnen verkregen worden; en verder, dat zij in staat zij rekenschap te geven ook van die verschijnselen, welke bij een meer algemeene wijze van behandeling onverklaard moeten blijven.

De kinetische theorie maakt zulk een bijzondere onderstelling omtrent den toestand der stof in den zoogenoemden evenwichtstoestand. Geboren uit de behoefte om de warmte als een vorm van arbeidsvermogen te kunnen beschouwen, bleek zij alras in staat te zijn, bij een gasvormig lichaam, druk tegen de wanden, diffusie, enz., te kunnen verklaren. Het gelukte aan CLAUSIUS reeds spoedig, zelfs de snelheid der warmtebeweging der molekulen te bepalen. De formule, die deze snelheid wedergeeft, komt, op één constanten factor na, geheel overeen met de geluidssnelheid. Geen wonder, dat deze overeenkomst de aandacht moest trekken, en menigeen moest doen beproeven, deze molekulaire beweging rechtstreeks in geluidsbeweging om te zetten. Andere beschouwingen zouden echter in staat geweest zijn tegen een dergelijke poging te waarschuwen. De overweging toch, dat de theorie, waarbij van deze warmtebeweging niet werd uitgegaan, eveneens de geluidssnelheid had doen vinden, moest er toe geleid hebben om niet zulk een natuurlijk en eenvoudig verband tusschen de molekulaire en de

geluidssnelheid te doen onderstellen en veel meer hebben doen zoeken naar de afleiding der hydrodynamische bewegingsvergelijkingen, waarin de geluidsbeweging met tallooze andere meer ligt opgesloten.

De eerste, die dezen rationeelen weg insloeg, was de betreurde, der wetenschap te vroeg ontvallen CLERK-MAXWELL, dien onze Akademie de eer heeft gehad onder hare buitenlandsche leden te mogen tellen. Tegelijkertijd vond hij ook wetten voor de andere verschijnselen, die wij *molekulaire bewegingsverschijnselen* zullen noemen. In dien arbeid heeft hij de onderstelling gemaakt, ten einde het terugspringen bij de botsing der molekulen onderling te kunnen verklaren, dat op het oogenblik der botsing de molekulen zich als krachtscentra gedragen, die elkander volgens zekere functie van den afstand afstooten. Men zou daartoe echter nog andere onderstellingen kunnen maken, bijv. dat de molekulen zich als harde, volkomen onveranderlijke lichamen gedragen, of dat zij de wetten van veerkrachtige lichamen volgen, en misschien nog andere. Het bleek aan MAXWELL, dat, om voor de diffusieconstante een wet te vinden in overeenstemming met de ervaring, die afstooting zou moeten werken in omgekeerde reden van de 5de machten van den afstand. Deze uitkomst bewijst nu echter niet, dat zulk een krachtswerking werkelijk bestaat, en het resultaat is dan ook niet geschikt om algemeen ingang te vinden. Wat aan deze beschouwing meer dan aan eenige andere bijzonder eigenaardig is, is dat zij voor de grootte van het molekuul een zekere, van omstandigheden afhankelijke, denkbeeldige ruimte in de plaats stelt: een ruimte, te kleiner, naarmate de snelheid bij de botsing grooter is. De onderstelling van *harde* molekulen, doet natuurlijk een onveranderlijk volume voor de molekulen vinden. De onderstelling van veerkrachtige lichamen voert tot een volume, dat wel niet geheel onveranderlijk is, maar toch slechts weinig afwisselt.

Later heeft BOLTZMANN meer de beschouwing op den voorgrond gezet, waarbij de molekulen zelven weder als aggregaten, uit atomen opgebouwd, worden aangezien; ook hij leidt wetten af voor de molekulaire bewegingsverschijnselen, maar de hydrodynamische heeft hij niet rechtstreeks behandeld.

De Heer LORENTZ blijkt ook geleid te zijn geworden door de begeerte om de geluidsbeweging uit de kinetische theorie te verklaren, maar stelt zich op het onzes inziens juiste standpunt van daartoe den door MAXWELL aangewezen weg in te slaan om de hydrodynamische vergelijkingen af te leiden. De onderstelling der kinetische theorie, dat de molekulen in warmtebeweging verkeeren, moest dus worden aangenomen; doch daar niet de toestand van evenwicht, maar die van beweging moest worden beschouwd, moest die warmtebeweging met de plaats in de ruimte en met den tijd veranderlijk worden gesteld. Daarvoor moest een functie worden ingevoerd, die de waarschijnlijkheid voorstelt, dat een molekuul op een bepaald oogenblik en in een bepaald punt der ruimte een gegeven bewegingstoestand heeft en een in bepaalden toestand verkeerend aggregaat van atomen is. Hierbij kon de schrijver het voorbeeld van BOLTZMANN volgen. Maar wat den schrijver eigen en onzes inziens een zaak van gewicht is, is dat hij blijkbaar het minimum van onderstellingen aangeeft, waardoor het mogelijk is om de hydrodynamische bewegingsvergelijkingen te vinden. Alleen het denkbeeld van een oneindig kleine verstoring in den evenwichtstoestand, zonder dat het noodig is de gedaante der waarschijnlijkheidsfunctie te kennen, zonder dat het noodig is te weten, hoe de molekulen op het oogenblik der botsing op elkander werken, is voldoende om de gewone vergelijkingen te vinden, die ook alleen voor oneindig kleine verstoringen in den evenwichtstoestand gelden en waarbij de wrijving, warmtegeleiding en diffusie, verwaarloosd worden. In het bijzonder rekenen wij belangrijk, dat de schrijver aantoont, dat ter afleiding dezer vergelijkingen het aantal botsingen op elk punt der ruimte mag berekend worden, alsof in de geheele ruimte om dat punt heen de toestand der stof dezelfde was als in het beschouwde punt. Dit toont de schrijver aan door te bewijzen, dat de wijziging, die in de waarschijnlijkheidsfunctie zou moeten aangebracht worden door de omstandigheid, dat om het beschouwde punt heen de toestand niet dezelfde is, klein is ten opzichte van de verandering, die de waarschijnlijkheidsfunctie ondergaat tengevolge van de afwijking van den evenwichtstoestand in het punt zelf. Achten wij dit resultaat van gewicht,

het bewijs zelf, dat de schrijver geeft, komt ons echter voor niet even duidelijk en even scherp geformuleerd te zijn als dit gewichtig punt eischt en als de schrijver elders toont te kunnen schrijven.

Na eenige verkregen uitkomsten in discussie te hebben genomen en in het licht te hebben gesteld, waarom andere pogingen om de geluidssnelheid te vinden door middel der kinetische theorie hebben gefaald, gaat de schrijver over tot de behandeling der gevallen, waarin de storing in den evenwichtstoestand niet oneindig klein is. In al die gevallen moeten behalve de hydrodynamische ook de molekulaire bewegingsverschijnselen aanwezig zijn; of liever, bij uitzóndering kunnen de hydrodynamische, maar nimmer de molekulaire ontbreken, bijv. bij stationaire warmtegeleiding. Als bijzondere gevallen worden door den schrijver warmtegeleiding en wrijving behandeld. In dit opzicht blijken de uitkomsten afhankelijk te zijn van den inwendigen bouw der molekulen. Zonder dus tot bijzondere onderstellingen over te gaan, kan wel de vorm der wet, die deze verschijnselen beheerscht, maar kunnen niet de daarin voorkomende constanten gevonden worden. De schrijver heeft zich echter met geen bijzondere onderstellingen beziggehouden. Erkentelijk voor het geleverde, denken wij er natuurlijk niet aan om daarvan den schrijver een grief te maken. Integendeel, wij zoeken juist de hoofdzakelijke waarde dezer verhandeling daarin, dat het den schrijver gelukt is aan te tóonen, voor welke verschijnselen *geene* en voor welke *wel* bijzondere onderstellingen moeten worden aangenomen.

Wij kunnen na de vluchtige analyse van deze verhandeling kort zijn in ons oordeel. Wij gelooven, dat, door de opneming daarvan, de werken der Akademie verrijkt zullen worden met een goed stuk. Volgaarne wenschen wij, dat de Akademie daartoe besluite.

Maart 1880. *De Commissie voornoemd:*

J. D. VAN DER WAALS.

J. BOSSCHA.

DE BEWEGINGSVERGELIJKINGEN

DER

GASSEN EN DE VOORTPLANTING VAN HET GELUID VOLGENS DE KINETISCHE GASTHEORIE.

DOOR

H. A. LORENTZ.

Korten tijd na het verschijnen der eerste verhandeling van CLAUSIUS over de moleculaire theorie der gassen maakte JOCHMANN *) de bedenking, dat deze theorie van de bewegingsverschijnselen der gassen, met name van de geluidsbeweging, geene rekenschap zou kunnen geven. Hij werd daartoe gebracht door de meening, dat de nieuwe zienswijze wel de drukking van een gas tegen een ander lichaam, maar niet de onderlinge drukking van naast elkaâr liggende gaslagen zou kunnen verklaren. Zoodra CLAUSIUS had aangewezen, hoe de gasmoleculen niet alleen tegen een vreemd lichaam, maar ook zeer dikwijls tegen elkander botsen, verviel dit bezwaar en moest de mogelijkheid eener verklaring worden toegegeven. Later werden dan ook door verschillende natuurkundigen de vragen behandeld: Wat is bij de nieuwe theorie het mechanisme der geluidsbeweging, m. a. w. hoe gedragen zich daarbij de gasmoleculen, en welke betrekking bestaat er tusschen de geluidssnelheid V en de gemiddelde snelheid V' der moleculen?

STEFAN †) en ROITI §) beproefden, zonder over de eerste

*) POGG. *Ann.* Bd. 108.
†) POGG. *Ann.* Bd. 118.
§) Atti della R. Accad. dei Lincei (3) I.

vraag in uitvoerige bijzonderheden te treden, de tweede te beantwoorden De eerste natuurkundige vond $\frac{V}{V'} = \sqrt{\frac{1}{3}}$, de laatste achtereenvolgens $\frac{V}{V'} = \frac{1}{2}$ en $= \frac{2}{3}$, geene van welke uitkomsten in het algemeen met de ervaring in overeenstemming is. ROITI heeft later getracht eene betere uitkomst te verkrijgen, door aan te nemen, dat bij de geluidsbeweging de moleculen zich niet meer gelijkelijk naar alle richtingen bewegen, maar eene grondige uiteenzetting van de reden, waarom dit zoo zijn moet, heb ik in het uittreksel *) uit zijne verhandeling, dat mij toegankelijk was, te vergeefs gezocht.

Een antwoord op de eerste der beide bovengenoemde vragen werd gegeven door TOLVER PRESTON †). Daar hij zich intusschen tot zeer elementaire beschouwingen bepaalt, is hij niet in staat, de waarde van V te berekenen. Hij vermeldt alleen, dat MAXWELL voor een eenatomig gas, waarbij de moleculen als veerkrachtige bollen beschouwd worden, voor $\frac{V}{V'}$ de waarde $\frac{\sqrt{5}}{3}$ heeft verkregen, die blijkens de proeven van KUNDT en WARBURG §) met kwikdamp juist is.

Eene poging van Dr. HOORWEG **), tot wiskundige behandeling van het vraagstuk kan m. i. niet als geslaagd beschouwd worden. Door den Heer RINK ††) zijn verschillende bezwaren tegen zijne ontwikkelingen aangevoerd; hier moge de opmerking genoeg zijn, dat HOORWEG in werkelijkheid alleen de vergelijking der continuiteit uit de theorie heeft afgeleid. Zijne overige vergelijkingen verkrijgt hij door eerst, naar 't mij voorkomt zonder voldoende bewijs. eene integraalvergelijking op te stellen in den vorm, dien zij ook in de oude geluidstheorie aanneemt §§).

---

*) POGG *Ann.* Beibl. Bd. 2.

†) *Phil. Mag.* (5) III.

§) POGG. *Ann.* Bd. 157.

**) *Archives Neerlandaises*, T. 11.

††) *Arch. Neerl.* T. 12.

§§) l. a. p., pp. 139, 140.

De Heer RINK zelf komt tot het besluit, dat de gevolgtrekkingen uit de kinetische gastheorie niet in overeenstemming zijn met hetgeen bij de geluidsbeweging wordt waargenomen. Op de redeneeringen, die hem tot deze conclusie geleid hebben, kom ik later terug.

Terwijl aldus de genoemde natuurkundigen geene bevredigende verklaring van de geluidsbeweging hebben geleverd, werd door MAXWELL, ofschoon hij zich niet opzettelijk daarmede bezig hield, de weg aangewezen, waarop die verklaring moet worden gezocht. In zijne tweede verhandeling *) over de theorie der gassen heeft hij n. l. de *bewegingsvergelijkingen* voor deze lichamen afgeleid en dit is natuurlijk ter verklaring van de geluidsbeweging volkomen voldoende. Zoolang MAXWELL geene bijzondere onderstelling omtrent de onderlinge werking der gasmoleculen invoert, verkrijgt hij intusschen de bewegingsvergelijkingen slechts in een algemeenen, voor toepassing onvoldoenden vorm †); zij bevatten n. l. de componenten der drukking zonder dat deze als afhankelijk van de dichtheid, temperatuur en beweging van het gas zijn voorgesteld. Om dit laatste te doen wordt van de hypothese gebruik gemaakt, dat de moleculen elkander afstooten met eene kracht, omgekeerd evenredig met de vijfde macht van den afstand. Daar men deze onderstelling bezwaarlijk als juist kan aanmerken is het wenschelijk, de bewegingsvergelijkingen onafhankelijk daarvan af te leiden. Wordt deze wijziging aangebracht, dan laten de beschouwingen van MAXWELL nog slechts voor meeratomige gassen iets aan strengheid te wenschen over.

Ik heb daarom beproefd ook voor zulke gassen de bewegingsvergelijkingen zonder bijzondere onderstellingen over de onderlinge werking der moleculen af te leiden. Wil men slechts in hoofdtrekken eene verklaring der geluidsbeweging geven, dan kan men zich tot oneindig kleine verstoringen van den evenwichtstoestand bepalen en van de werking van uitwendige krachten, alsmede van de inwendige wrijving en de warmtegeleiding afzien. Met het oog op andere toepassingen der

*) *Phil. Mag.* (4) XXXV.

†) t. a. p. p. 198.

bewegingsvergelijkingen heb ik echter van het begin af het bestaan van uitwendige krachten en van eindige verstoringen aangenomen en later ook de wrijving en warmtegeleiding in rekening gebracht.

---

§ 1. Afleiding der grondvergelijking.

Om de moleculaire bewegingen van meeratomige gassen wiskundig te behandelen, zullen wij den weg inslaan, die door BOLTZMANN *) is aangewezen; het eigenlijke onderwerp van het onderzoek is daarbij de wijze, waarop de verschillende bewegingstoestanden over de verschillende moleculen verdeeld zijn.

Zal men dien toestand voor eene molecule — die wij ons buiten den invloed der overige denken — kunnen aangeven, dan moet men voor elken tijd t vooreerst de componenten ξ, η, ζ kennen der snelheid van haar zwaartepunt volgens drie onderling loodrechte assen; ten tweede de relatieve coördinaten van elk der stoffelijke punten, waaruit de molecule is samengesteld, ten opzichte van haar zwaartepunt. Kende men nu de samenstelling der molecule en de krachten, die hare bestanddeelen op elkander uitoefenen, dan zou men de differentiaalvergelijkingen kunnen opstellen voor de relatieve beweging der bestanddeelen: vergelijkingen, die geheel onafhankelijk zijn van de op het gas werkende uitwendige krachten, wanneer deze, zooals wij zullen aannemen, aan alle bestanddeelen eener molecule dezelfde versnelling geven.

Kon men nu verder de genoemde bewegingsvergelijkingen integreeren, dan zouden al de relatieve coördinaten als functiën van t gevonden worden. In de aldus verkregen uitdrukkingen zouden een zeker aantal constanten optreden, die bepaald konden worden, wanneer men voor één oogenblik den onderlingen stand en de snelheden der bestanddeelen kende; wij zullen deze constanten de parameters der intramoleculaire beweging noemen.

Voor één daarvan zal men altijd de som E kunnen nemen van het arbeidsvermogen van plaats der bestanddeelen en van het arbeidsvermogen hunner relatieve beweging ten opzichte van

---

*) *Wiener Sitzungsber* 2te Abth., Bd. 63, p. 399, Bd. 66, p. 336.

het gemeenschappelijk zwaartepunt; de overige parameters zullen wij door p_1, p_2, . . . p_k aanduiden. Het is duidelijk, dat wanneer op eenig oogenblik t de grootheden ξ, η, ζ, E, p_1 . . . p_k voor eene molecule bekend zijn, haar bewegingstoestand geheel bepaald is en deze grootheden zijn het dan ook, die in het vervolg voor dat doel zullen gebezigd worden.

Zoo lang nu eene molecule zich buiten den invloed der andere beweegt, zullen alleen ξ, η, ζ door de uitwendige krachten veranderen, maar E, p_1, . . . p_k constant blijven. Anders is het, wanneer een deeltje A op zoo korten afstand van een ander komt, dat er eene wederkeerige werking plaats heeft. Wij zullen aannemen, dat na zeer korten tijd de moleculen wederom buiten elkanders invloed zijn gekomen en dat daarbij geene scheiding of uitwisseling van bestanddeelen heeft plaats gehad. Na deze ontmoeting of botsing kan men den bewegingstoestand van A weer op eene dergelijke wijze aangeven als vóór de ontmoeting; alleen zullen nu niet slechts ξ, η, ζ, maar ook E, p_1 . . . p_k andere waarden hebben verkregen.

Het gevolg der ontmoetingen moet nu zijn, dat de moleculen, in eenig deel der ruimte aanwezig, zeer verschillende bewegingstoestanden zullen hebben, die er volgens eene zekere wet over verdeeld zijn. Is de toestand van het gas van punt tot punt en van oogenblik tot oogenblik veranderlijk, dan zal ook de vorm dier wet van plaats en tijd afhangen. Wiskundig kan men dit op de volgende wijze uitdrukken. Zij $d\,l$ een volume-element bij het punt (x, y, z) gelegen en nemen wij aan, dat zich daarin nog een groot aantal deeltjes bevinden. Kiezen wij onder al de moleculen, die er op den tijd t in aanwezig zijn, eene bepaalde groep, namelijk diegene, waarvoor de snelheids-componenten van het zwaartepunt en de parameters der inwendige beweging resp. liggen tusschen de grenzen:

$$\xi \text{ en } \xi + d\,\xi,\ \ \eta \text{ en } \eta + d\,\eta,\ \ \zeta \text{ en } \zeta + d\,\zeta,\ \ E \text{ en } E + d\,E,$$
$$p_1 \text{ en } p_1 + d\,p_1,\ . . .\ p_k \text{ en } p_k + d\,p_k,$$

dan kan het aantal daarvan worden voorgesteld door:

$$F(\xi, \eta, \zeta, E, p_1, . . . p_k, x, y, z, t)\, d\,\lambda\, d\,l \quad . . . (1)$$

als

$$d\lambda = d\xi\, d\eta\, d\zeta\, dE\, dp_1 \ldots dp_k$$

is.

Is de hier ingevoerde functie F bekend, dan kent men volkomen den toestand van het gas en kan alle grootheden, die daarmede samenhangen, berekenen. Wenscht men b v. het geheele aantal moleculen in het element $d\,l$ te vinden, dan heeft men (1) te integreeren naar $\xi, \eta, \zeta, E, p_1, \ldots p_k$ over alle waarden van deze grootheden, die kunnen voorkomen. Duidt men zulk eene bewerking door een enkel integraalteeken aan, dan is dus het bedoelde aantal $N\,d\,l$, wanneer

$$N = \int F\, d\lambda$$

is.

Door eene dergelijke integratie kan men ook voor alle binnen $d\,l$ liggende moleculen de gemiddelde waarde vinden van eenige grootheid φ, die van den bewegingstoestand, dus van $\xi, \eta, \zeta, E, p_1, \ldots p_k$ afhangt. Zij is namelijk:

$$\frac{1}{N}\int F\, \varphi\, d\lambda.$$

Berekent men op deze wijze de gemiddelde waarden u, v, w van ξ, η, ζ, dan verkrijgt men de componenten der snelheid, die het element $d\,l$ in zijn geheel schijnt te bezitten en die wij de *stroomings-snelheid* kunnen noemen.

Om nu een middel ter bepaling van de functie F te vinden beschouwen wij op een bepaald oogenblik de groep deeltjes, waarvan (1) het aantal is, en volgen deze op hun weg gedurende een oneindig kleinen tijd $d\,t$. Zien wij daarbij voor een oogenblik van de botsingen af. Aangezien wij voor al de genoemde moleculen de snelheid (ξ, η, ζ) als gelijk kunnen beschouwen, kunnen wij ons voorstellen, dat eenvoudig het element $d\,l$ zich met behoud van vorm en grootte met die snelheid verschuift en dat de groep moleculen erin blijft liggen. Aan het einde van den tijd $d\,t$ zullen dus de deeltjes liggen in het element $d\,l$ aan het punt $(x + \xi\, d\,t,\ y + \eta\, d\,t,$

$z + \zeta\, d\, t$). De parameters der intramoleculaire beweging zijn onveranderd gebleven en liggen dus nog tusschen de vroeger aangegeven grenzen.

Maar tengevolge van de uitwendige krachten hebben de snelheidscomponenten van de zwaartepunten der moleculen zekere aangroeiingen ondergaan, welke wij voor al de beschouwde deeltjes gelijk kunnen stellen. Bepalen wij ons tot het geval, dat er eene krachtfunctie bestaat, dan kunnen wij de bedoelde aangroeiingen voorstellen door $\frac{\partial \psi}{\partial x} d\, t$, $\frac{\partial \psi}{\partial y} d\, t$, $\frac{\partial \psi}{\partial z} d\, t$, zoodat aan het einde van den tijd $d\, t$ de genoemde snelheden liggen tusschen de grenzen:

$$\xi + \frac{\partial \psi}{\partial x} d t \text{ en } \xi + \frac{\partial \psi}{\partial x} d t + d\, \xi,$$

$$\eta + \frac{\partial \psi}{\partial y} d t \;\;\text{"}\;\; \eta + \frac{\partial \psi}{\partial y} d t + d\, \eta,$$

$$\zeta + \frac{\partial \psi}{\partial z} d t \;\;\text{"}\;\; \zeta + \frac{\partial \psi}{\partial z} d t + d\, \zeta.$$

Zien wij thans wat het gevolg der botsingen zijn zal. Gedurende den tijd $d\, t$ zullen eenige moleculen van de beschouwde groep andere deeltjes ontmoeten en ten gevolge daarvan een nieuwen bewegingstoestand aannemen, dus uit de groep treden. Daarentegen zullen ook andere moleculen, die eerst niet tot de groep behoorden, tengevolge van botsingen zoodanige bewegingen verkrijgen, dat zij er deel van gaan uitmaken. Daar nu het aantal A der moleculen, die de groep verlaten en het aantal B van die, welke erin treden, in het algemeen niet even groot zijn, zal in het element $d\, l$ een aantal moleculen met den vereischten bewegingstoestand komen, dat $B—A$ grooter is dan het in (1) aangegevene.

Wanneer men de functie F en de onderlinge werking der moleculen kende, zou men de grootheid A kunnen berekenen. Strikt genomen zou men daarbij in aanmerking moeten nemen, dat het element $d\, l$, waarin de deeltjes liggen, gedurende den tijd $d\, t$ telkens in eene andere omgeving komt en eveneens, dat de snelheden van de moleculen der groep veranderen.

Houdt men echter in het oog, dat de grootheid A evenals dt oneindig klein is, dat verder zoowel de verandering in de omgeving van dl als ook de aangroeiing der snelheden eene oneindig kleine van dezelfde orde is, dan is het duidelijk, dat men den invloed dezer beide omstandigheden op A als oneindig klein van de tweede orde zal mogen verwaarloozen. M. a. w. om A te berekenen kan men zich eene gasmassa P denken, waarop geene uitwendige krachten werken en waarin de toestand overal dezelfde is als in het beschouwde gas in het punt (x, y, z) op den tijd t; A is dan het aantal botsingen in een vaststaand element dl van deze gasmassa, waarbij een der moleculen vóór de botsing een bewegingstoestand tusschen ξ en $\xi + d\xi$, enz. had. Natuurlijk is A met dl, $d\lambda$ en dt evenredig; stelt men $A = a\, dl\, d\lambda\, dt$, dan is $a\, d\lambda\, dt$ het aantal ontmoetingen van de genoemde soort, die in de ruimte-eenheid van P zouden plaats hebben. Stelt op dezelfde wijze $b\, d\lambda\, dt$ het aantal botsingen voor, waarbij een der deeltjes na de ontmoeting den boven bepaalden bewegingstoestand verkrijgt, dan is $B = b\, dl\, d\lambda\, dt$.

Uit het gezegde volgt, dat:

$$F(\xi, \eta, \zeta, E, p_1 \ldots p_k, x, y, z, t)\, d\lambda\, dl + (b - a)\, d\lambda\, dl\, dt \ldots (2)$$

het aantal moleculen zal zijn, die op den tijd $t + dt$ liggen in het element dl bij het punt $(x + \xi\, dt,\ y + \eta\, dt,\ z + \zeta\, dt)$ en waarvan de grootheden, die den bewegingstoestand bepalen, resp. liggen tusschen:

$$\xi + \frac{\partial \psi}{\partial x} dt \text{ en } \xi + \frac{\partial \psi}{\partial x} dt + d\xi, \text{ enz.}$$

$$E \text{ en } E + dE, \text{ enz.}$$

Aan den anderen kant zal men het aantal dezer deeltjes moeten verkrijgen, wanneer men in (1) ξ, η, ζ, x, y, z, t resp. de aangroeiingen $\frac{\partial \psi}{\partial x} dt$, $\frac{\partial \psi}{\partial y} dt$, $\frac{\partial \psi}{\partial z} dt$, $\xi\, dt$, $\eta\, dt$, $\zeta\, dt$, dt laat ondergaan. Stelt men de aldus verkregen uitdrukking aan (2) gelijk, dan komt er:

$$b - a = \frac{\partial F}{\partial \xi}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \eta}\frac{\partial \psi}{y} + \frac{\partial F}{\partial \zeta}\frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial x}\xi + \frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{\partial F}{\partial z}\zeta + \frac{\partial F}{\partial t} (I).$$

Daar, zoodra F bekend was, uit de beschouwing der botsingen a en b als functiën van $\xi, \ldots p_k, x, y, z, t$ zouden kunnen gevonden worden, kan men (I) beschouwen als eene vergelijking ter bepaling van F. Het is de grondvergelijking voor alle vraagstukken, die op de beweging der gasmoleculen betrekking hebben *).

---

§ 2. DE BEWEGINGSVERGELIJKINGEN IN HAAR ALGEMEENEN VORM.

Uit de grondvergelijking (I) kan men zonder bijzondere onderstellingen over de onderlinge werking der moleculen eenige gevolgen afleiden. Let men op de boven aangewezen beteekenis van $a\, d\, \lambda\, d\, t$, dan is het duidelijk, dat men door deze grootheid naar $\xi, \ldots p_k$ te integreeren het geheele aantal moleculen moet verkrijgen, die in de ruimte-eenheid van de gasmassa P gedurende den tijd $d\, t$ eene botsing ondergaan. Hetzelfde aantal wordt echter ook door de integratie van $b\, d\, \lambda\, d\, t$ verkregen; dus is:

$$\int (b - a)\, d\, \lambda = 0.$$

Uit het beginsel van de beweging van het massamiddelpunt volgt verder, dat wanneer men voor alle botsingen, die in den tijd $d\, t$ in de ruimteeenheid van P plaats hebben, eerst de som neemt der hoeveelheden van beweging in de richting der x-as van alle moleculen vóór de botsingen, vervolgens dezelfde som voor alle moleculen, nadat zij de botsing ondergaan hebben, dezelfde uitkomst moet verkregen worden. Is m de massa eener molecule, dan is de eerste som $m\, d\, t \int a\, \xi\, d\, \lambda$, de laatste $m\, d\, t \int b\, \xi\, d\, \lambda$, zoodat $\int (b - a)\, \xi\, d\, \lambda = 0$

---

*) De vergelijking (I) komt overeen met de vergelijking (44) in BOLTZMANN's Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gasmolekülen (*Wiener Sitzungsber.*, 2te Abth., Bd. 66).

moet zijn, terwijl natuurlijk eveneens:

$$\int (b-a)\,\eta\, d\lambda = \int (b-a)\,\zeta\, d\lambda = 0 \text{ is.}$$

Iets dergelijks volgt eindelijk nog uit het beginsel van het behoud van arbeidsvermogen. Stelt men $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = r^2$, dan is het arbeidsvermogen eener molecule $\frac{1}{2} m r^2 + E$ en heeft men de vergelijking:

$$\int (b-a)\left(\frac{1}{2} m r^2 + E\right) d\lambda = 0.$$

Door dus het tweede lid van (I) met eene der grootheden $d\lambda$, $\xi\, d\lambda$, $\eta\, d\lambda$, $\zeta\, d\lambda$, $\left(\frac{1}{2} m r^2 + E\right) d\lambda$ te vermenigvuldigen en vervolgens naar ξ, η, ζ . . . p_k te integreeren, moet men 0 verkrijgen.

Om de vijf hieruit voortvloeiende vergelijkingen een korteren vorm te doen aannemen voeren wij behalve de stroomingssnelheden u, v, w nog de volgende grootheden in:

$$\left.\begin{array}{l}
\int F\xi^2 d\lambda = P_x, \quad \int F\eta^2 d\lambda = P_y, \quad \int F\zeta^2 d\lambda = P_z; \\
\int F\xi\eta\, d\lambda = Q_{x,y}, \int F\eta\zeta\, d\lambda = Q_{y,z}, \int F\zeta\xi\, d\lambda = Q_{z,x}; \\
\qquad \int F\left(\frac{1}{2} m r^2 + E\right) d\lambda = R; \\
\int F\xi\left(\frac{1}{2} m r^2 + E\right) d\lambda = S_x, \int F\eta\left(\frac{1}{2} m r^2 + E\right) d\lambda = S_y, \\
\qquad \int F\zeta\left(\frac{1}{2} m r^2 + E\right) d\lambda = S_z .
\end{array}\right\} \ldots (3)$$

Om met behulp van deze grootheden — natuurlijk zijn zij nog functiën van x, y, z, t — de vijf vergelijkingen te kunnen neêrschrijven, moet men bij die termen, welke eene der grootheden $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$, $\frac{\partial F}{\partial t}$ bevatten, in het oog houden, dat

x, y, z, t bij de integratie naar ξ, ... p_t als standvastige parameters te beschouwen zijn en dat dus b. v.:

$$\int \frac{\partial F}{\partial x} \xi^2 \, d\lambda = \frac{\partial}{\partial x}\left[\int F \xi^2 \, d\lambda\right] = \frac{\partial P_x}{\partial x}$$

is. De waarde daarentegen van die integralen, welke $\frac{\partial F}{\partial \xi}$, $\frac{\partial F}{\partial \eta}$ of $\frac{\partial F}{\partial \zeta}$ bevatten, kan door partieele integratie worden gevonden, waarbij dan in aanmerking moet genomen worden, dat F voor oneindig groote waarden van ξ, η of ζ verdwijnt; immers moleculen met zeer groote snelheden zullen in elk geval zeer weinig voorkomen. Aldus wordt b. v.

$$\int \frac{\partial F}{\partial \xi}\left(\frac{1}{2} m r^2 + E\right) d\lambda = -\int F \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{2} m r^2 + E\right) d\lambda = -m N u.$$

De vijf gezochte vergelijkingen nemen ten slotte den volgenden vorm aan:

$$\frac{\partial (N u)}{\partial x} + \frac{\partial (N v)}{\partial y} + \frac{\partial (N w)}{\partial z} + \frac{\partial N}{\partial t} = 0, \ldots\ldots (a_1)$$

$$\left.\begin{aligned}
&-N\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_{x,y}}{\partial y} + \frac{\partial Q_{z,x}}{\partial z} + \frac{\partial (N u)}{\partial t} = 0,\\
&-N\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial Q_{x,y}}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial Q_{y,z}}{\partial z} + \frac{\partial (N v)}{\partial t} = 0,\\
&-N\frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial Q_{z,x}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{y,z}}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z} + \frac{\partial (N w)}{\partial t} = 0,
\end{aligned}\right\} \ldots (b_1)$$

$$-mN\left(u\frac{\partial \psi}{\partial x} + v\frac{\partial \psi}{\partial y} + w\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) + \frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{\partial S_y}{\partial y} + \frac{\partial S_z}{\partial z} + \frac{\partial R}{\partial t} = 0, \ldots (c_1)$$

Elke term dezer vergelijkingen heeft eene zeer eenvoudige beteekenis en men had ze dan ook rechtstreeks kunnen opstellen. Zoo drukt b. v. (c_1) uit, hoe het arbeidsvermogen binnen een vaststaand volumeelement $dx\,dy\,dz$ verandert. Dat arbeidsvermogen is $R\,dx\,dy\,dz$ en het kan slechts veranderen

door den invloed der uitwendige krachten, die door den term $-mN\left(u\frac{\partial\psi}{\partial x}+v\frac{\partial\psi}{\partial y}+w\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)$ wordt voorgesteld, en door het in- en uittreden van arbeidsvermogen door de zijvlakken van het element, hetgeen de termen $\frac{\partial S_x}{\partial x}$, $\frac{\partial S_y}{\partial y}$ en $\frac{\partial S_z}{\partial z}$ in (c_1) oplevert.

Op eene dergelijke wijze geven (a_1) en (b_1) de verandering van het aantal moleculen en van de hoeveelheid van beweging binnen een vaststaand volumeelement.

Eenige eenvoudige herleidingen zijn voldoende, om te doen zien, dat de vergelijking (a_1) overeenkomt met de welbekende vergelijking der continuiteit en dat de betrekkingen (b_1) beantwoorden aan de vergelijkingen, die in de algemeene theorie der inwendige bewegingen van eenig lichaam de versnelling van een element voorstellen als afhankelijk van de uitwendige krachten en van de normale en tangentiale drukkingen of spanningen. Onderzoekt men deze overeenstemming verder, dan blijkt het, dat b. v. de componenten der drukking op een vlak loodrecht op de x-as, zooals zij in de genoemde theorie worden ingevoerd, overeenkomen met de grootheden $m(P_x - Nu^2)$, $m(Q_{x,y} - Nuv)$, $m(Q_{z,x} - Nwu)$.

---

§ 3. Eerste benadering. Verwaarloozing der inwendige wrijving en warmtegeleiding.

Om de vergelijkingen (a_1), (b_1) en (c_1) voor de oplossing van vraagstukken over de beweging der gassen geschikt te maken, moeten wij de waarden der grootheden P_x enz. zoeken. Daartoe is eene nadere beschouwing van de functie F noodzakelijk.

Het eenvoudigste geval, dat zich kan voordoen, is dat van eene homogene gasmassa, waarop geene uitwendige krachten werken, en die in een stationnairen toestand verkeert, waarbij zij in haar geheel in rust is. De functie F zal dan natuurlijk onafhankelijk van x, y, z zijn. Zij zal ook t niet be-

vatten, wanneer wij eene bepaalde onderstelling maken. Wij zullen namelijk aannemen, dat, wanneer van eenig oogenblik af de botsingen ophielden en elke molecule aan zich zelve werd overgelaten, de toestand stationnair zou blijven *), m. a. w., dat de botsingen voor het onderhouden van den stationnairen toestand (als hij eens bestaat) niet noodig zijn, dat zij integendeel niets aan den toestand veranderen. Daar nu, wanneer er geene botsingen plaats hadden, F niet met den tijd zou veranderen moet dit ook zoo zijn als er wel botsingen geschieden.

Met de bepaling dezer van x, y, z, t onafhankelijke functie F hebben zich MAXWELL en BOLTZMANN bezig gehouden. Wij zullen intusschen van den vorm, dien zij voor de functie gevonden hebben, geen gebruik maken. Slechts dit merken wij op, dat F, zoo als BOLTZMANN heeft aangetoond, ondubbelzinnig bepaald is, wanneer men de dichtheid en de temperatuur kent, m. a. w. wanneer het aantal moleculen N in de ruimteeenheid en het gemiddeld snelheidsquadraat h zijn gegeven. Deze beide grootheden moeten dus in F als parameters voorkomen, de eerste natuurlijk als factor, zoodat wij mogen stellen:

$$F = N F_o (\xi, \eta, \zeta, E, p_1 \ldots . p_k, h) \; .$$

Daarbij is dan:

$$\int F_o d\lambda = 1, \int F_o \xi d\lambda = \int F_o \eta d\lambda = \int F_o \zeta d\lambda = 0, \int F_o r^2 d\lambda = h \ldots (4).$$

In den vorm der functie F_o moet natuurlijk de eigenschap zijn uitgedrukt, dat in den stationnairen toestand, dien wij hier beschouwen, de moleculen zich naar alle richtingen

*) Dit spreekt niet van zelf. Daar toch elke molecule door hare inwendige beweging telkens in een anderen toestand, of zoo als men ook zeggen kan, in eene andere phase van beweging komt, kon zeer goed de toestand van het gas door de inwendige bewegingen veranderen. Alleen dan zou dit niet het geval zijn, wanneer er op elk oogenblik steeds vele moleculen zijn, die geheel *gelijke* inwendige bewegingen hebben, maar in allerhande verschillende phasen verkeeren, en dat wel zoo, dat wanneer eenige moleculen uit eene phase A in eene andere overgaan even veel anderen de phase A verkrijgen

gelijkelijk bewegen en dat ook bij eene bepaalde bewegingsrichting de intramoleculaire bewegingen naar alle zijden rondom die richting gelijkelijk plaats hebben. Wij mogen hieruit intusschen niet besluiten, dat F_0 behalve van $E, p_1 \ldots p_k$ nog slechts van r afhangt. Was dit toch het geval, dan zouden bij twee verschillende bewegingsrichtingen even veel moleculen voorkomen met eene zelfde inwendige beweging *ten opzichte van de coördinaatassen* (immers de relatieve coördinaten van de bestanddeelen eener molecule ten opzichte van haar zwaartepunt, die door $E, p_1 \ldots p_k$ bepaald worden, werden genomen met betrekking tot de eens voor al vastgestelde coördinaatassen). Dit nu behoeft volstrekt niet het geval te zijn; het eenige, wat wij met zekerheid kunnen zeggen, is dit, dat bij twee verschillende bewegingsrichtingen even veel moleculen voorkomen, die eene bepaalde inwendige beweging, *telkens met betrekking tot de bewegingsrichting*, hebben.

Wanneer wij ter bepaling van de inwendige beweging eener molecule een coördinatenstelsel hadden aangenomen, dat een bepaalden en steeds denzelfden stand had ten opzichte van de bewegingsrichting der molecule, zou F_0 behalve van $E, p_1, \ldots p_k$ alleen van r afhangen. Maar wij hadden dan het bezwaar gehad, dat, zoodra door de werking van uitwendige krachten de bewegingsrichting veranderde, ook het coördinatenstelsel der molecule een anderen stand zou verkrijgen. Bovendien zouden wij, aldus handelende, niet gemakkelijk den vorm van F kunnen aangeven voor het geval, dat het gas niet in rust is.

Bij de methode, die wij thans ter bepaling van de inwendige bewegingen gekozen hebben, kan men onmiddellijk aangeven, wat er van F wordt, wanneer het gas in eene stroomende beweging verkeert met de *overal even groote* snelheidscomponenten u, v, w. Kent men deze namelijk aan het gas toe, dan veranderen de parameters der inwendige beweging niet en men verkrijgt:

$$F = N\, F_0\, (\xi - u,\ \eta - v,\ \zeta - w,\ E,\ p_1, \ldots p_k,\ h) \ldots (5).$$

Daarbij is thans h het gemiddelde snelheidsquadraat, wanneer men van de snelheid (u, v, w) afziet; het ware snelheidsquadraat is $u^2 + v^2 + w^2 + h$. De waarde (5) maakt,

zoowel als de waarde van F voor het geval van rust, beide leden der grondvergelijking $= 0$.

Voor elken anderen dan dezen eenvoudigen bewegingstoestand kunnen wij nu het vraagstuk op de volgende wijze opvatten. In elk punt en op elk oogenblik zullen de grootheden N, u, v, w bepaalde waarden hebben en kunnen wij h zoo kiezen, dat $u^2 + v^2 + w^2 + h$ het gemiddelde snelheidsquadraat der moleculen in de nabijheid van dat punt is. Dan zijn in het algemeen N, u, v, w, h functiën van x, y, z, t. Waren zij constant, dan zou de vergelijking (5) gelden; thans is dit niet meer het geval. Wij stellen dus:

$$F = NF_0(\xi-u, \eta-v, \zeta-w, E, p_1, .. p_k, h) + f(\xi, \eta, \zeta, E, p_1, .. p_k, x, y, z, t) \,. \quad (6)$$

en moeten nu trachten f te bepalen. Daartoe hebben wij in de eerste plaats de grondvergelijking, ten tweede de uit het bovenstaande onmiddellijk volgende betrekkingen:

$$\int f d\lambda = \int f \xi d\lambda = \int f \eta d\lambda = \int f \zeta d\lambda = \int f r^2 d\lambda = 0 \ldots (7).$$

Wij zullen nu bij het verdere onderzoek aannemen, dat aan de volgende voorwaarden voldaan is:

α. Het verschil in den toestand van het gas (d. w. z. in de functie F) in twee punten, wier onderlinge afstand gelijk is aan den gemiddelden weg ϱ eener molecule tusschen twee achtereenvolgende ontmoetingen, is zeer klein, vergeleken met de totale afwijking van den evenwichtstoestand.

β. Hetzelfde geldt van de verandering, die de toestand in een zelfde punt ondergaat gedurende den tijd, die er tusschen twee achtereenvolgende botsingen van een deeltje verloopt.

γ. De verandering in snelheid, die eene molecule tusschen twee botsingen door de uitwendige krachten ondergaat, is zeer klein vergeleken met de snelheid zelve.

Zullen de voorwaarden α en β bij de vrije geluidsbeweging vervuld zijn, dan moet de golflengte zeer groot zijn ten opzichte van den gemiddelden vrijen weg ϱ der moleculen.

Aan γ wordt door de zwaartekracht klaarblijkelijk voldaan.

Uit α, β en γ kan men nu afleiden, dat f in (6) zeer klein is, vergeleken met $N F_0$. Beschouwen wij daartoe de grootte der in de grondvergelijking optredende termen.

Vooreerst van het voorste lid. Laat a_0 en b_0 de (gelijke) waarden zijn, die a en b aannemen, als men voor F de waarde (5) stelt en laat $a_0 + a_1$, $b_0 + b_1$ de waarden zijn, die aan (6) beantwoorden, dan wordt het eerste lid der grondvergelijking $b_1 — a_1$.

Wanneer het gas in den toestand (5) verkeert, zullen de deeltjes, wier toestand binnen de vroeger aangegeven grenzen ligt en waarvan (in de ruimteeenheid) $N F_0 \, d \lambda$ het aantal is, van eenig oogenblik af gemiddeld een zekeren weg s afleggen, vóór zij een ander deeltje ontmoeten. Door eene wel bekende berekening vindt men, dat het aantal der deeltjes van de genoemde groep, die reeds gedurende den tijd $d t$ eene botsing ondergaan, wordt voorgesteld door $\frac{r}{s} N F_0 \, d \lambda \, d t$. Dus is $a_0 = \frac{r}{s} N F_0$. Daar nu r van dezelfde orde is als de gemiddelde snelheid V' van de warmtebeweging en s van dezelfde orde als de in α genoemde grootheid ϱ, is a_0 van de orde $\frac{V'}{\varrho} N F_0$.

Verder stelt a_1 de aangroeiing van a voor, wanneer de toestand van het gas de in (6) door f aangewezen verandering ondergaat. Derhalve is a_1 van de orde $a_0 \frac{f}{N F_0}$, of van de orde $\frac{V'}{\varrho} f$ en hetzelfde zal ook van b_1 gelden.

In het tweede lid der grondvergelijking treden vooreerst eenige termen op van f in (6) afkomstig.

Uit het zooeven omtrent a_1 en b_1 afgeleide volgt echter, dat de termen $\frac{\partial f}{\partial x} \xi$, $\frac{\partial f}{\partial y} \eta$, $\frac{\partial f}{\partial z} \zeta$ krachtens α, de term $\frac{\partial f}{\partial t}$ krachtens β en de termen $\frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \psi}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \psi}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial \zeta} \frac{\partial \psi}{\partial z}$ tengevolge van γ ten opzichte van a_1 en b_1 mogen verwaarloosd worden. Om

dit laatste in te zien houde men in het oog, dat de grootheden $\frac{\partial f}{\partial \xi}, \frac{\partial f}{\partial \eta}, \frac{\partial f}{\partial \zeta}$ in het algemeen van de orde $\frac{f}{V'}$ zullen zijn.

Wij hebben derhalve in het tweede lid van (I) slechts de termen te behouden, welke van $N F_o$ in (6) afkomstig zijn. De vergelijking wordt:

$$b_1 - a_1 = N \frac{\partial F_o}{\partial \xi} \frac{\partial \psi}{\partial x} + N \frac{\partial F_o}{\partial \eta} \frac{\partial \psi}{\partial y} + N \frac{\partial F_o}{\partial \zeta} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \\ + \frac{\partial (N F_o)}{\partial x} \xi + \frac{\partial (N F_o)}{\partial y} \eta + \frac{\partial (N F_o)}{\partial z} \zeta + \frac{\partial (N F_o)}{\partial t} \ldots \text{(II)}.$$

Steeds heeft men hier onder F de functie F_o ($\xi - u, \ldots.$) te verstaan.

Uit deze vergelijking moet nu f zoo bepaald worden, dat tevens aan de voorwaarden (7) voldaan wordt. Daar nu, wanneer er geene uitwendige krachten werken en het gas overal in denzelfden toestand verkeert, de door (5) aangegeven toestandsverdeeling de eenig mogelijke is, zal ook, wanneer het tweede lid van (II) 0 is, $f = 0$ de eenig mogelijke oplossing van (II) en (7) zijn. Met f zouden echter ook a_1 en b_1 *elk afzonderlijk* 0 worden. Hieruit volgt, dat wanneer het tweede lid van (II) eene *kleine* waarde heeft (en dit is ten gevolge van α, β, γ werkelijk het geval) niet alleen het verschil $b_1 - a_1$, maar ook a_1 en b_1 ieder op zich zelf eene kleine waarde van dezelfde orde moeten hebben. Aangezien nu a_1 en b_1 van de orde $\frac{V'}{\varrho} f$ zijn, is f zelf van de orde:

$$\frac{\varrho}{V'} \left\{ N \frac{\partial F_o}{\partial \xi} \frac{\partial \psi}{\partial x} + N \frac{\partial F_o}{\partial \eta} \frac{\partial \psi}{\partial y} + N \frac{\partial F_o}{\partial \zeta} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial (N F_o)}{\partial x} \xi + \right. \\ \left. + \frac{\partial (N F_o)}{\partial y} \eta + \frac{\partial (N F_o)}{\partial z} \zeta + \frac{\partial (N F_o)}{\partial t} \right\}, \ldots \ldots \ldots (8)$$

dus tengevolge van α, β en γ zeer klein ten opzichte van $N F_o$, zooals wij wenschten te bewijzen.

Beschouwen wij nu in het vervolg f als *oneindig klein* ten opzichte van $N F_o$, dan worden ook a_1 en b_1 oneindig klein ten opzichte van a_o en b_o. Bestaat dus f uit verschillende

deelen, dan zal de waarde, die het eerste lid der grondvergelijking verkrijgt, de som zijn van de waarden, die het zou aannemen, wanneer men voor f achtereenvolgens elk der bedoelde deelen nam. Onmiddellijk volgt hieruit, dat wanneer het tweede lid van (II) in verschillende stukken gesplitst wordt, en wanneer het gelukt, waarden van f te vinden, die $b_1 - a_1$ gelijk maken aan elk dier deelen en daarbij tevens aan (7) voldoen, de som dier uitkomsten de werkelijke waarde van f zal zijn. Wij zullen dit in § 5 herhaaldelijk toepassen.

Voor één bijzonder geval zullen wij reeds dadelijk de functie f nader beschouwen. Laat nl. het gas aan de zwaartekracht onderworpen en tusschen twee rustende horizontale wanden besloten zijn, waarmede het geene warmte kan uitwisselen. Het is duidelijk, dat dan een stationnaire toestand mogelijk is, waarbij u, v, w overal 0 zijn, terwijl, wanneer wij de x-as verticaal naar beneden kiezen, N en misschien ook h van x zal afhangen.

In dit geval is de eerste term in (6) $N F_o(\xi, \eta, \zeta, E, \ldots h)$ en de vergelijking (II) gaat over in:

$$b_1 - a_1 = g N \frac{\partial F_o}{\partial \xi} + \frac{dN}{dx} F_o \xi + N \frac{dh}{dx} \frac{\partial F_o}{\partial h} \xi, \quad \ldots \quad (9)$$

waarbij g de gewone beteekenis heeft.

Men kan nu aantoonen, dat de uit (9) en (7) volgende waarde van f alleen voor de integraal:

$$S_x = \int F \xi \left(\frac{1}{2} m r^2 + E \right) d \lambda$$

eene bijdrage kan opleveren, maar niet voor de overige grootheden P_x, P_y, P_z, $Q_{x,y}$, $Q_{y,z}$, $Q_{z,x}$, R, S_y, S_z.

Om dit te bewijzen maken wij gebruik van het volgende hulpmiddel, dat ook later bij dergelijke vragen van dienst zal kunnen zijn.

Laat in eene gasmassa, waarop uitwendige krachten werken, geheel willekeurige bewegingen plaats hebben. Wij kunnen ons dan eene tweede gasmassa denken, die steeds op elk oogenblik het spiegelbeeld is van de eerste ten opzichte van een vast plat vlak; de bewegingen, die daartoe in die tweede gas-

massa moeten plaats hebben, zullen werkelijk kunnen geschieden, wanneer ten minste de bestanddeelen slechts centrale krachten op elkander uitoefenen en wanneer de uitwendige krachten, die op het tweede gas werken, juist het spiegelbeeld zijn van de bij het eerste voorkomende. Is het vlak, ten opzichte waarvan men het spiegelbeeld heeft genomen, evenwijdig aan het yz-vlak en behouden wij bij het spiegelbeeld dezelfde richting voor de positieve assen als bij het oorspronkelijke gas, dan blijkt het uit de beteekenis der grootheden N, v, w, P_x, P_y, P_z, $Q_{y,z}$, R, S_y, S_z, dat deze in twee correspondeerende punten van de twee gasmassa's dezelfde waarde en hetzelfde teeken moeten hebben, terwijl daarentegen u, $Q_{x,y}$, $Q_{x,z}$, S_x in die punten wel gelijke waarden, maar tegengestelde teekens zullen hebben.

Beschouwen wij nu op deze wijze het spiegelbeeld van de gasmassa, waarmede wij ons straks bezig hielden. In eenig punt van het spiegelbeeld zal N en klaarblijkelijk ook de functie F_0 hetzelfde zijn als in het overeenkomstige punt van de oorspronkelijke gasmassa, maar $\frac{dN}{dx}$ en $\frac{dh}{dx}$ zullen in de beide punten tegengestelde teekens hebben. Ook g zal voor het tweede gas door $-g$ vervangen moeten worden, daar hier de uitwendige kracht naar boven moet gericht zijn. Derhalve heeft in het spiegelbeeld het tweede lid van (9) juist het tegengestelde teeken als in het oorspronkelijke gas en hetzelfde zal dan ook van f moeten gelden en van de bijdragen, die f voor P_x, enz. oplevert. Die bijdragen moeten dus 0 zijn voor alle grootheden, die zooals P_x in beide gassen hetzelfde teeken moeten hebben, zoodat slechts de grootheden u, $Q_{x,y}$, $Q_{x,z}$, S_x overblijven. Maar de eerste is uitgesloten door (7) en dat voor $Q_{x,y}$, $Q_{x,z}$ door f niets kan worden opgeleverd kan bewezen worden, wanneer men het gas vergelijkt met zijn spiegelbeeld ten opzichte van een vlak, dat loodrecht op de y- of de z-as staat. Derhalve blijft slechts voor S_x eene bijdrage over.

Bij de berekening der andere grootheden P_x enz. kan men zich nu tot den eersten term van (6), hier $N F_0$ (ξ, η, ζ, E, $p_1 \ldots p_k$, h bepalen. Daar klaarblijkelijk $\int F_0 \, \xi^3 \, d\lambda =$

$= \int F_0 \eta^2 \, d\lambda = \int F_0 \zeta^2 \, d\lambda$ is, wordt elke dier grootheden $= \frac{1}{3} \int F_0 r^2 \, d\lambda = \frac{1}{3} h$, dus $P_x = P_y = P_z = \frac{1}{3} N h$. $Q_{x,y}$, $Q_{y,z}$, $Q_{z,x}$ worden 0, zooals uit de beschouwing der spiegelbeelden volgt en de bewegingsvergelijkingen geven:

$$- N g + \frac{1}{3} \frac{\partial (N h)}{\partial x} = 0,$$

$$S_x = \text{const.}$$

Zal intusschen de toestand werkelijk stationnair zijn, zonder dat het gas van den eenen wand warmte opneemt, aan den anderen afgeeft, dan moet S_x niet alleen constant, maar 0 zijn, want $N S_x$ is het arbeidsvermogen, dat door de eenheid van eenig horizontaal vlak in de tijdseenheid meer naar beneden dan naar boven gaat. MAXWELL en BOLTZMANN hebben aangetoond, dat in dien stationnairen toestand de temperatuur op elke hoogte dezelfde moet zijn. Stelt men h constant, dan wordt:

$$- N g + \frac{1}{3} h \frac{\partial N}{\partial x} = 0,$$

$$b_1 - a_1 = N g \left(\frac{\partial F_0}{\partial \xi} + \frac{3}{h} \xi F_0 \right),$$

en het tweede lid dezer vergelijking wordt werkelijk $= 0$ (en daarmede ook f en S_x) zoodra F_0 den vorm heeft, dien de genoemde natuurkundigen ervoor gevonden hebben.

Overigens, ook onafhankelijk van den vorm van F_0, kunnen wij dit vaststellen, dat, wanneer slechts de tweede wet der mechanische warmtetheorie juist is, in den stationnairen toestand van een gas, waarop de zwaartekracht werkt, de temperatuur op elke hoogte dezelfde moet zijn. Wordt dit aangenomen, dan volgt er onmiddellijk uit, dat de waarde van f, die aan de laatste vergelijking beantwoordt, geene bijdrage voor S_x — en dus voor geene der grootheden P_x, enz. — kan opleveren.

Evenals het hier beschouwde geval kan men ook dat behan-

deelen, waarin op een gas eene standvastige kracht in de richting der y — of z-as werkt. Aldus komen wij tot het resultaat, dat zoodra in het tweede lid van (II) eene der grootheden $\frac{\partial F_0}{\partial \xi} + \frac{3}{h} F_0 \xi$, $\frac{\partial F_0}{\partial \eta} + \frac{3}{h} F_0 \eta$, $\frac{\partial F_0}{\partial \zeta} + \frac{3}{h} F_0 \zeta$, met een constanten factor vermenigvuldigd, optreedt, wij die verder geheel buiten beschouwing kunnen laten.

Uit het bovenstaande kan men verder nog afleiden, dat ook wanneer willekeurige uitwendige krachten op een gas werken, mits er slechts eene krachtfunctie voor bestaat, een stationnaire toestand met overal gelijke temperatuur mogelijk is en dat ook dan uit f voor geene der grootheden P_x, enz. eene bijdrage volgt. Het verband tusschen de dichtheid en de coördinaten wordt daarbij bepaald door:

$$N = \text{const. } e^{\frac{3}{h} \psi}.$$

Keeren wij thans tot het meest algemeene geval der beweging van een gas terug. In de onderstelling, dat aan de voorwaarden α, β, γ voldaan is, hebben wij reeds in de uitdrukking (8) gevonden, van welke orde de functie f is. Wij kunnen er nu nog bijvoegen, dat wij ons niet hebben bezig te houden met het deel van f, dat aan den evenwichtstoestand van het gas beantwoordt, maar slechts met het deel, behoorende bij de afwijkingen van dien toestand. Wanneer wij dus met $(N F_0)_e$ de waarde van de functie $N F_0$ voor den evenwichtstoestand aanduiden, en $N F_0 - (N F_0)_e = \chi$ stellen, is f, voor zoover deze grootheid in aanmerking komt, van de orde:

$$\frac{\varrho}{V} \left\{ \frac{\partial \chi}{\partial \xi} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial \eta} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \chi}{\partial \zeta} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial \chi}{\partial x} \xi + \frac{\partial \chi}{\partial y} \eta + \frac{\partial \chi}{\partial z} \zeta + \frac{\partial \chi}{\partial t} \right\},$$

dus ten gevolge van α, β, γ zeer klein ten opzichte van χ, d. w. z. ten opzichte van de verstoring van den evenwichtstoestand. Wij zullen daarom bij eene eerste benadering in (6) f kunnen weglaten en dus bij de berekening van de grootheden P_x, enz mogen aannemen, dat de toestandsverdeeling in eenig punt dezelfde is, alsof overal in het gas en voortdurend u, v, w, N, h dezelfde waarde hadden als in dat punt. Ik doe

nog opmerken, dat, om dit te mogen doen, bewezen moest worden, dat f zeer klein is ten opzichte van $N F_o - (N F_o)_e$, daar de waarden van differentiaalquotiënten als $\frac{\partial P_x}{\partial x}$, enz. van deze laatste grootheid afhangen. Was alleen aangetoond, dat f zeer klein is ten opzichte van $N F_o$, dan behoefde het nog niet ten opzichte van $N F_o - (N F_o)_e$ het geval te zijn.

De berekening van P_x, enz. met behulp van:

$$F = N F_o\ (\xi - u,\ \eta - v,\ \zeta - w,\ E,\ p_1, \ldots\ p_k,\ h)$$

levert geene moeilijkheden op. Voert men in plaats van ξ, η, ζ de grootheden $\xi - u$, $\eta - v$, $\zeta - w$ als nieuwe veranderlijken in en let men verder op (4), dan vindt men vooreerst:

$$P_x = \frac{1}{3} N h + N u^2, P_y = \frac{1}{3} N h + N v^2, P_z = \frac{1}{3} N h + N w^2,$$

$$Q_{x,y} = N u v,\ Q_{y,z} = N v w,\ Q_{z,x} = N w u.$$

Verder wordt:

$$R = \frac{1}{2} m N (u^2 + v^2 + w^2) + N \int F_o (\xi, \eta, \zeta, E \ldots) \left(\frac{1}{2} m r^2 + E\right) d\lambda.$$

In de laatste integraal stelt het deel $\int F_o. \frac{1}{2} m r^2 d\lambda = \frac{1}{2} m h$ het gemiddelde arbeidsvermogen van de voortgaande beweging eener molecule voor; het overblijvende deel $\int F_o E\, d\lambda$ is het gemiddelde inwendige arbeidsvermogen van een deeltje. Dit laatste zal eene functie van de temperatuur, dus van h zijn; stelt men $\int F_o E\, d\lambda = m\, \vartheta (h)$, dan is $\vartheta (h)$ het intramoleculaire arbeidsvermogen voor de massaeenheid van het gas. Den aard der ingevoerde functie kan men uit proeven over de verandering der soortelijke warmte van het gas met de temperatuur afleiden *). Is die verandering 0, dan wordt $\vartheta (h)$ eene linaire functie.

---

*) E. WIEDEMANN, POGG. *Ann.* Bd. 157.

De waarde van R wordt nu:

$$R = \frac{1}{2} m N (u^2 + v^2 + w^2) + \frac{1}{2} m N h + m N \vartheta(h) \quad \ldots (10)$$

Eindelijk is:

$$S_x = N \int F_0 (\xi, \eta, \zeta, E, p_1 \ldots p_k, h) (\xi + u) \left\{ \frac{1}{2} m (r^2 + 2\xi u + 2\eta v + \right.$$

$$\left. + 2\zeta w + u^2 + v^2 + w^2) + E \right\} d\lambda = \frac{1}{2} m N u \left[\frac{5}{3} h + 2\vartheta(h) + (u^2 + v^2 + w^2) \right],$$

$$S_y = \frac{1}{2} m N v \left[\frac{5}{3} h + 2\vartheta(h) + (u^2 + v^2 + w^2) \right],$$

$$S_z = \frac{1}{2} m N w \left[\frac{5}{3} h + 2\vartheta(h) + (u^2 + v^2 + w^2) \right].$$

Brengt men deze uitkomsten in (a_1), (b_1), (c_1) over en maakt men daarbij nog van (a_1) ter herleiding van (b_1) en van (a_1) en (b_1) tot vereenvoudiging van (c_1) gebruik, dan verkrijgt men de volgende bewegingsvergelijkingen:

$$\frac{\partial (Nu)}{\partial x} + \frac{\partial (Nv)}{\partial y} + \frac{\partial (Nw)}{\partial z} + \frac{\partial N}{\partial t} = 0 \quad \ldots (a_2)$$

$$-N \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{3} \frac{\partial (Nh)}{\partial x} + N \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} \right) = 0, \text{ enz } . (b_2)$$

$$\frac{1}{3} h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{1}{2} (1 + 2\vartheta'(h)) \left(u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} + w \frac{\partial h}{\partial z} + \frac{\partial h}{\partial t} \right) = 0 \quad . . (c_2)$$

Wanneer men (a_2) en (b_2) met m vermenigvuldigt, kan men in plaats van N de dichtheid $m N = \delta$ van het gas invoeren.

Voor oneindig kleine verstoringen van den evenwichtstoestand worden de vergelijkingen eenvoudiger. Is in den zooeven genoemden toestand $\delta = \delta_0$, $h = h_0$, in den gestoorden toestand

$\delta = \delta_0 (1 + s)$, dan verkrijgt men, als men ook nog van de werking van uitwendige krachten afziet,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial s}{\partial t} = 0 \, , \dots , \, (a_3)$$

$$\frac{1}{3}\frac{\partial (h + h_o s)}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \, , \quad \frac{1}{3}\frac{\partial (h + h_o s)}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \, ,$$

$$\frac{1}{3}\frac{\partial (h + h_o s)}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \dots \dots \dots \dots (b_3)$$

$$\frac{1}{3} h_o \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{1}{2} \left(1 + 2 \vartheta' (h_o) \right) \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \dots (c_3)$$

---

§ 4. DE GELUIDSBEWEGING.

Dat de zooeven verkregen vergelijkingen alleen door de notatie verschillen van die, welke men in de gewone theorie van het geluid verkrijgt, behoeft wel geen uitvoerig betoog. Wij bepalen er ons dus toe, aan te wijzen, hoe men er de voortplantingssnelheid van het geluid uit kan verkrijgen. Daartoe leiden wij vooreerst uit (a_3) en (c_3) af:

$$\frac{3}{2 h_o}(1 + 2 \vartheta' (h_o)) \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial s}{\partial t} ,$$

dus daar in den oorspronkelijken toestand van evenwicht $s = 0$ en $h = h_o$ was:

$$\frac{3}{2 h_o} (1 + 2 \vartheta' (h_o)) (h - h_o) = s \, .$$

Vervolgens kunnen wij uit (a_3) en (b_3) u, v w elimineeren. Dit geeft:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{5 + 6 \vartheta' (h_o)}{9 (1 + 2 \vartheta' (h_o))} h_o \Delta s \, .$$

Deze vergelijking heeft een welbekenden vorm en onmiddellijk volgt eruit voor de voortplantingssnelheid

$$V=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5+6\vartheta'(h_0)}{1+2\vartheta'(h_0)}k_0}.$$

Daar nu de druk p_0 in den evenwichtstoestand bepaald wordt door $p_0=\frac{1}{3}\delta_0 h_0$ en daar verder eene eenvoudige redeneering voor de verhouding van de soortelijke warmte van het gas bij constanten druk en van die bij constant volume de waarde $k=\frac{5+6\vartheta'(h_0)}{3(1+2\vartheta'(h_0))}$ oplevert, stemt de verkregen uitkomst geheel overeen met de formule

$$V=\sqrt{\frac{kp_0}{\delta_0}},$$

die in de gewone geluidsthéorie wordt afgeleid en door de waarneming bevestigd is.

Was het bereiken dezer uitkomst ons eenige doel geweest, dan hadden wij van het begin af aan de verstoring van den evenwichtstoestand oneindig klein kunnen stellen en van de werking van uitwendige krachten kunnen afzien; het onderzoek der vorige § zou daardoor veel eenvoudiger zijn geworden. Steeds zou men echter, om tot de bewegingsvergelijkingen (a_3), (b_3), (c_3) te geraken, hebben moeten aannemen, dat aan α en β (p. 364) voldaan is. In werkelijkheid zal dan ook eene oplossing der vergelijkingen slechts dan een mogelijken bewegingstoestand kunnen voorstellen, wanneer zij aan die voorwaarden voldoet. Bij eene regelmatige voortplanting van geluidstrillingen verkeert men in dit geval. Maar er zijn andere oplossingen der bewegingsvergelijkingen, die niet aan den gestelden eisch voldoen.

Zoo leeren b. v. die vergelijkingen, dat eene voortplanting van eene enkele op zichzelf staande golf mogelijk is. Daarbij bestaat dan eene verstoring van het evenwicht alleen binnen eene schilvormige ruimte, die zich met behoud harer dikte hoe langer hoe verder uitbreidt. Deze oplossing voldoet ook nog

aan de bewegingsvergelijkingen, wanneer de golf scherp begrensd is, d. w. z. wanneer aan de grensvlakken de verstoring zeer snel overgaat van eene eindige waarde binnen de golf tot 0 daarbuiten. Het is nu echter duidelijk, dat deze bewegingstoestand in werkelijkheid niet zal kunnen bestaan. Was hij voor een oogenblik aanwezig, dan zou weldra de golf hare scherpe grenzen verliezen door een proces van diffusie, dat bij de afleiding der bewegingsvergelijkingen verwaarloosd is. Dit verschijnsel, dat bij de gewone geluidsbeweging als kleine storende invloed optreedt, zou dan een tijd lang hoofdzaak zijn.

Een dergelijk geval is dat, waarmede de Heer RINK zich aan het einde zijner verhandeling bezig houdt *). Het is dus niet te verwonderen, dat hij hier uitkomsten verkrijgt, die met de gewone voorstellingen omtrent de geluidsbeweging in strijd zijn. Dit pleit echter niet tegen de kinetische gastheorie, want bij de gewone geluidsbeweging zal de genoemde diffusie slechts een geringen invloed hebben.

Dat dit zoo is hebben wij in de voorgaande § uit onze vergelijkingen afgeleid door aan te toonen, dat f verwaarloosd mocht worden. Misschien is het intusschen wenschelijk, het nog door de volgende elementaire beschouwing op te helderen.

Stellen wij ons voor, dat in eene geslotene met gas gevulde ruimte een aantal moleculen van buiten worden toegelaten en dat vervolgens het gas aan zichzelf overgelaten wordt. Vóór het binnentreden der nieuwe moleculen bevond zich het gas in de ruimte in een stationnairen toestand, waarbij de toestandsverdeeling door de functie F_0 gegeven is. Het eerste gevolg van het binnentreden der nieuwe deeltjes zal nu zijn, dat die toestand verstoord is. Maar door de onderlinge botsingen zal weldra een nieuwe stationnaire toestand geboren worden, die zich van den oorspronkelijken onderscheidt doordat het aantal moleculen, hun gemiddeld snelheidsquadraat en de gemiddelde snelheid in de richtingen der coördinaatassen zijn gewijzigd. Iets dergelijks zal natuurlijk ook het geval zijn, wanneer een aantal moleculen de ruimte hadden verlaten.

De tijd, die verloopt, vóór de stationnaire toestand hersteld

*) T. a. p., p. 379.

is, zal van dezelfde orde van grootte zijn als de tijd tusschen twee achtereenvolgende botsingen eener molecule.

Beschouwen wij thans eene gasmassa, waarin eene verstoring van den evenwichtstoestand bestaat. Wij nemen eene zekere ruimte van dit gas, die zoo klein is, dat men daar binnen den toestand als overal gelijk mag beschouwen en die dus bij de afleiding der bewegingsvergelijkingen als een volumeelement kan gelden. Wanneer aan de voorwaarde α voldaan is, zullen wij tevens de afmetingen van dit volumeelement groot kunnen kiezen, vergeleken met de lengte van den vrijen weg der moleculen. Het gevolg zal zijn, dat slechts uiterst zelden eene molecule zonder eene botsing te ondergaan, aan de eene zijde van het element zal in-, aan de andere zijde uittreden. Integendeel heeft men zich voor te stellen, dat de deeltjes, die in het element komen, na een zeer kleinen weg te hebben afgelegd door eene ontmoeting in wisselwerking treden met de reeds aanwezige deeltjes en dat eveneens de uit het element gaande moleculen deel hebben uitgemaakt van de daarin aanwezige, met elkander in botsing verkeerende moleculen.

Treden er nu op eenig oogenblik eenige deeltjes uit, andere binnen, dan zou er een zekere tijd, van de reeds aangegeven orde, verloopen, vóór door de onderlinge botsingen in het element een stationnaire toestand hersteld was. In werkelijkheid treden nu voortdurend moleculen in en uit het element en zal dus strikt genomen nooit de stationnaire toestand bestaan, die aan de heerschende dichtheid, temperatuur en stroomingssnelheid beantwoordt. Veeleer zal de bewegingstoestand der moleculen nog de sporen dragen van hetgeen hij in den laatsten tijd geweest is. Het is nu intusschen duidelijk, dat wanneer de tijd noodig voor het herstellen van den stationnairen toestand slechts kort genoeg is (voorwaarde β), met groote benadering zal mogen worden aangenomen, dat op elk oogenblik zulk een toestand bestaat. Alleen veranderen dan dichtheid, snelheid en temperatuur aanhoudend door het uit- en intreden van moleculen en de wijze, waarop dit gebeurt, wordt door onze bewegingsvergelijkingen aangegeven.

Voor eene volledige theorie van verscheidene geluidsverschijnselen kan men niet volstaan met de bewegingsvergelijkingen der gassen, maar moet men ook letten op hetgeen er aan het oppervlak van de (vaste of vloeibare) lichamen plaats heeft, waarmede het gas in aanraking is.

Is vooreerst dat oppervlak volkomen glad, dan is klaarblijkelijk eene beweging van het gas met overal gelijken toestand mogelijk, wanneer slechts het oppervlak in de richting der normaal dezelfde snelheid als de aangrenzende gaslaag bezit. Verandert de toestand van het gas van punt tot punt en van oogenblik tot oogenblik, dan zal, wanneer slechts aan α en β voldaan is, nog steeds de toestand in de aan den wand gelegen laag als gelijk beschouwd mogen worden aan dien, welke bestaan zou als door het geheele gas dezelfde toestand bestond als in die laag Daaruit volgt, dat ook dan nog de beweging mogelijk zal zijn, wanneer slechts op elk oogenblik de wand en de aanliggende gaslaag in normale snelheid overeenstemmen. Dit is de grensvoorwaarde, die gewoonlijk in de wiskundige geluidstheorie wordt gebezigd Intusschen is de zaak alleen dan zoo eenvoudig, wanneer aan α en β voldaan is; ingewikkelder zou het vraagstuk b. v. worden, wanneer een vast lichaam in een rustend gas plotseling eene zekere snelheid verkrijgt.

In werkelijkheid is nooit een oppervlak tegenover de gasmoleculen volkomen glad; integendeel moeten wij het als zelf uit moleculen samengesteld en met eene gecondenseerde gaslaag voorzien, dus als zeer ruw beschouwen. Ook moeten wij eene uitwisseling van warmte tusschen het oppervlak en het gas aannemen. Het is nu duidelijk, dat eene beweging van het gas, die aan de voorwaarden α en β voldoet, zal kunnen bestaan, wanneer het oppervlak en de daarnaast gelegen gaslaag in normale en tangentiale snelheid en in temperatuur overeenstemmen. Is aan α en β niet voldaan, dan wordt het vraagstuk weer ingewikkelder; er zal dan glijding langs den wand en een temperatuurverschil tusschen dezen en het gas bestaan kunnen.

Wij zullen ten slotte nog het arbeidsvermogen bespreken, dat in een gas aanwezig is, waarin eene geluidsbeweging plaats heeft.

De grootte daarvan wordt onmiddellijk gegeven door de vergelijking (10) of

$$R = \frac{1}{2}\,\delta\,(u^2 + v^2 + w^2) + \frac{1}{2}\,\delta h + \delta\,\vartheta(h);$$

immers $R\,d\tau$ is het arbeidsvermogen in een volumeelement aanwezig.

Wij kunnen intusschen uit deze vergelijking eene andere afleiden, die slechts u, v, w en s bevat, wanneer wij eerst met behulp van de bewegingsvergelijkingen h in s uitdrukken. Voor het geval, dat men slechts de eerste macht van s behoudt, hebben wij dit reeds in het begin dezer § gedaan; daar het echter wenschelijk is het arbeidsvermogen R nauwkeurig te verkrijgen tot op grootheden van de tweede orde (als u, v, w, s van de eerste zijn) moeten wij thans uit (a_2), (b_2), (c_2) het verband tusschen h en s afleiden.

Daartoe stelle men zich een punt Q voor, dat zich zoo beweegt, dat zijne snelheid steeds gelijk is aan de stroomingssnelheid op de plaats, waar het zich bevindt. Kiest men dan op eenigen tijd t voor δ en h steeds de waarden, die zij in Q hebben, dan is

$$\frac{d\delta}{dt} = u\frac{\partial\delta}{\partial x} + v\frac{\partial\delta}{\partial y} + w\frac{\partial\delta}{\partial z} + \frac{\partial\delta}{\partial t},$$

eene dergelijke betrekking bestaat ook voor h en uit (a_2) en (c_2) volgt

$$\frac{d\delta}{\delta} = \frac{3}{2}\,(1 + 2\,\vartheta'(h))\,\frac{dh}{h},$$

dus, daar in den oorspronkelijken evenwichtstoestand $\delta = \delta_0$, $h = h_0$ was,

$$l\left(\frac{\delta}{\delta_0}\right) = l(1+s) = \frac{3}{2}\int_{h_0}^{h}(1 + 2\,\vartheta'(h))\,\frac{dh}{h}.$$

Hieruit volgt, tot in de tweede orde nauwkeurig,

$$h = h_o + \frac{2\,h_o}{3(1 + 2\,\vartheta'(h_o))}\,s -$$
$$- \frac{2\,h_o}{3(1 + 2\,\vartheta'(h_o))}\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2\,h_o\,\vartheta''(h_o) - (1 + 2\,\vartheta'(h_o))}{(1 + 2\,\vartheta'(h_o))^2}\right\}s^2.$$

Met denzelfden graad van nauwkeurigheid wordt vervolgens

$$R = \frac{1}{2}\,\delta_o\,(h_o + 2\,\vartheta(h_o)) + \frac{1}{6}\,\delta_o\,(5\,h_o + 6\,\vartheta(h_o))\,s +$$
$$+ \,\delta_o\,h_o\,.\,\frac{5 + 6\,\vartheta'(h_o)}{18(1 + 2\,\vartheta'(h_o))}\,s^2 + \frac{1}{2}\,\delta_o\,(u^2 + v^2 + w^2).$$

In den evenwichtstoestand wordt deze waarde

$$R_o = \frac{1}{2}\,\delta_o\,(h_o + 2\,\vartheta(h_o)),$$

en de grootheid

$$R - R_o = \frac{1}{6}\,\delta_o\,.\,(5\,h_o + 6\,\vartheta(h_o))\,s + \delta_o\,h_o\,.\,\frac{5 + 6\,\vartheta'(h_o)}{18(1 + 2\,\vartheta'(h_o))}\,s^2 +$$
$$+ \frac{1}{2}\,\delta_o\,(u^2 + v^2 + w^2)\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,,\,. \quad (11)$$

geeft dus aan, hoeveel het arbeidsvermogen grooter is dan in den evenwichtstoestand.

De beide laatste termen dezer uitkomst stemmen, zooals gemakkelijk is aan te toonen, geheel overeen met de waarde, die de Heer GRINWIS *) langs anderen weg voor het arbeidsvermogen bij de geluidsbeweging heeft gevonden. Onze eerste term komt bij hem niet voor, maar dit is alleen hieraan te wijten, dat de door hem berekende energie eene eenigszins andere beteekenis heeft dan de door ons berekende grootheid $R - R_o$. Zullen de uitkomsten geheel vergelijkbaar zijn, dan moet men

*) GRINWIS, sur la théorie mécanique du son, *Arch. Neerl.* T. X,

aan de berekening van den Heer GRINWIS eene kleine wijziging aanbrengen. Men moet dan het volgende vraagstuk oplossen *): Eene ruimte S is gevuld met gas, dat eene grootere dichtheid heeft dan de normale, welke verdichting langs adiabatischen weg ontstaan is; men vraagt, hoeveel meer arbeidsvermogen dat gas nu bevat dan *in dezelfde ruimte* zou aanwezig zijn, wanneer zij met gas van de normale dichtheid gevuld was. Berekent men nu niet de integraal

$$\int_{V+S}^{S} -(p-p_0)\,dv\,,$$

maar de integraal

$$-\int_{S+V}^{S} p\,dv\,,$$

dan vindt men, hoeveel meer arbeidsvermogen de ruimte S bevat dan in den normalen toestand in het volume $S+V$ zou aanwezig zijn. Om echter de boven gestelde vraag op te lossen moeten wij niet met dit laatste arbeidsvermogen vergelijken, maar met de energie, die in den evenwichtstoestand in de ruimte S aanwezig is. Men zal dus bij de uitkomst der genoemde integratie nog het arbeidsvermogen moeten voegen, dat in den normalen toestand in de ruimte V aanwezig is. Voert men de berekening op deze wijze uit, dan verkrijgt men een resultaat, dat geheel met de formule (11) overeenstemt.

Wij moeten intusschen opmerken, dat de eerste term in die formule wegvalt, wanneer men bij de geluidstrillingen de gemiddelde energie in een volumeelement gedurende één trillingstijd zoekt; immers de gemiddelde waarde van s is dan 0. Eveneens, wanneer de energie wordt berekend in eenig deel der ruimte, dat evenveel gas bevat als in den normalen toestand. Voor de *geheele* gasmassa is in elk geval het arbeidsvermogen bij de geluidsbeweging eene grootheid van de tweede orde.

Ook de Heer RINK heeft in zijne reeds aangehaalde verhandeling de energie bij de geluidsbeweging beschouwd. Hij heeft

*) Verg. GRINWIS, t. a. p., pp. 137, 138.

daartoe berekend, hoeveel arbeidsvermogen door eene trillende plaat aan de gasmoleculen, die ertegen botsen, wordt meêgedeeld. In de uitkomst treedt weer een term van de eerste orde op en er wordt gewezen op het groote verschil tusschen dit resultaat en dat van den Heer GRINWIS. Daarbij wordt echter niet opgemerkt, dat het ontbreken van een term van de eerste orde bij den laatsten natuurkundige eenvoudig een gevolg is van de wijze, waarop hij de energie berekent.

Daar de Heer RINK niet nagaat, hoeveel arbeidsvermogen in een bepaald ruimtedeel van het gas aanwezig is, maar alleen hoeveel arbeidsvermogen door een trillend lichaam aan het gas wordt meêgedeeld, is zijne uitkomst niet rechtstreeks met de onze vergelijkbaar.

---

§ 5. MEER NAUWKEURIGE AFLEIDING DER BEWEGINGSVERGELIJKINGEN. INWENDIGE WRIJVING EN WARMTEGELEIDING.

In § 3 hebben wij de vergelijkingen (a_2), (b_2), (c_2) verkregen door de functie f in (6) geheel te verwaarloozen. Thans zullen wij de benadering verder trachten te drijven en dus de omstandigheid in rekening brengen, dat de bewegingstoestand in eenig punt der gasmassa niet volkomen gelijk is aan dien, welke bestaan zou als overal in het gas en voortdurend N, h, u, v, w dezelfde waarden hadden als in dat punt. Intusschen zullen wij blijven aannemen, dat aan α, β, γ voldaan is, zoodat f in elk geval zeer klein wordt vergeleken met NFo — $(N F_0)_e$.

Wij kunnen dan bij het verdere onderzoek van de vergelijking (II) uitgaan; wel is waar zijn daarin eenige termen $\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \text{enz.}\right)$ verwaarloosd, maar daar deze zeer klein zijn vergeleken met die, welke wij behouden hebben, zal de fout, die men aldus in f begaat, ook klein worden ten opzichte van deze zelf reeds kleine grootheid. Anders uitgedrukt, wanneer wij f eene grootheid van de eerste orde noemen, zullen wij nu grootheden van de tweede orde verwaarloozen.

In (II) moet men onder F_0 de grootheid

$$F_0\,(\xi-u,\ \eta-v,\ \zeta-w,\ E,\ p_1,\dots p_k,\ h)$$

verstaan. Neemt men nu in aanmerking, dat in het algemeen N, u, v, w, h van x, y, z, t afhangen, dan wordt de vergelijking

$$b_1-a_1=N\frac{\partial F_0(\xi-u,\dots)}{\partial \xi}\frac{\partial \psi}{\partial x}+N\frac{\partial F_0(\xi-u,\dots)}{\partial \eta}\frac{\partial \psi}{\partial y}+N\frac{\partial F_0(\xi-u,\dots)}{\partial \zeta}\frac{\partial \psi}{\partial z}+$$

$$+F_0(\xi-u,\dots)\left[\frac{\partial N}{\partial x}\xi+\frac{\partial N}{\partial y}\eta+\frac{\partial N}{\partial z}\zeta+\frac{\partial N}{\partial t}\right]-$$

$$-N\frac{\partial F_0(\xi-u,\dots)}{\partial \xi}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\xi+\frac{\partial u}{\partial y}\eta+\frac{\partial u}{\partial z}\zeta+\frac{\partial u}{\partial t}\right]-$$

$$-N\frac{\partial F_0(\xi-u,\dots)}{\partial \eta}\left[\frac{\partial v}{\partial x}\xi+\frac{\partial v}{\partial y}\eta+\frac{\partial v}{\partial z}\zeta+\frac{\partial v}{\partial t}\right]-$$

$$-N\frac{\partial F_0(\xi-u,\dots)}{\partial \zeta}\left[\frac{\partial w}{\partial x}\xi+\frac{\partial w}{\partial y}\eta+\frac{\partial w}{\partial z}\zeta+\frac{\partial w}{\partial t}\right]+$$

$$+N\frac{\partial F_0(\xi-u,\dots)}{\partial h}\left[\frac{\partial h}{\partial x}\xi+\frac{\partial h}{\partial y}\eta+\frac{\partial h}{\partial z}\zeta+\frac{\partial h}{\partial t}\right].$$

In een bepaald punt van het gas en op een bepaald oogenblik is het tweede lid eene geheel bekende functie χ van ξ, η, ζ, E, $p_1,\dots p_k$, die N, $u,\dots \frac{\partial u}{\partial x},\dots$ als constanten bevat. In het eerste lid heeft b_1-a_1 deze beteekenis, dat men er door vermenigvuldiging met $d\lambda\, d t$ uit kan afleiden, hoeveel in de ruimteeenheid van de vroeger (p. 357) ingevoerde gasmassa P door de botsingen gedurende den tijd $d t$ het aantal deeltjes der in § 1 gedefinieerde groep zou toenemen. Daarbij is in P overal

$$F=N F_0(\xi-u,\dots)+f(\xi,\eta,\zeta,\dots)$$

met constante waarden van N, u, v, w, h. Zoo kort mogelijk uitgedrukt wordt onze vergelijking

$$b-a\,[\text{voor } F = NF_0(\xi-u,\ldots) + f(\xi,\eta,\zeta,\ldots)] = \chi(\xi,\eta,\zeta,\ldots)$$

en de vraag is nu, hieruit f te vinden, m. a. w. te bepalen, hoeveel de toestand in P van den stationnairen stroomingstoestand $NF_0(\xi-u,\ldots)$ moet afwijken, opdat in de ruimteeenheid en gedurende den tijd dt door de botsingen het aantal deeltjes binnen de groep van § 1 de voorgeschreven aangroeiing $\chi(\xi,\eta,\zeta,\ldots)\,d\lambda\,dt$ ondergaat.

Wij kunnen nu gebruik maken van de omstandigheid, dat men, zonder iets aan de relatieve bewegingen der moleculen te veranderen, aan het geheele gas P eene stroomingssnelheid $(-u, -v, -w)$ kan geven. Doet men dit, dan wordt de nieuwe waarde van de functie, die de toestandsverdeeling bepaalt, verkregen door in de oorspronkelijke ξ, η, ζ te vervangen door $\xi+u$, $\eta+v$, $\zeta+w$. In den nieuwen toestand zal verder door de botsingen het aantal deeltjes van de groep met de grenzen ξ en $\xi+d\xi$, η en $\eta+d\eta$, ζ en $\zeta+d\zeta$, E en $E+dE$, enz. evenveel veranderen als in den oorspronkelijken toestand dat van de groep, die $\xi+u$ en $\xi+u+d\xi$, $\eta+v$ en $\eta+v+d\eta$, $\zeta+w$ en $\zeta+w+d\zeta$, E en $E+dE$, enz. tot grenzen heeft. Wiskundig wordt een en ander uitgedrukt door de vergelijking

$$b-a\,[\text{voor } F = NF_0(\xi,\eta,\zeta,\ldots) + f(\xi+u,\ldots)] = \\ = \chi(\xi+u,\ \eta+v,\ \zeta+w,\ldots).$$

Kan men dus de functie $f'(\xi,\eta,\zeta,\ldots)$ zoo bepalen, dat voldaan wordt aan de vergelijking

$$b-a\,[\text{voor } F = NF_0(\xi,\eta,\zeta,\ldots) + f'(\xi,\eta,\zeta,\ldots)] = \\ = \chi(\xi+u,\ \eta+v,\ \zeta+w,\ldots), \quad\quad (12)$$

— d. w. z. kan men vinden hoeveel de toestand van P van den stationnairen *rusttoestand* $NF_0(\xi,\eta,\zeta,\ldots)$ moet afwijken, opdat het aantal deeltjes binnen de meergenoemde groep op eene voorgeschreven wijze verandere — dan is

$$f'(\xi,\eta,\zeta,\ldots) = f(\xi+u,\ \eta+v,\ \zeta+w,\ldots),$$

dus

$$f'(\xi, \eta, \zeta, \ldots) = f(\xi - u, \eta - v, \zeta - w, \ldots) \ldots \quad (13)$$

Uit de voorwaarden (7) voor f vindt men nog gemakkelijk voor f' de condities

$$\int f'(\xi,\eta,\zeta,\ldots)d\lambda = \int f'(\xi,\eta,\zeta,\ldots)\xi d\lambda = \int f'(\xi,\eta,\zeta,\ldots)\eta d\lambda =$$
$$= \int f'(\xi,\eta,\zeta,\ldots)\zeta d\lambda = \int f'(\xi,\eta,\zeta,\ldots)r^2 d\lambda = 0. \quad (14)$$

Is eens uit (12) en (14) f' en daarmede uit (13) f gevonden, dan kan men tot de berekening overgaan van de aandeelen, die daaruit voor P_x, enz. voortvloeien en die wij P_x' enz. zullen noemen. Uit (13) en (14) kan men nu gemakkelijk afleiden

$$\left.\begin{aligned}
P'_x &= \int f'\xi^2 d\lambda,\ P'_y = \int f'\eta^2 d\lambda,\ P'_z = \int f'\zeta^2 d\lambda,\\
Q'_{x,y} &= \int f'\xi\eta d\lambda,\ Q'_{y,z} = \int f'\eta\zeta d\lambda,\ Q'_{z,x} = \int f'\zeta\xi d\lambda,\\
R' &= \int f'\left(\frac{1}{2}mr^2 + E\right)d\lambda,\\
S'_x &= \int f\xi\left(\frac{1}{2}mr^2+E\right)d\lambda + m(uP'_x + vQ'_{x,y} + wQ'_{x,z}) +\\
&\quad + u\int f E d\lambda,\\
S'_y &= \int f'\eta\left(\frac{1}{2}mr^2+E\right)d\lambda + m(uQ'_{x,y} + vP'_y + wQ'_{y,z}) +\\
&\quad + v\int f' E d\lambda,\\
S'_z &= \int f'\zeta\left(\frac{1}{2}mr^2+E\right)d\lambda + m(uQ'_{x,z} + vQ'_{y,z} + wP'_z) +\\
&\quad + w\int f E d\lambda,
\end{aligned}\right\} \ldots (15)$$

waarbij, even als altijd in het vervolg, onder f' de functie $f'(\xi, \eta, \zeta, \ldots)$ verstaan moet worden.

Stelt men in (12) voor de functie χ hare oorspronkelijke waarde weer in de plaats en verstaat men voortaan onder F_o steeds $F_o(\xi, \eta, \zeta, E, p_1 \ldots p_k, h)$, dan heeft men ter bepaling van f'

$$b-a\left[\text{voor } F = NF_o + f'\right] = N\frac{\partial F_o}{\partial \xi}\frac{\partial \psi}{\partial x} + N\frac{\partial F_o}{\partial \eta}\frac{\partial \psi}{\partial y} + N\frac{\partial F_o}{\partial \zeta}\frac{\partial \psi}{\partial z} +$$

$$+ F_o\left[\frac{\partial N}{\partial x}(\xi+u) + \frac{\partial N}{\partial y}(\eta+v) + \frac{\partial N}{\partial z}(\zeta+w) + \frac{\partial N}{\partial t}\right] -$$

$$-N\frac{\partial F_o}{\partial \xi}\left[\frac{\partial u}{\partial x}(\xi+u) + \frac{\partial u}{\partial y}(\eta+v) + \frac{\partial u}{\partial z}(\zeta+w) + \frac{\partial u}{\partial t}\right] -$$

$$-N\frac{\partial F_o}{\partial \eta}\left[\frac{\partial v}{\partial x}(\xi+u) + \frac{\partial v}{\partial y}(\eta+v) + \frac{\partial v}{\partial z}(\zeta+w) + \frac{\partial v}{\partial t}\right] -$$

$$-N\frac{\partial F_o}{\partial \zeta}\left[\frac{\partial w}{\partial x}(\xi+u) + \frac{\partial w}{\partial y}(\eta+v) + \frac{\partial w}{\partial z}(\zeta+w) + \frac{\partial w}{\partial t}\right] +$$

$$+N\frac{\partial F_o}{\partial h}\left[\frac{\partial h}{\partial x}(\xi+u) + \frac{\partial h}{\partial y}(\eta+v) + \frac{\partial h}{\partial z}(\zeta+w) + \frac{\partial h}{\partial t}\right] \,.. (16)$$

Het tweede lid kan hier nog aanmerkelijk vereenvoudigd worden. Vooreerst kunnen wij daartoe van de bewegingsvergelijkingen (a_2), (b_2), (c_2) gebruik maken; wel is waar zijn deze thans niet meer volkomen juist, maar zij zullen toch bij de berekening van het kleine tweede lid van (16) mogen gebezigd worden. Ten tweede kunnen, zooals wij vroeger zagen, de grootheden

$$\frac{\partial F_o}{\partial \xi} + \frac{3}{h}F_o\,\xi, \quad \frac{\partial F_o}{\partial \eta} + \frac{3}{h}F_o\,\eta, \quad \frac{\partial F_o}{\partial \zeta} + \frac{3}{h}F_o\,\zeta,$$

wanneer zij met een van $\xi, \eta, \zeta, E, p_1, \ldots p_k$ onafhankelijken factor vermenigvuldigd voorkomen, buiten beschouwing gelaten worden. Aldus gaat (16) over in

$b - a$ [voor $F = NF_0 + f'$] =

$$= N\left(\xi \frac{\partial F_0}{\partial h} + \frac{1}{3}\frac{\partial F_0}{\partial \xi}\right)\frac{\partial h}{\partial x} + N\left(\eta \frac{\partial F_0}{\partial h} + \frac{1}{3}\frac{\partial F_0}{\partial \eta}\right)\frac{\partial h}{\partial y} +$$

$$+ N\left(\zeta \frac{\partial F_0}{\partial h} + \frac{1}{3}\frac{\partial F_0}{\partial \zeta}\right)\frac{\partial h}{\partial z} -$$

$$- N\left(\eta \frac{\partial F_0}{\partial \xi}\frac{\partial u}{\partial y} + \xi \frac{\partial F_0}{\partial \eta}\frac{\partial v}{\partial x}\right) - N\left(\zeta \frac{\partial F_0}{\partial \eta}\frac{\partial v}{\partial z} + \eta \frac{\partial F_0}{\partial \zeta}\frac{\partial w}{\partial y}\right) -$$

$$- N\left(\xi \frac{\partial F_0}{\partial \zeta}\frac{\partial w}{\partial x} + \zeta \frac{\partial F_0}{\partial \xi}\frac{\partial u}{\partial z}\right) -$$

$$- N\left(\xi \frac{\partial F_0}{\partial \xi}\frac{\partial u}{\partial x} + \eta \frac{\partial F_0}{\partial \eta}\frac{\partial v}{\partial y} + \zeta \frac{\partial F_0}{\partial \zeta}\frac{\partial w}{\partial z}\right) -$$

$$- N\left\{F_0 + \frac{2h}{3(1+2\vartheta'(h))}\frac{\partial F_0}{\partial h}\right\}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \ldots (17)$$

Om nu f', of liever de waarde der in (15) voorkomende integralen hieruit af te leiden kunnen wij (verg. p. 367) de waarden zoeken bij verschillende deelen van het tweede lid van (17) behoorende en daarvan de som nemen. Bij de keus dier deelen zullen wij ons laten leiden door de beschouwing van eenige eenvoudige gevallen.

a. Laat het gas zich in rust bevinden en zij de temperatuur, dus ook h, eene functie van x. Dan wordt het tweede lid van (17)

$$N\left(\xi \frac{\partial F_0}{\partial h} + \frac{1}{3}\frac{\partial F_0}{\partial \xi}\right)\frac{\partial h}{\partial x} \quad \ldots\ldots\ldots (18)$$

Door eene redeneering, zooals zij reeds vroeger werd gebezigd, door n.l. de spiegelbeelden van het gas ten opzichte van vlakken loodrecht op de coördinaatassen te beschouwen, kan men aantoonen, dat de waarde van f', die hieraan beantwoordt, alleen voor de integraal $\int f' \xi \left(\frac{1}{2} m r^2 + E\right) d\lambda$ eene bijdrage l kan opleveren, die natuurlijk met $\frac{\partial h}{\partial x}$ evenredig is. Is echter T de

temperatuur, dan is $\frac{\partial h}{\partial x} = e \frac{\partial T}{\partial x}$, waarbij e voor elk gas eene bekende constante is. Derhalve is l ook met $\frac{\partial T}{\partial x}$ evenredig en kan door $-\varkappa \frac{\partial T}{\partial x}$ worden voorgesteld. De daarbij ingevoerde constante $\varkappa$ is niet anders dan de *warmtegeleidingscoëfficient*, hetgeen hieruit blijkt, dat $\int f' \xi \left(\frac{1}{2} m r^2 + E\right) d\lambda$ de hoeveelheid warmte (in arbeidseenheden uitgedrukt) voorstelt, die in de tijdseenheid door de eenheid van een vlak loodrecht op de x-as naar de zijde der positieve x meer gaat dan naar de tegengestelde zijde.

Kende men den bouw der moleculen en hare onderlinge werking, dan bestond er eenig uitzicht op de berekening van $\varkappa$. Het eenige, wat wij zonder die kennis uit onze vergelijkingen kunnen afleiden, is dat $\varkappa$, zooals reeds meermalen werd aangetoond, onafhankelijk van de dichtheid is.

Vergelijkt men n.l. twee gasmassa's, die in correspondeerende punten gelijke temperatuur hebben, maar waarvan het tweede eene p maal zoo groote dichtheid heeft als het eerste, dan moet blijkens (18) $b-a$ voor het tweede gas p maal zoo groot zijn als bij het eerste. Daar nu NF_0 bij dit gas reeds p maal zoo groot als bij het andere is, zal eene bij beide gassen gelijke waarde van f' voor de waarden van $b-a$ de genoemde verhouding opleveren; daaruit volgt echter onmiddellijk de gelijkheid van $\varkappa$ in de twee gevallen.

Even als den eersten term in (17) kan men ook de beide volgende behandelen. Aldus vindt men, dat deze drie termen voor S_x, S_y, S_z de aandeelen

$$-\frac{\varkappa}{e}\frac{\partial h}{\partial x},\quad -\frac{\varkappa}{e}\frac{\partial h}{\partial y},\quad -\frac{\varkappa}{e}\frac{\partial h}{\partial z} \quad \ldots\ldots (19)$$

opleveren.

b. Nemen wij in de tweede plaats aan, dat het gas bij overal gelijke dichtheid en temperatuur eene stroomingssnelheid in de

richting der x-as bezit, die alleen van y afhangt. Dan wordt het tweede lid van (17)

$$-N\eta\frac{\partial F_0}{\partial \xi}\frac{\partial u}{\partial y}.$$

De beschouwing der spiegelbeelden leert, dat hieruit alleen voor $\int f'\xi\eta\, d\lambda$ een deel l' kan voortvloeien. Klaarblijkelijk is het evenredig aan $\frac{\partial u}{\partial y}$; stelt men

$$l' = -\frac{\mu}{m}\frac{\partial u}{\partial y},$$

dan is μ de *wrijvingscoëfficient,* waarvoor dan weer evenals voor x de onafhankelijkheid van de dichtheid kan worden aangetoond. Behandelt men geheel op dezelfde wijze de overige termen in (17), die met $-N\eta\frac{\partial F_0}{\partial \xi}\frac{\partial u}{\partial y}$ overeenkomen, dan verkrijgt men voor $Q'_{x,y}$, $Q'_{y,z}$, $Q'_{z,x}$ de bijdragen

$$-\frac{\mu}{m}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right),\ -\frac{\mu}{m}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right),\ -\frac{\mu}{m}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\ldots (20)$$

en voor S'_x, S'_y, S'_z

$$-\mu\left[v\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)+w\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right],$$

$$-\mu\left[w\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)+u\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right],$$

$$-\mu\left[u\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)+v\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)\right]\ldots . (21)$$

c. Om te vinden, wat de in (17) voorkomende termen

$$-N\left(\xi\frac{\partial F_0}{\partial \xi}\frac{\partial u}{\partial x}+\eta\frac{\partial F_0}{\partial \eta}\frac{\partial v}{\partial y}+\zeta\frac{\partial F_0}{\partial \zeta}\frac{\partial w}{\partial z}\right)\ldots (22)$$

voor P'_x enz. opleveren, kunnen wij van den volgenden kunstgreep gebruik maken. Voeren wij naast de x- en de y-as twee nieuwe assen der x' en y' in, waarvan de eerste den hoek tusschen de positieve x- en de positieve y-as, de laatste den hoek tusschen de negatieve x- en de positieve y-as midden door deelt. Stellen wij ons verder voor, dat in het gas eene stroomende beweging in de richting der x'-as met eene snelheid $u' = cy'$ (c constant) bestaat. Dan is

$$u = v = cy' \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{2}c, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2}c$$

en het tweede lid van (17) wordt

$$-\frac{1}{2}Nc\left(\eta\frac{\partial F_0}{\partial \xi} - \xi\frac{\partial F_0}{\partial \eta}\right) + \frac{1}{2}Nc\left(\xi\frac{\partial F_0}{\partial \xi} - \eta\frac{\partial F_0}{\partial \eta}\right). \quad . \quad . \quad (23)$$

Daar blijkens het onder b gezegde de beide termen

$$-\frac{1}{2}Nc\,\eta\frac{\partial F_0}{\partial \xi} \quad \text{en} \quad \frac{1}{2}Nc\,\xi\frac{\partial F_0}{\partial \eta}$$

gelijke maar tegengestelde deelen voor $\int f'\,\xi\,\eta\,d\lambda$ geven kunnen alleen uit den laatsten term in (23) bijdragen voor P'_x, enz. voortvloeien. Deze zijn echter gemakkelijk te vinden Want daar de ondersteldе bewegingstoestand van volkomen denzelfden aard is als de onder b beschouwde, kunnen wij onmiddellijk de hoeveelheid van beweging aangeven, die door de eenheid van een vlak, loodrecht op de x'- of de y'-as overgaat. Daaruit kan men door eene eenvoudige redeneering (n.l. door de hoeveelheden van beweging te beschouwen, die door de verschillende zijvlakken van een geschikt gekozen volumeelement uit- en intreden) dezelfde grootheid afleiden voor een vlak loodrecht op de x- of de y-as. Aldus vindt men dat aan (23) voor P'_x het deel $\frac{\mu}{m}c$, voor P'_y het deel $-\frac{\mu}{m}c$ beantwoordt, terwijl men geene bij-

dragen voor $Q'_{x,y}$, $Q'_{y,z}$, $Q'_{z,x}$, R', $\int f' \xi \left(\frac{1}{2} m r^2 + E\right) d\lambda$, enz. verkrijgt.

Men schrijve nu in het algemeene geval (22) in den vorm

$$\frac{1}{3} N \left(\xi \frac{\partial F_0}{\partial \xi} - \eta \frac{\partial F_0}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{1}{3} N \left(\eta \frac{\partial F_0}{\partial \eta} - \zeta \frac{\partial F_0}{\partial \zeta}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) +$$
$$+ \frac{1}{3} N \left(\zeta \frac{\partial F_0}{\partial \zeta} - \xi \frac{\partial F_0}{\partial \xi}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial z}\right) -$$
$$- \frac{1}{3} N \left(\xi \frac{\partial F_0}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial F_0}{\partial \eta} + \zeta \frac{\partial F_0}{\partial \zeta}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \ldots (24)$$

De eerste term volgt uit den laatsten van (23), wanneer men

$$c = \frac{2}{3}\left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

stelt; men kan dus onmiddellijk opgeven, wat hij voor P'_x, enz. oplevert.

Evenzoo voor de beide volgende termen. Stelt men kortheidshalve

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = K,$$

dan verkrijgt men

voor P'_x $\quad - 2 \frac{\mu}{m} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2}{3} \frac{\mu}{m} K$,

" P'_y $\quad - 2 \frac{\mu}{m} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{2}{3} \frac{\mu}{m} K$,

" P'_z $\quad - 2 \frac{\mu}{m} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{2}{3} \frac{\mu}{m} K$,

" S'_x $\quad - 2 \mu u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2}{3} \mu u K$,

" S'_y $\quad - 2 \mu v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{2}{3} \mu v K$.

" S'_z $\quad - 2 \mu w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{2}{3} \mu w K$.

d. Ten slotte blijft nog ter bespreking over de grootheid

$$-N\left[F_o+\frac{2h}{3(1+2\vartheta'(h))}\frac{\partial F_o}{\partial h}+\frac{1}{3}\left(\xi\frac{\partial F_o}{\partial \xi}+\eta\frac{\partial F_o}{\partial \eta}+\zeta\frac{\partial F_o}{\partial \zeta}\right)\right].K,..(25$$

die men verkrijgt door de laatste termen van (24) en van (17) te vereenigen.

Door ook hier de beschouwing van de spiegelbeelden der gasmassa te hulp te roepen kan men aantoonen, dat de waarde van f', die aan (25) beantwoordt,

$$\int f'\xi\eta\, d\lambda=\int f'\eta\zeta\, d\lambda=\int f'\zeta\xi\, d\lambda=\int f'\xi\left(\frac{1}{2}mr^2+E\right)d\lambda=$$
$$=\int f'\eta\left(\frac{1}{2}mr^2+E\right)d\lambda=\int f'\zeta\left(\frac{1}{2}mr^2+E\right)d\lambda=0$$

maakt. Daar verder klaarblijkelijk

$$\int f'\xi^2\, d\lambda=\int f'\eta^2\, d\lambda=\int f'\zeta^2\, d\lambda$$

zal zijn, is elke dezer grootheden $=\frac{1}{3}\int f' r^2\, d\lambda$, dus 0 tengevolge van (14). Derhalve kan alleen de integraal $\int f' E\, d\lambda$ van 0 verschillen. Zij zal kunnen worden voorgesteld door νK, waarbij ν een constante coëfficiënt is, die even als μ en $\varkappa$ onafhankelijk is van de dichtheid van het gas. Ten slotte vinden wij dan voor R' het deel νK, voor S'_x, S'_y, S'_z resp. $\nu u K$, $\nu v K$, $\nu w K$.

De coëfficiënt ν, die alleen bij meeratomige gassen voorkomt (immers bij eenatomige is E en dus ν 0) wordt hier voor zoover ik weet, voor het eerst ingevoerd. Van zijne beteekenis zal men zich het best op de volgende wijze eene voorstelling kunnen vormen.

Wanneer een gas in een stationnairen toestand van rust verkeert bestaat er eene zekere betrekking tusschen het arbeidsvermogen A_1 van de voortgaande beweging der moleculen en de

intramoleculaire energie A_2; voor de massa-eenheid zijn zij $\frac{1}{2}h$ en $\vartheta(h)$. Anders is de zaak als de toestand veranderlijk is. Wordt b. v. een gas samengedrukt, dan stijgt de bewegingssnelheid der moleculen, en dus h, en tengevolge van de botsingen zal nu ook A_2 toenemen. Er zal intusschen een zekere tijd noodig zijn, om A_2 de waarde $\vartheta(h)$ te doen aannemen, die in den stationnairen toestand aan de waarde van A_1 zou beantwoorden. Gedurende het verloop van de samendrukking, terwijl h stijgt, zal $A_2 < \vartheta(h)$ zijn.

Dit wordt nu door de constante ν aangegeven. Bij eene samendrukking heeft n. l. K eene zekere waarde en νK bepaalt nu juist, hoeveel A_2 van $\vartheta(h)$ verschilt. Daar gedurende eene samendrukking K negatief is en $A_2 < \vartheta(h)$ moet zijn, moet ν eene positieve waarde hebben.

Ongelukkigerwijze schijnt op een experimenteele bepaling van ν weinig uitzicht te zijn. Want alleen bij dichtheidsveranderingen, die veel sneller geschieden dan bij de gewone proeven over luchttrillingen het geval is zou ν een merkbarèn invloed kunnen hebben.

Vatten wij nu ten slotte het in deze § gevondene samen en vereenigen wij de waarden van P'_x, enz. met de in § 3 voor P_x, enz. gevondene, dan verkrijgen wij thans:

$$P_x = \frac{1}{m}\left[\frac{1}{3}\delta h + \delta u^2 - 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2}{3}\mu K\right], \text{ enz.}$$

$$Q_{x,y} = \frac{1}{m}\left[\delta u v - \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right], \text{ enz.}$$

$$R = \frac{1}{2}\delta(u^2 + v^2 + w^2) + \frac{1}{2}\delta(h + 2\vartheta(h)) + \nu K,$$

$$S_x = \frac{1}{2}\delta u\left[\frac{5}{3}h + 2\vartheta(h) + (u^2 + v^2 + w^2)\right] - \frac{\varkappa}{e}\frac{\partial h}{\partial x} -$$
$$-\mu\left[v\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + w\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right] -$$
$$-2\mu u\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{2}{3}\mu + \nu\right)u K, \text{ enz.}$$

Door deze waarden in de algemeene vergelijkingen (a_1), (b_1), (c_1) over te brengen verkrijgt men ten slotte de bewegingsvergelijkingen. Ik laat hier die substitutie achterwege, daar de uitkomst zeer gecompliceerd is, te meer omdat men strikt genomen μ, $\varkappa$ en ν als functiën van h moet beschouwen Alleen doe ik opmerken, dat, wanneer van de veranderlijkheid van μ wordt afgezien, de vergelijkingen (b_1) een vorm aannemen, overeenkomende met dien, waarin ook MAXWELL ze verkreeg *).

Bepaalt men zich tot eene oneindig kleine verstoring van den evenwichtstoestand, dan mag men μ, $\varkappa$ en ν als constanten beschouwen. Ziet men bovendien van de werking van uitwendige krachten af, en voert men evenals in § 3 het teeken s voor de condensatie in, dan worden de bewegingsvergelijkingen:

$$K + \frac{\partial s}{\partial t} = 0\,, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a_4)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{3}\frac{\partial(h + h_o s)}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\mu}{\delta_o}\Delta u - \frac{1}{3}\frac{\mu}{\delta_o}\frac{\partial K}{\partial x} &= 0,\\
\frac{1}{3}\frac{\partial(h + h_o s)}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\mu}{\delta_o}\Delta v - \frac{1}{3}\frac{\mu}{\delta_o}\frac{\partial K}{\partial y} &= 0,\\
\frac{1}{3}\frac{\partial(h + h_o s)}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\mu}{\delta_o}\Delta w - \frac{1}{3}\frac{\mu}{\delta_o}\frac{\partial K}{\partial z} &= 0,
\end{aligned}\right\} \ldots (b_4)$$

$$\frac{1}{3} h_o K + \frac{1}{2}(1 + 2\vartheta'(h_o))\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\varkappa}{\delta_o e}\Delta h + \frac{\nu}{\delta_o}\frac{\partial K}{\partial t} = 0 \ldots (c_4)$$

*) *Phil. Mag.* (4) XXXV, p. 209.

DE VOORTPLANTING

VAN

VLAKKE GELUIDSGOLVEN IN GASSEN

VOLGENS DE KINETISCHE GASTHEORIE.

DOOR

R. A. MEES.

EERSTE GEDEELTE.

Het ligt niet in ons plan in deze verhandeling de vorming en de voortplanting van de geluidsgolven in gassen volgens de kinetische gastheorie in haar geheelen omvang te behandelen. Zoo laten wij het *ontstaan* der geluidsgolven geheel buiten beschouwing. Wij nemen die golven als reeds bestaande aan en laten geheel in het midden op welke wijze zij zijn voortgebracht. Doch in het eerste gedeelte dezer verhandeling beperken wij ons in de behandeling van ons onderwerp nog meer. Wij willen toch niet onderzoeken, of de wijze, waarop tegenwoordig velen de geluidsgolven in gassen opvatten, met de beginselen der kinetische gastheorie volkomen in overeenstemming is, en of volgens deze theorie een voortdurende golfbeweging tot de mogelijkheden behoort. Die mogelijkheid nemen wij eenvoudig als gegeven aan.

Wij wenschen in dit eerste gedeelte in de eerste plaats aan te geven, hoe men den bewegingstoestand van de gassen in geluidsgolven volgens de kinetische gastheorie naar onze zienswijze zeer waarschijnlijk heeft op te vatten, m. a. w. wij wenschen de denkbeelden, die men op experimenteelen en theoretischen weg omtrent den aard dier golfbeweging verkregen heeft, in de taal der kinetische gastheorie over te zetten. En

in de tweede plaats wenschen wij eenige voorwaarden aan te geven, waaraan die bewegingstoestand in de geluidsgolven moet voldoen.

Wij zullen ons voor de eenvoudigheid tot *vlakke* geluidsgolven bepalen, en zullen bij de behandeling van deze ongeveer denzelfden weg volgen, dien CLAUSIUS in zijn klassieke verhandeling *) over de warmte-geleiding in gassen met zoo goeden uitslag gevolgd heeft.

In een reeds bestaande vlakke geluidsgolf beschouwen wij een door twee evenwijdige vlakken begrensde oneindig dunne laag loodrecht op de richting van voortplanting der golf, welke richting wij als positieve x-as aannemen. De laag bevinde zich op den afstand x van den oorsprong van coördinaten en hebbe een dikte dx. Van die laag zullen wij in het vervolg altijd slechts een gedeelte beschouwen, waarvan de doorsnede loodrecht op de x-as een oppervlak $= 1$ heeft, zoodat de laag van dikte dx ook een volumen dx bezit.

In die laag zullen van de moleculen, die haar passeeren gedurende den oneindig korten tijd dt, een zeker aantal met elkander in botsing komen en haar na de botsing weder verlaten. Wij willen deze met CLAUSIUS de door de laag *uitgezonden* moleculen noemen. De moleculen, die de laag gedurende den tijd dt passeeren, zullen zich in het algemeen in allerlei richtingen en met allerlei snelheden bewegen. Daar wij echter met een geluidsgolf te doen hebben zullen die moleculen én wat haar aantal én wat haar snelheid betreft niet gelijkelijk over alle richtingen verdeeld zijn, maar zullen zich hetzij in de richting der positieve x, hetzij in die der negatieve x meer moleculen bewegen dan in andere richtingen, terwijl ook de snelheid van beweging niet in alle richtingen volkomen dezelfde zal zijn; de moleculen, die zich naar de zijde der positieve x bewegen, zullen gemiddeld een hetzij iets grootere hetzij iets kleinere snelheid bezitten dan die welke zich naar de zijde der negatieve x bewegen. Komen dus twee der moleculen dezer laag met elkander

*) R. CLAUSIUS, *Abhandlungen über die mechanische Wärmetheorie,* 2e Abtheilung, p. 277.

in botsing, dan zullen zij gemiddeld een kleine beweging hetzij in de richting der positieve hetzij in die der negatieve x-as gemeen hebben; m. a. w. het zwaartepuut der beide moleculen vóór de botsing zal gemiddeld een kleine beweging bezitten in de richting hetzij der positieve hetzij der negatieve x-as. Die kleine beweging van het zwaartepunt der moleculen zal bij de botsing geen verandering ondergaan en dus na de botsing even groot zijn dan daarvóór, terwijl de betrekkelijke beweging van de beide moleculen vóór de botsing, nadat deze heeft plaats gehad, alle mogelijke richtingen kan bezitten, zoodat geen richting boven de andere eenige meerdere waarschijnlijkheid bezit.

Omtrent de door de laag uitgezonden moleculen kunnen wij dus aannemen, dat zij behalve een voor alle richtingen gelijke snelheid tevens nog een kleine snelheid bezitten in de positieve richting der x-as. Deze laatste snelheid zal voor de verschillende paren van moleculen, die met elkander in botsing zijn geweest, niet volkomen dezelfde behoeven te zijn, maar wij zullen voor haar een gemiddelde waarde p aannemen, die wij ons zoo klein zullen denken, dat wij de tweede en hoogere machten van p kunnen verwaarloozen.

Noemen wij nu U de geheele gemiddelde snelheid van een molecule, die wordt uitgezonden in een richting, die met de positieve x-as een hoek maakt, waarvan de cosinus μ bedraagt, en zij u de snelheid voor zulk een molecule, die in een richting loodrecht op de x-as wordt uitgezonden, dan is:

$$U = u + p\mu \dots\dots\dots\dots (1)$$

Niet in alle richtingen zal de laag even veel moleculen uitzenden. Noemen wij $^1/_2\, H\, d\mu$ de verhouding tusschen het aantal in den tijd dt uitgezonden moleculen, wier bewegingsrichting een zoodanige is, dat haar richtings-cosinus gelegen is tusschen μ en $\mu + d\mu$, tot het geheele aantal in denzelfden tijd in alle richtingen uitgezonden moleculen, dan is:

$$H = 1 + 2\frac{p}{u}\mu \dots\dots\dots\dots (2)$$

Door deze beide formules is de snelheid en het betrekkelijk

aantal van de in een bepaalde richting door de laag uitgezonden moleculen volkomen bepaald *).

De bewegingstoestand in de laag en dus ook die van de door haar uitgezonden moleculen is voor eenzelfde laag van oogenblik tot oogenblik veranderlijk, en op een gegeven oogenblik verschilt hij van laag tot laag. Die bewegingstoestand is periodisch veranderlijk volgens de abscis x en den tijd t. Hetzelfde moet dus ook gelden van p, U en H en waarschijnlijk ook van u. Ook deze grootheden nemen wij dus als veranderlijk aan en wel als periodisch veranderlijk volgens x en t.

Beschouwen wij nu in de tweede plaats de moleculen, die zich *gelijktijdig* in de laag bevinden. Van deze mogen die, welke een bewegingsrichting hebben, waarvan de richtingscosinus μ bedraagt, een gemiddelde snelheid V bezitten. Deze moleculen zullen, vóórdat zij in onze laag aankwamen, na haar laatste botsing in het algemeen reeds een zekeren weg hebben afgelegd, waarvan de middelwaarde ε moge bedragen. Zij zullen dus de snelheid bezitten van de moleculen, die door de laag met abscis $x - \mu\varepsilon$ op den tijd $t - \frac{\varepsilon}{V}$ in de richting μ zijn uitgezonden. Wanneer wij ons bepalen tot de eerste macht van ε, krijgen wij dus voor V de uitdrukking:

$$V = U - \left(\frac{dU}{dx}\mu + \frac{dU}{dt}\cdot\frac{1}{V}\right)\varepsilon.$$

Nu zullen wij in het eerste gedeelte dezer verhandeling de termen, die ε bevatten, verwaarloozen, daar deze termen én wegens de kleine waarde van ε én wegens de kleine waarde van $\frac{dU}{dx}$ en $\frac{1}{V}\frac{dU}{dt}$ zeer klein kunnen geacht worden niet slechts ten opzichte van u, maar ook ten opzichte van p. In dit geval kunnen wij voor V eenvoudig schrijven:

$$V = u + p\mu. \qquad \qquad (3)$$

---

*) Over de afleiding der formules (1) en (2) kan men raadplegen CLAUSIUS, l. c., pp. 286—289.

Het aantal moleculen per éénheid van volumen in de laag aanwezig zij N, dus het aantal moleculen in de laag voorhanden $N\,dx$. Van deze laatste bewegen zich een aantal

$$\frac{1}{2} N\, I\, d\mu\, dx$$

in de richting, wier richtingscosinus tusschen μ en $\mu + d\mu$ gelegen is. Dan zal I van den vorm zijn:

$$I = 1 + r\,\mu.$$

Het is gemakkelijk in te zien, dat I door dezelfde uitdrukking moet worden voorgesteld als H, dat dus $r = 2\frac{p}{u}$ moet zijn *). Ten overvloede kunnen wij dit ook als volgt aantoonen.

Noemen wij †)

$$a\, dt$$

de waarschijnlijkheid, dat een molecule, die zich met een snelheid v in onze laag voortbeweegt in een richting, die met de positieve x-as den hoek η maakt, in den tijd dt met een andere molecule der laag in botsing kome, dan is:

$$a = \pi\, \varrho^2\, N\, R,$$

wanneer ϱ den straal der werkingsspheer eener molecule voorstelt, en R de gemiddelde waarde van de betrekkelijke snelheid van de beschouwde molecule ten opzichte van de overige moleculen der laag. Voor R vinden wij op volkomen dezelfde wijze als CLAUSIUS t. a. p.

$$R = \frac{4}{3}\left(u + \frac{1}{2}\,\delta - \frac{1}{10}\left(\frac{p}{u} + 2\,r\right)\cos\eta\right),$$

---

*) Men ziet, dat onze opvatting van den bewegingstoestand in de geluidsgolven bijna geheel overeenstemt met die van J. L. HOORWEG in zijn verhandeling „Sur la propagation du son après la nouvelle théorie des gaz." *Archives Neerlandaises*, T. XI, p. 131.

†) In de hier volgende afleiding van de waarde van r volgen wij denzelfden weg als CLAUSIUS, l. c., pp. 305—315.

als wij voor v schrijven $u + \delta$, en in het oog houden, dat in ons geval v van u hoogstens kan verschillen om een grootheid van de orde van p, zoodat wij de tweede en hoogere machten van δ en de produkten van δ met p en r kunnen verwaarloozen.

Dus is:

$$a = \frac{4}{3} \pi \varrho^2 N \left(u + \frac{1}{2} \delta - \frac{1}{10} \left(\frac{p}{u} + 2 r \right) \cos \eta \right).$$

Wij wenschen nu te bepalen het aantal moleculen $M\, dx\, dt$, die in den tijd dt in onze laag in botsing komen, en de geheele hoeveelheid van beweging $M'\, dx\, dt$ in de richting der positieve x-as, die al deze moleculen te zamen vóór hare botsing bezitten.

Voor de berekening van M en M' hebben wij de formules:

$$M = \frac{1}{2} N \int_{-1}^{+1} I \bar{a}\, d\mu,$$

$$M' = \frac{1}{2} m N \int_{-1}^{+1} I\, V \bar{a}\, \mu\, d\mu,$$

als $\bar{a}$ de waarde van a aangeeft, wanneer δ vervangen is door $p \mu$, en $\cos \eta$ door μ.

De berekening geeft:

$$M = \frac{4}{3} \pi \varrho^2 N^2 u$$

en:

$$M' = \frac{4}{3} \pi \varrho^2 N^2 u^2 \cdot \frac{1}{3.5} m \left(7 \frac{p}{u} + 4 r \right)$$

$$= \frac{1}{15} m M (7 p + 4 r u).$$

Daar dezelfde moleculen, die in onze laag in botsing komen, de door de laag uitgezonden moleculen zijn, worden in den tijd dt ook $M\, dx\, dt$ moleculen uitgezonden. Deze bezitten te zamen een hoeveelheid van beweging in de richting der positieve x-as

$$M\, dx\, dt \,.\, m\, p.$$

Maar bij de botsing komt geen verandering in de geheele hoeveelheid van beweging der botsende moleculen. Deze moet dus voor de $M\,dx\,dt$ moleculen, die in den tijd dt in onze laag in botsing komen, vóór en na de botsing dezelfde waarde hebben. Dus moet zijn:

$$M'\,dx\,dt = M\,dx\,dt\,.\,p\,m,$$

of:

$$\frac{1}{15}(7\,p + 4\,r\,u) = p,$$

$$r = 2\,\frac{p}{u}.$$

Dus is wezenlijk, zooals wij boven beweerden

$$I = 1 + 2\,\frac{p}{u}\,\mu \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Door V, N en I is de bewegingstoestand der gelijktijdig in onze laag zich bevindende moleculen volkomen bepaald.

Door middel van deze grootheden kunnen wij nu gemakkelijk berekenen de geheele hoeveelheid van beweging in de richting der positieve x-as of, zooals wij het noemen willen, de positieve hoeveelheid van beweging, en de geheele energie van al de $N\,dx$ moleculen samen, die zich gelijktijdig in onze laag bevinden. Noemen wij deze hoeveelheid van beweging en deze totale energie der laag $K\,dx$ en $L\,dx$, dan is:

$$K = \frac{1}{2}\,m\,N\int_{-1}^{+1} I\,V\,\mu\,d\mu$$

en

$$L = \frac{1}{2}\,N\int_{-1}^{+1} I\,l\,d\mu,$$

wanneer l de totale energie eener molecule voorstelt, die zich in de richting μ met de snelheid V voortbeweegt.

Voor l vinden wij de waarde als volgt.

De levende kracht van de voortgaande beweging der molecule is:

$$\frac{1}{2} m V^2 = \frac{1}{2} m u^2 + m p u \mu.$$

Maar CLAUSIUS heeft aangetoond *), dat de levende kracht van de voortgaande beweging van de molecule niet de geheele energie der molecule uitmaakt. De molecule kan toch behalve hare voortgaande beweging misschien ook nog een draaiende beweging bezitten, en ook de atomen, die de molecule samenstellen, kunnen energie bezitten zoowel kinetische energie wegens de bewegingen, welke de atomen binnen de molecule ten opzichte van elkander uitvoeren, als ook potentieele energie die bepaald wordt door de plaats welke die atomen ten opzichte van elkander innemen en door de krachten, waarmede die atomen op elkander werken.

En CLAUSIUS heeft verder aangetoond, dat bij eenzelfde gas de verhouding tusschen de levende kracht van de voortgaande beweging der moleculen en de totale energie der moleculen een constante is, zoodat men die levende kracht slechts met een voor elk gas bepaalde constante k te vermenigvuldigen heeft om de totale energie der moleculen te vinden.

Met de levende kracht $\frac{1}{2} m u^2$ der molecule komt dus gemiddeld een totale energie $\frac{1}{2} k m u^2$ der molecule overeen. De tweede term in de bovenstaande uitdrukking der levende kracht der molecule zal echter niet evenals de eerste term met k moeten vermenigvuldigd worden; want deze tweede term is afkomstig van de gemeenschappelijke snelheid p van alle moleculen der laag in de richting der x-as, en zulk een gemeenschappelijke snelheid van alle moleculen in dezelfde richting zal niet evenals de beweging der moleculen in alle richtingen door elkander tot nog een nieuwe hoeveelheid energie der moleculen aanleiding geven. Een stroomende beweging van het gas in massa zal toch in de draaiende beweging der moleculen of in de energie der atomen binnen de moleculen geen verandering brengen. Willen wij dus de gemiddelde totale energie onzer molecule vinden, dan hebben

*) *Abhandlungen*, 2e Abtheilung, pp. 256—259.

wij slechts den eersten maar niet den tweeden term in de uitdrukking voor de levende kracht van de voortgaande beweging der molecule met k te vermenigvuldigen. Voor deze gemiddelde totale energie onzer molecule verkrijgen wij dus de uitdrukking:

$$l = \frac{1}{2} k m u^2 + m p u \mu \text{ *)}.$$

Met deze waarde van l en met de formules (3) en (4) voor V en I worden de uitdrukkingen voor K en L:

$$K = m N p \qquad (5)$$

$$L = {}^1/_2\, k m N u^2 \qquad (6)$$

Wij merken op, dat

$$\frac{K\, d x}{m N\, d x} = p \qquad (7)$$

kan beschouwd worden als de snelheid in de richting der positieve x-as van onze laag in haar geheel.

Wij hebben nu nog eenige formules op te stellen voor de

---

*) Wij hebben hier aangenomen, dat de energie van de draaiende beweging der moleculen en die van de atomen binnen de moleculen voortdurend en overal in een zelfde constante betrekking staan tot de energie van de voortgaande beweging der moleculen. A priori is deze veronderstelling bij de groote snelheid waarmede deze laatste energie in eenzelfde laag met den tijd en op denzelfden tijd van laag tot laag verandert verre van zeker. Het zou kunnen zijn, dat bij de snelle periodieke verandering van de energie der voortgaande beweging de overige energie der moleculen in het geheel niet veranderde. Dan ware:

$$l = {}^1/_2\, m u^2 + {}^1/_2 (k - 1)\, m u_0^2 + m p u \mu\,,$$

wanneer u_0 de gemiddelde snelheid der moleculen voorstelt, wanneer geen geluidsgolf aanwezig is.

Deze veronderstelling en die in den tekst gebruikt zijn de beide grens-veronderstellingen, die men maken kan. Tusschen deze in liggen de veronderstellingen, waarbij wordt aangenomen, dat bij snelle verandering van de energie der voortgaande beweging de overige energie der moleculen slechts ten deele in die verandering deelt. Zulk een veronderstelling zou mij a priori zelfs het meest waarschijnlijk voorkomen en is misschien bij *zeer* snelle veranderingen in den toestand van het gas de juiste. Bij de snelheid van verandering, zooals bij de geluidsgolven voorkomt, schijnt echter de in den tekst gemaakte veronderstelling met de waarheid het meest overeen te komen; ten minste slechts zij leidt tot een formule voor de voortplantingssnelheid van het geluid, die met de algemeen aangenomene overeenstemt.

moleculen, die in den tijd dt door een vlak gaan loodrecht op de x-as. Voor dat vlak nemen wij het eerste grensvlak van de door ons beschouwde laag. Door dit vlak gaan in den tijd dt in die richtingen, wier cosinus tusschen μ en $\mu + d\mu$ gelegen is, een aantal moleculen *):

$$^1/_2 N I V \mu \, d\mu \, dt. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Is in deze uitdrukking μ positief, dan gaan de moleculen door het vlak van de zijde der negatieve naar die der positieve x; is μ negatief dan gaan zij door het vlak in omgekeerde richting.

Noemen wij $E\,dt$ het aantal moleculen, dat ons vlak in den tijd dt meer passeert in positieve dan in negatieve richting, dan is:

$$E = \frac{1}{2} N \int_{-1}^{+1} I V \mu \, d\mu = N p. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

De moleculen (8) voeren door ons vlak in den tijd dt een hoeveelheid van beweging evenwijdig aan de x-as:

$$\frac{1}{2} N I V \mu \, d\mu \, dt \, . \, m V \mu = \frac{1}{2} m N I V \mu^2 \, d\mu \, dt. \, . \, (10)$$

Deze uitdrukking is, welk ook het teeken van μ moge zijn, altijd positief. Voor μ positief stelt zij de positieve hoeveelheid van beweging voor, die door de moleculen van de negatieve naar de positieve zijde door het vlak wordt overgevoerd, voor μ negatief daarentegen de negatieve hoeveelheid van beweging †), die de moleculen van de positieve naar de negatieve zijde door het vlak overvoeren. Daar nu zoowel de doorgang van positieve hoeveelheid van beweging in positieve richting door ons vlak als die van negatieve hoeveelheid van beweging in negatieve richting een toename van de positieve hoeveelheid van beweging aan de positieve zijde van ons vlak tengevolge heeft, stelt de uitdrukking (10) in het algemeen de toename voor van de po-

*) Men zie hierover CLAUSIUS, l. c., pp. 298—302.

†) D. i. de hoeveelheid van beweging in de richting der negatieve x-as.

sitieve hoeveelheid van beweging aan de positieve zijde van ons vlak, bewerkt door den doorgang door dat vlak van de moleculen (8). Noemen wij dus $F\,dt$ de toename van de positieve hoeveelheid van beweging aan de positieve zijde van ons vlak, welke het gevolg is van al de door het vlak in den tijd dt gepasseerde moleculen, dan is:

$$F = {}^1/_2\, m\, N \int_{-1}^{+1} I\, V^2 \mu^2\, d\mu = \frac{1}{3}\, m\, N u^2. \quad . \; . \; . \; (11)$$

De moleculen (8) voeren door ons vlak een hoeveelheid energie:

$$\frac{1}{2}\, N\, I\, V \mu\, d\mu\, dt\,.\, l. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (12)$$

Noemen wij nu $G\,dt$ de hoeveelheid energie, die de moleculen in den tijd dt meer overvoeren door ons vlak in positieve dan in negatieve richting, of de toename van de energie in den tijd dt aan de positieve zijde van ons vlak, dan is:

$$G = \frac{1}{2} N \int_{-1}^{+1} I\, V l\, \mu\, d\mu = \frac{2 + 3k}{6}\, m\, N u^2\,.\, p. \; . \; . \; (13)$$

In de formules, die wij tot hiertoe hebben afgeleid, blijkt niets van de veranderlijkheid der daarin voorkomende grootheden met x en t. Dit komt hiervandaan, dat wij de termen, die ε bevatten, hebben verwaarloosd. Hierdoor hebben wij den invloed van de verschillende gaslagen op elkander geheel buiten rekening gelaten, en alleen den bewegingstoestand der gasmoleculen nagegaan in één enkele laag onafhankelijk van dien in de aangrenzende lagen.

In het volgende willen wij nu echter dien invloed der verschillende gaslagen op elkander in rekening brengen en daartoe de in onze formules voorkomende grootheden als met x en t veranderlijk beschouwen.

Volgens formule (9) is het aantal moleculen, dat in den tijd dt onze laag door haar eerste grensvlak meer intreedt dan uittreedt:

$$E\, dt.$$

Door het tweede grensvlak onzer laag treden in denzelfden tijd meer uit dan in een aantal moleculen:

$$\left(E + \frac{dE}{dx} dx\right) dt.$$

In den tijd dt vermeerdert dus het aantal moleculen in onze laag om:

$$E\,dt - \left(E + \frac{dE}{dt} dx\right) dt.$$

Doch deze vermeerdering van het aantal moleculen in onze laag in den tijd dt kunnen wij ook voorstellen door:

$$\frac{d\,(N\,dx)}{dt} dt.$$

Door deze beide uitdrukkingen aan elkander gelijk te stellen, verkrijgen wij:

$$\frac{dN}{dt} = - \frac{dE}{dx} \text{. . . . . (14}$$

Eveneens zal de toename van de positieve hoeveelheid van beweging en van de energie in onze laag in den tijd dt kunnen worden gelijkgesteld aan de hoeveelheid van beweging en de energie, die in denzelfden tijd door het eerste grensvlak onzer laag meer naar binnentreedt dan er door het tweede grensvlak uittreedt. Dit leidt ons tot de beide volgende vergelijkingen:

$$\frac{dK}{dt} = - \frac{dF}{dx} \text{ . . . . (15)}$$

en:

$$\frac{dL}{dt} = - \frac{dG}{dx} \text{. . . . . (16)}$$

Nu zijn echter N, K en L periodische functiën van x en t, en als wij een golf beschouwen, die zich in de richting der positieve x voortplant, en de voortplantingssnelheid dier golf

door a voorstellen, zijn N, K en L functiën van $x - at$, en gelden voor haar dus de vergelijkingen:

$$\frac{dN}{dt} = -a\frac{dN}{dx},\ \frac{dK}{dt} = -a\frac{dK}{dx},\ \frac{dL}{dt} = -a\frac{dL}{dx}. \quad . \quad (17)$$

Door deze vergelijkingen te verbinden met (14), (15) en (16) verkrijgen wij:

$$a\frac{dN}{dx} = \frac{dE}{dx},\ a\frac{dK}{dx} = \frac{dF}{dx},\ a\frac{dL}{dx} = \frac{dG}{dx} \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

of na integratie:

$$aN - E = \alpha,\quad aK - F = \beta,\quad aL - G = \gamma, \quad . \quad . \quad (19)$$

waarin α, β, γ drie nader te bepalen constanten voorstellen.

Door in (19) voor K, L, E, F, G, de waarden te stellen uit de formules (5), (6), (9), (11) en (13), verkrijgen wij:

$$N(a - p) = \alpha$$

$$m\,N p\,a - {}^1/_3\, m\,N u^2 = \beta$$

$${}^1/_2\, k m\,N u^2 \,.\, a - \frac{2 + 3\,k}{6}\, m\,N u^2 \,.\, p = \gamma.$$

Deze formules moeten gelden voor alle waarden van p. Zij moeten dus ook blijven gelden, als men p tot nul doet naderen. Hierdoor is de beteekenis der constanten α, β, γ bepaald. Noemen wij toch N_0, u_0 de waarden van N, u voor het geval, dat geen geluidsgolf in het gas bestaat dus p nul is, dan is:

$$\alpha = N_0\, a,\quad \beta = -{}^1/_3\, m\,N_0\, u_0^2,\quad \gamma = \frac{1}{2}\, k\,m\,N_0\, u_0^2\, a.$$

Hierdoor gaan de voorgaande formules over in de volgende:

$$N(a - p) = N_0\, a$$

$${}^1/_3\, N u^2 - N p\, a = {}^1/_3\, N_0\, u_0^2$$

$$N u^2 \left(a - \frac{2 + 3\,k}{3\,k}\, p\right) = N_0\, u_0^2\, a$$

welke wij ook den volgenden vorm kunnen geven:

$$N = N_0 \left(1 + \frac{p}{a}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

$$N u^2 = N_0 u_0^2 + 3 N_0 p a = N_0 u_0^2 \left(1 + 3 \frac{a}{u_0^2} p\right) . (21)$$

$$N u^2 = N_0 u_0^2 \left(1 + \frac{2 + 3k}{3k} . \frac{p}{a}\right) \ldots\ldots\ldots (22)$$

Van de beide laatste vergelijkingen is de eerste de uitdrukking voor de voortplanting van de positieve hoeveelheid van beweging, de tweede de uitdrukking voor de voortplanting der energie. De voortplantingssnelheid moet noodzakelijk voor de hoeveelheid van beweging en voor de energie dezelfde waarde hebben; maar zoo a in beide vergelijkingen dezelfde waarde heeft, kan aan beide vergelijkingen tegelijk alleen voldaan worden wanneer:

$$3 \frac{a}{u_0^2} = \frac{2 + 3k}{3k} . \frac{1}{a}$$

of:

$$a = \sqrt{\frac{2 + 3k}{9k}} . u_0 \ldots\ldots\ldots (23)$$

is. De kinetische gastheorie vordert dus deze betrekking tusschen de voortplantingssnelheid a der geluidsgolven en de gemiddelde snelheid u_0 der gasmoleculen, waarbij is op te merken, dat u_0 de gemiddelde snelheid volgens CLAUSIUS voorstelt, d. w. z. den vierkantswortel uit de gemiddelde waarde van het kwadraat van de snelheid der gasmoleculen. Dit blijkt terstond uit de formules (21) en (22), waarvan de formule (23) het gevolg is.

Noemen wij nu $\varkappa$ de verhouding tusschen de soortelijke warmten bij constant volumen en bij constanten druk, dan is volgens CLAUSIUS *);

$$\frac{1}{k} = {}^3/_2 (\varkappa - 1)$$

*) l. c. p. 258, formule (12).

dus:

$$\frac{2+3k}{9k}=\frac{\varkappa}{3}$$

en:

$$a=\sqrt{\frac{\varkappa}{3}}\cdot u_o \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23^a)$$

Doch deze formule blijkt identisch te zijn met de formule van LAPLACE, als men in het oog houdt, dat voor de drukking P_o en de dichtheid ϱ_o van het gas voor het geval, dat geen geluidsgolf in het gas bestaat, de formules gelden:

$$P_o = {}^1/_3\, m\, N_o\, u_o^2 \quad \text{en} \quad \varrho_o = m\, N_o$$

Wij vinden dan toch:

$${}^1/_3\, u_o^2 = \frac{P_o}{\varrho_o}$$

en:

$$a^2 = \varkappa \frac{P_o}{\varrho_o},$$

de formule van LAPLACE.

Voor die gassen, zooals o. a. voor kwikzilvergas, waarvoor $k=1$ is, wordt (23):

$$a=\frac{\sqrt{5}}{3}u_o,$$

een formule, waartoe volgens TOLVER PRESTON *) MAXWELL reeds vroeger moet gekomen zijn.

Zooals bekend is, kunnen de verdichtingen en verdunningen in een geluidsgolf geacht worden plaats te hebben volgens een adiabatisch proces. Indien wij dus onder P en ϱ drukking en dichtheid van het gas verstaan in een bepaalde laag van de geluidsgolf, dan moet volgens de mechanische warmte-theorie tusschen P en ϱ de betrekking bestaan:

$$\frac{P}{\varrho^{\varkappa}} = \text{constante}.$$

*) S. TOLVER PRESTON vermeldt dit in een post-scriptum op zijn verhandeling over de Mode of the propagation of sound, and the physical condition determining its velocity on the basis of the kinetic theory of gases. *Phil. Mag.*, 5th Series, t. 3, pp. 441—458.

Dat aan deze betrekking voldaan wordt door den bewegingstoestand in de geluidsgolf, zooals die door ons uit de kinetische gastheorie is afgeleid, blijkt uit onze formules (20) en (22) Volgens deze is namelijk:

$$P = {}^1/_3\, m\, N u^2 = {}^1/_3\, m\, N_o\, u_o^2 \left(1 + \frac{2 + 3\,k}{3\,k} \cdot \frac{p}{a}\right)$$

$$= {}^1/_3\, m\, N_o\, u_o^2 \left(1 + \varkappa \frac{p}{a}\right)$$

$$\varrho = m\, N = m\, N_o \left(1 + \frac{p}{a}\right)$$

dus:

$$\varrho^\varkappa = (m\, N_o)^\varkappa \left(1 + \varkappa \frac{p}{a}\right)$$

en:

$$\frac{P}{\varrho^\varkappa} = \frac{{}^1/_3\, m\, N_o\, u_o^2}{(m\, N_o)^\varkappa} = \frac{P_o}{\varrho_o^\varkappa} = \text{constante},$$

zoodat onze formules ook met de uitkomsten der mechanische warmte-theorie in overeenstemming blijken te zijn.

Uit de formule (20) volgt, dat de verdichting het grootst is op die plaatsen waar de trillingssnelheid haar grootste waarde heeft in de richting van voortplanting der golf, de verdunning daarentegen daar waar die trillingssnelheid haar grootste waarde heeft in de richting tegengesteld aan die van de voortplanting der golf.

Dit zelfde geldt ook voor een teruggaande golf, die zich in de richting der negatieve x voortplant, zooals blijkt wanneer men in de formule (20) het teeken van a eenvoudig omkeert.

Een staande golf ontstaat uit de interferentie van een heengaande en een teruggaande golf. Voor zulk een staande golf worden de formules:

$$N = N_o \left(1 + \frac{p - p'}{a}\right)$$

$$N u^2 = N_o\, u_o^2 \left(1 + \varkappa \frac{p - p'}{a}\right)$$

wanneer p de trillingssnelheid in de heengaande, p' die in de teruggaande golf voorstelt.

De formule voor N leert ons, dat de grootste veranderingen in dichtheid plaats grijpen op die plaatsen, waar p en p' voortdurend het tegengestelde teeken hebben, de trillingssnelheid dus haar kleinste waarde heeft; en dat de veranderingen in dichtheid het kleinst zijn op die plaatsen, waar p en p' hetzelfde teeken hebben, de trillingssnelheid dus haar grootste waarde heeft. Door onze formule wordt dus de plaats der knoopen en buiken in een staande golf goed aangegeven.

De formule voor Nu^2 stelt ons in staat de grootte van de trillingssnelheid p in een golf te bepalen, wanneer de grootte van de afwisselingen in druk op de plaats der knoopen in een staande golf bekend is. Nu heeft KUNDT *) bij een gedekte orgelpijp van ongeveer 1 voet lengte proefondervindelijk gevonden, dat bij een krachtigen toon de druk in de knoop afwisselend om $^1/_{32}$ atmospheer boven den normalen druk steeg en evenveel daar onder daalde. Noemen wij dus P_1 de maximumdrukking in de knoop, P_o de normale drukking, dan was bij KUNDT:

$$\frac{P_1 - P_o}{P_o} = {}^1/_{32}.$$

Maar, wanneer wij p_1 de maximum-trillingssnelheid noemen in elk der beide voortgaande golven, die de staande golf in de orgelpijp hebben voortgebracht, dan is:

$$\frac{P_1 - P_o}{P_o} = \frac{{}^1/_3\, mN_1u_1^2 - {}^1/_3\, mN_ou_o^2}{{}^1/_3\, m N_o u_o^2} = 2\varkappa \frac{p_1}{a},$$

Dus is in het geval van KUNDT:

$$2\varkappa \frac{p_1}{a} = {}^1/_{32}.$$

*) POGG. *Ann* t. 134, p. 565.

Derhalve, als wij $\varkappa = 1{,}4$, $a = 340$ stellen,

$$2 p_1 = 7{,}6 \text{ meters ongeveer,}$$
$$p_1 = 3{,}8 \text{ meters.}$$

Bij KUNDT bedroeg de maximum-trillingssnelheid in de buiken der staande golf dus ongeveer 7,6 meters, die in elk der beide voortgaande golven 3,8 meters.

Dat de waarde van p_1 in een voortgaande golf echter in den regel veel kleiner zal zijn, mag wel als zeer zeker worden aangenomen.

RAYLEIGH *) berekent voor een geluidsgolf, die hij nog duidelijk kon hooren:

$$p_1 = 0{,}037 \text{ centimeters}$$

en meent, dat het geluid bij een tienmaal kleinere waarde van p_1 nog wel hoorbaar zal zijn. Wij zien hieruit, dat p_1 bij de geluidsgolven in de lucht tusschen wijde grenzen kan variëeren.

Bij RAYLEIGH stelt p_1 eigenlijk de maximum-trillingssnelheid der lucht*lagen* in de geluidsgolf voor, maar ook wij kunnen volgens formule (7) p_1 als zoodanig opvatten. Ook bij de opvatting der geluidsgolven in gassen volgens de kinetische gastheorie kan men toch, het blijkt genoegzaam uit de voorgaande beschouwingen, van een trillende beweging der verschillende gas*lagen* spreken, niettegenstaande de moleculen, die zulk een gaslaag samenstellen niet voortdurend dezelfde zijn, maar telkens door andere uit aangrenzende gaslagen vervangen worden.

TWEEDE GEDEELTE.

Hebben wij in het eerste gedeelte dezer verhandeling de vraag geheel laten rusten, of onze opvatting van den bewegingstoestand der gasmoleculen in een geluidsgolf in overeenstemmig is met de beginselen der kinetische gastheorie, m. a. w. of die

---

*) *Beiblätter*, t. 1, pp. 503—504.

bewegingstoestand tot de volgens die theorie mogelijke bewegingstoestanden kan gerekend worden; met die vraag willen wij ons in dit tweede gedeelte nog kortelijk bezig houden. Wij wenschen namelijk na te gaan, of die door ons aangenomen bewegingstoestand een zoodanige is die zich zelven onderhoudt, of men van den bewegingstoestand, zooals die op een gegeven oogenblik op een bepaalde plaats in de geluidsgolf bestaat, kan aantoonen, dat hij het noodzakelijk gevolg is van de bewegingstoestanden, die op vroegere tijdstippen in de verschillende deelen der geluidsgolf hebben bestaan.

Wij zullen daartoe de termen van de orde ε, die de veranderlijkheid van den toestand met tijd en plaats aangeven, en die tot hiertoe door ons verwaarloosd zijn, in de berekeningen moeten opnemen. De berekeningen worden daardoor natuurlijk veel uitvoeriger. Wij zullen haar dan ook hier niet volledig opnemen, maar slechts den gang van ons onderzoek en de voornaamste formules, waartoe dit ons leidt, aangeven, alle tusschenrekeningen daarentegen weglaten. Wij doen dit te eerder, omdat de resultaten, die ons onderzoek oplevert, slechts voor een gedeelte positief, voor een ander gedeelte echter negatief zijn, omdat zij ten minste niet als een volledige oplossing der door ons gestelde vraag kunnen beschouwd worden.

De door onze laag uitgezonden moleculen zijn gekarakteriseerd door het stelsel vergelijkingen:

$$U = u + p\mu \qquad (24)$$

$$H = 1 + 2\frac{p}{u}\mu. \qquad (25)$$

De op den tijd t gelijktijdig in onze laag aanwezige moleculen zijn gekarakteriseerd in de eerste plaats door haar aantal N en verder door de beide vergelijkingen:

$$\left.\begin{aligned} V &= U - \left(\frac{dU}{dx}\mu + \frac{1}{V}\frac{dU}{dx}\right)\varepsilon \\ &= u + p\mu + q + q_1\mu + q_2\mu^2 \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

$$I = 1 + r\mu - {}^1/_3 r_2 + r_1\mu + r_2\mu^2 \qquad (27)$$

waarin:

$$q = -\frac{\varepsilon}{u}\frac{du}{dt}$$

$$q_1 = -\varepsilon\left(\frac{du}{dx} + \frac{1}{u}\frac{dp}{dt}\right)$$

$$q_2 = -\varepsilon\frac{dp}{dx},$$

terwijl r een functie is van p en u, r_1 en r_2 grootheden zijn van de orde van ε *).

Eigenlijk is ε van laag tot laag veranderlijk, omdat ε omgekeerd evenredig is aan N. Verder is ε veranderlijk met μ. Deze veranderlijkheid van ε van laag tot laag en van richting tot richting kunnen wij echter in de voorgaande formules verwaarloozen, omdat de ware waarde van ε van die, welke bij den toestand van het gas behoort wanneer geen geluidsgolf aanwezig is, slechts verschilt om een grootheid van de orde $p\,\varepsilon$, en wij in de formule van V slechts die termen in ε in rekening willen brengen, welke zijn van de orde $\frac{dp}{dx}\varepsilon$, maar die van de orde $p\frac{dp}{dx}\varepsilon$ willen verwaarloozen. In dit geval kunnen wij voor ε in de voorgaande formules de gemiddelde weglengte in het gas stellen, die geldt voor het geval, dat geen geluidsgolf voorhanden is.

---

*) Voor I nemen wij aanvankelijk aan de uitdrukking:

$$I = i\,(1 + (r + r_1)\,\mu + r_2\,\mu^2);$$

maar in deze uitdrukking hebben wij voor i te stellen $1 - \frac{1}{3}r_2$, daar anders niet voldaan is aan de vergelijking

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} I\,d\mu = 1,$$

waaraan I wegens hare beteekenis noodzakelijk moet voldoen. Door de gevonden waarde voor i in de aangenomen uitdrukking voor I te stellen verkrijgen wij de in den tekst voor I aangegeven uitdrukking (27).

Wij noemen nu evenals vroeger

$$a\, dt$$

de waarschijnlijkheid, dat een molecule, die zich met een snelheid v in de richting μ in onze laag voortbeweegt, in den tijd dt met een andere molecule der laag in botsing kome, en

$$\alpha\, ds$$

de waarschijnlijkheid, dat diezelfde molecule op den weg ds in botsing kome; dan is

$$a = \pi \varrho^2 N R, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

en:

$$\alpha = \pi \varrho^2 N \frac{R}{v}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

wanneer ϱ den straal der werkingssphee der moleculen voorstelt, en R de gemiddelde waarde van de betrekkelijke snelheid der beschouwde molecule ten opzichte van de overige moleculen der laag.

Voor R vinden wij met behulp der bovenstaande formules voor V en I, als wij in het oog houden, dat v in ons geval van V slechts verschilt om een grootheid van de orde van p, zoodat wij $(V-v)^2$ mogen verwaarloozen:

$$R = \frac{4}{3}\sqrt{vu}\left\{1 + \frac{1}{2}\frac{q}{u} + \frac{1}{5.7}\left(6\frac{q_2}{u} + \frac{1}{3}r_2\right) - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{u} + r + \frac{1}{2}\frac{q_1}{u} + r_1\right)\mu - \frac{1}{5.7}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{q_2}{u} + r_2\right)\mu^2\right\} \ldots\ldots \quad (30)$$

Wij bepalen nu weder evenals vroeger het aantal moleculen $M\, dx\, dt$, die in den tijd dt in onze laag in botsing komen, en de geheele hoeveelheid van beweging $M'\, dx\, dt$ in de richting der positieve x-as, die al deze moleculen te zamen vóór

de botsing bezitten. Voor de berekening van M en M' hebben wij weder de formules:

$$M = {}^1/_2 \, N \int_{-1}^{+1} I \, \bar{a} \, d\mu,$$

$$M' = {}^1/_2 \, m N \int_{-1}^{+1} I \, V \bar{a} \, \mu \, d\mu,$$

als $\bar{a}$ de waarde van a aangeeft, wanneer v vervangen is door V.

Wij vinden door deze formules:

$$M = \frac{4}{3} \pi \varrho^2 N^2 u \left\{ 1 + \frac{q}{u} + \frac{1}{3} \frac{q_2}{u} \right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (31)$$

$$M' = \frac{4}{3} \pi \varrho^2 N^2 u \, . \, \frac{1}{3.5} \{7p + 4ru + 7q_1 + 4r_1 u\} \quad . \; . \; (31)$$

Opdat de hoeveelheid van beweging der in botsing komende moleculen vóór en na de botsing dezelfde zij, moeten M en M' voldoen aan de vergelijking:

$$M' \, dx \, dt = M \, dx \, dt \, . mp$$

of:

$$ {}^1/_{15} (7p + 4ru + 7q_1 + 4r_1 u) = p \, .$$

Hieruit vinden wij even als vroeger:

$$r = 2 \frac{p}{u} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (33)$$

en verder:

$$r_1 = - \frac{7}{4} \cdot \frac{q_1}{u} = \frac{7}{4} \cdot \frac{\varepsilon}{u} \left(\frac{du}{dx} + \frac{1}{u} \frac{dp}{dt} \right) \quad . \; . \; (34)$$

Nu wij voor α en M uitdrukkingen gevonden hebben, willen wij met behulp van deze op andere wijze dan tot hiertoe een uitdrukking trachten te vinden voor I. Wij wenschen dit te doen door in acht te nemen, dat de moleculen, die op een ge-

geven tijd zich gelijktijdig in de richting μ in onze laag voortbewegen, of die, welke gedurende den tijd dt in de richting μ onze laag passeeren, vroeger in botsing zijn geweest in andere lagen en dus op een vroeger tijdstip behoord hebben tot de door die andere lagen uitgezonden moleculen.

Beschouwen wij in de eerste plaats onder de moleculen, die in den tijd dt onze laag passeeren in een richting, wier richtingscosinus gelegen is tusschen μ en $\mu + d\mu$, diegenen, welke na haar laatste botsing reeds een weg s hebben afgelegd. Deze behooren tot de moleculen, die door een laag, waarvan de abscis $x - \mu s$ bedraagt, in den tijd tusschen $t - \frac{s}{v}$ en $t - \frac{s}{v} + dt$ in de aangegeven richting zijn uitgezonden, als v de gemiddelde snelheid van die uitgezonden moleculen voorstelt.

Het aantal der door die laag op den aangegeven tijd in de aangegeven richting uitgezonden moleculen bedraagt:

$$Z = \frac{1}{2}\, dx\, dt\, d\mu \left\{ MH - \left(\frac{d(MH)}{dx}\, \mu + \frac{1}{v} \cdot \frac{d(MH)}{dt} \right) s \right\},$$

waarin M en H door de formules (31) en (25) zijn uitgedrukt, terwijl de gemiddelde waarde van de snelheid dier moleculen is:

$$v = U - \left(\frac{dU}{dx}\, \mu + \frac{1}{u}\, \frac{dU}{dt} \right) s,$$

waarin U bepaald is door formule (24).

Deze moleculen bereiken echter slechts voor een deel onze laag met de abscis x; de overige komen, voordat zij den weg s tot die laag hebben afgelegd, in botsing. Noemen wij het aantal, dat na haar botsing den afstand σ bereikt z, dan is:

$$dz = - z \gamma\, d\sigma,$$

waarin γ de waarde van α voorstelt in een laag met abscis $x - (s - \sigma)\mu$ op den tijd $t - \frac{s - \sigma}{v}$.

Nu is volgens formules (29) en (30) :

$$\alpha = \frac{\beta}{\sqrt{v}} \cdot$$

wanneer

$$\beta = \frac{4}{3}\pi \varrho^2 N \sqrt{u} \left\{ 1 + \frac{1}{2}\frac{q}{u} + \frac{1}{5.7}\left(6\,\frac{q_2}{u} + \frac{1}{3}\,r_2\right) \right.$$
$$\left. - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\frac{p}{u} + r + \frac{1}{2}\frac{q_1}{u} + r_1\right)\mu - \frac{1}{5.7}\left(\frac{1}{2}\frac{q_2}{u} + r_2\right)\mu^2 \right\}.$$

Dus:

$$\gamma = \frac{\beta}{\sqrt{v}} - \frac{1}{\sqrt{v}}\left(\frac{d\beta}{dx}\,\mu + \frac{1}{v}\,\frac{d\beta}{dt}\right)(s - \sigma)\,,$$

$$log.\,\frac{z}{Z} = -\int_0^s \gamma\, d\,\sigma = -\frac{\beta}{\sqrt{v}}\,s + \frac{1}{2\sqrt{v}}\left(\frac{d\beta}{dx}\,\mu + \frac{1}{v}\,\frac{d\beta}{dt}\right)s^2,$$

$$z = Z e^{-\frac{\beta}{\sqrt{v}}s}\, e^{+\frac{1}{2\sqrt{v}}\left(\frac{d\beta}{dx}\mu + \frac{1}{v}\frac{d\beta}{dt}\right)s^2},$$

$$= Z e^{-\frac{\beta}{\sqrt{v}}s}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{v}}\left(\frac{d\beta}{dx}\,\mu + \frac{1}{v}\,\frac{d\beta}{dt}\right)s^2\right),$$

als z hier het aantal der Z uitgezonden moleculen voorstelt, die den afstand s afleggen en dus onze laag bereiken zonder in botsing te komen.

Voor v hebben wij in z te schrijven :

$$U - \left(\frac{d\,U}{dx}\,\mu + \frac{1}{u}\,\frac{d\,U}{dt}\right)s$$

en dus voor $\frac{1}{\sqrt{v}}$:

$$\frac{1}{\sqrt{U}}\left(1 + \frac{1}{2u}\left(\frac{dU}{dx}\,\mu + \frac{1}{u}\,\frac{d\,U}{dt}\right)s\right).$$

Daardoor wordt:

$$z = Ze^{-\frac{\beta}{\sqrt{U}}s}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{u}}\left[\frac{d\beta}{dx}\mu + \frac{1}{u}\frac{d\beta}{dt} - \frac{\beta}{u}\left(\frac{dU}{dx}\mu + \frac{1}{u}\frac{dU}{dt}\right)\right]s^2\right).$$

Wanneer wij in deze uitdrukking voor z de vroeger gevonden uitdrukking voor Z substitueeren, na daarin dx vervangen te hebben door $\mu\, ds$, en dan z integreeren volgens s van 0 tot ∞, verkrijgen wij alle moleculen, die gedurende den tijd dt onze laag x doorloopen in richtingen, waarvoor de richtingscosinus gelegen is tusschen μ en $\mu + d\mu$. Maar daarvoor vonden wij vroeger:

$$\frac{1}{2} N I V \mu\, d\mu\, dt.$$

Dus is:

$$\frac{1}{2} N I V \mu\, d\mu\, dt = \int_0^\infty z,$$

of:

$$I = \frac{2}{N V \mu\, d\mu\, dt} \int_0^\infty z. \quad \ldots\ldots\ldots (35)$$

Wanneer wij z deelen door $\frac{v \mu\, dt}{dx}$ verkrijgen wij het aantal van de moleculen, op den tijd t gelijktijdig in onze laag aanwezig en zich bewegende in richtingen waarvoor de richtingscosinus gelegen is tusschen μ en $\mu + d\mu$, die na haar laatste botsing een weg s hebben afgelegd. Dit aantal bedraagt dus:

$$\frac{z\, dx}{v \mu\, dt}.$$

Vervangen wij in deze uitdrukking de in Z voorkomende differentiaal dx door $\mu\, ds$ en integreeren vervolgens volgens s van 0 tot ∞, dan verkrijgen wij alle moleculen die gelijktijdig in onze laag aanwezig zijn, en zich bewegen in richtingen waarvoor de richtingscosinus gelegen is tusschen μ en $\mu + d\mu$. Maar voor het aantal dezer moleculen vonden wij vroeger:

$$\frac{1}{2} N I\, d\mu\, dx.$$

Dus is:

$$\frac{1}{2} N I\, d\mu\, dx = \frac{dx}{\mu\, dt} \int_0^\infty \frac{z}{v},$$

of:

$$I = \frac{2}{N\mu\, d\mu\, dt} \int_0^\infty \frac{z}{v} \quad \text{. . . . . (36)}$$

De beide formules (35) en (36) leiden tot volkomen hetzelfde resultaat, namelijk tot de formule:

$$I = 1 - \frac{\varepsilon}{u^2} \cdot \frac{du}{dt} - \frac{\varepsilon}{Nu} \frac{dN}{dt} - \frac{1}{3.5.7}\left(17 \frac{\varepsilon}{u} \frac{dp}{dt} + r_2\right)$$
$$+ \mu \left\{ \frac{1}{5}\left(8 \frac{p}{u} + r - \frac{5\varepsilon}{N} \frac{dN}{dx} - 3 \frac{\varepsilon}{u} \frac{du}{dx} - 11 \frac{\varepsilon}{u^2} \frac{dp}{dt} + r_1 - \frac{\varepsilon}{u} \frac{dr}{dt}\right)\right\}$$
$$+ \mu^2 \cdot \frac{1}{5.7}\left(r_2 - 74 \frac{\varepsilon}{u} \frac{dp}{dx} - 7\varepsilon \frac{dr}{dx}\right). \quad \text{. . . . . (37)}$$

Deze uitdrukking voor I behoort identiek te zijn met die volgens formule (27), waarvan wij zijn uitgegaan, of:

$$I = 1 - {}^1/_3\, r_2 + (r + r_1)\, \mu + r_2\, \mu^2.$$

Daartoe wordt vereischt, dat zij:

$${}^1/_3\, r_2 = \frac{\varepsilon}{u^2} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{\varepsilon}{Nu} \cdot \frac{dN}{dt} + \frac{1}{3.5.7}\left(17 \frac{\varepsilon}{u} \frac{dp}{dx} + r_2\right)$$

$$r = \frac{1}{5}\left(8 \frac{p}{u} + r\right)$$

$$r_1 = \frac{1}{5}\left(-\frac{5\varepsilon}{N} \frac{dN}{dx} - 3 \frac{\varepsilon}{u} \frac{du}{dx} - 11 \frac{\varepsilon}{u^2} \frac{dp}{dt} - \frac{\varepsilon}{u} \frac{dr}{dt} + r_1\right)$$

$$r_2 = \frac{1}{5.7}\left(r_2 - 74 \frac{\varepsilon}{u} \frac{dp}{dx} - 7\varepsilon \frac{dr}{dx}\right).$$

Deze formules geven voor r dezelfde waarde als vroeger formule (33) gevonden is, namelijk:

$$r = 2 \frac{p}{u};$$

voor r_1:

$$r_1 = -\frac{1}{4}\left\{\frac{5\,\varepsilon}{N}\frac{dN}{dx} + 3\,\frac{\varepsilon}{u}\frac{du}{dx} + 13\,\frac{\varepsilon}{u^2}\frac{dp}{dt}\right\} \ldots (38)$$

en voor r_2 de beide uitdrukkingen:

$$34\,r_2 = 3.5.7\left(\frac{\varepsilon}{u^2}\frac{du}{dt} + \frac{\varepsilon}{Nu}\frac{dN}{dt}\right) + 17\,\frac{\varepsilon}{u}\cdot\frac{dp}{dx} \ldots (39)$$

en

$$34\,r_2 = -\,88\,\frac{\varepsilon}{u}\,\frac{dp}{dx} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (40)$$

Stelt men in de eerste uitdrukking (39) voor r_2 volgens formule (20):

$$N = N_0\left(1 + \frac{p}{a}\right),$$

waaruit volgt:

$$\frac{1}{N}\cdot\frac{dN}{dt} = \frac{1}{a}\,\frac{dp}{dt} = -\,\frac{dp}{dx},$$

dan wordt zij:

$$34\,r_2 = -\,88\,\frac{\varepsilon}{u}\cdot\frac{dp}{dx} + 3.5.7\,\frac{\varepsilon}{u^2}\,\frac{du}{dt} \ldots (41)$$

Stelt men in de uitdrukking (38) voor r_1 volgens formule (21):

$$Nu^2 = N_0 u_0^2 + 3\,N_0\,pa$$

waaruit volgt:

$$\frac{1}{Nu^2}\cdot\frac{d(Nu^2)}{dx} = \frac{1}{N}\cdot\frac{dN}{dx} + \frac{2}{u}\frac{du}{dx} = 3\,a\,.\,\frac{1}{u^2}\cdot\frac{dp}{dx} = -\,\frac{3}{u^2}\cdot\frac{d}{d}$$

of:

$$-\,\frac{1}{N}\,\frac{dN}{dx} = +\,\frac{2}{u}\,\frac{du}{dx} + \frac{3}{u^2}\,\frac{dp}{dt},$$

dan verkrijgen wij:

$$r_1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{\varepsilon}{u} \left(7 \frac{du}{dx} + \frac{2}{u} \frac{dp}{dt}\right), \quad \ldots \ldots \quad (42)$$

terwijl wij vroeger formule (34) voor r_1 gevonden hebben, of:

$$r_1 = \frac{7}{4} \frac{\varepsilon}{u} \left(\frac{du}{dx} + \frac{1}{u} \frac{dp}{dt}\right).$$

Gaan wij thans na, tot welke uitkomsten het voorgaande analytische onderzoek ons geleid heeft. Ware de bewegingstoestand, zooals die door ons voor de gasmoleculen in een vlakke geluidsgolf is aangenomen de juiste, dan moest die bewegingstoestand zich zelven kunnen onderhouden, dat wil zeggen de bewegingstoestand, zooals die op een gegeven oogenblik en in een gegeven gaslaag bestaat, moest dan blijken het noodzakelijke gevolg te zijn van de bewegingstoestanden, zooals die in die laag en de overige gaslagen op vroegere oogenblikken bestonden. Dit nu hebben wij trachten na te gaan, door te onderzoeken, of de uitdrukking voor I (27), zooals wij die op een gegeven oogenblik voor een bepaalde gaslaag hebben aangenomen, overeenstemt met die, welke wij daarvoor uit den voor vroegere tijdstippen geldenden bewegingstoestand in het gas kunnen afleiden. En dan blijkt ons, dat terwijl dit voor den in I voorkomenden coëfficient r wel het geval is, dit daarentegen niet in alle opzichten het geval is met de coëfficienten r_1 en r_2. Voor r_1 kwamen wij op twee verschillende wijzen tot twee verschillende uitdrukkingen (34) en (42), en ook voor r_2 vinden wij twee uitdrukkingen (40) en (41), die identiek behoorden te zijn, maar waarvan dit niet volkomen het geval is. Wanneer wij echter de formules (34) en (42) voor r_1, de formules (40) en (41) voor r_2 met elkander vergelijken, dan treft het ons, dat in deze formules de termen, die de afgeleiden van p en u volgens de abscis x bevatten, met elkander overeenstemmen, voor de termen, die de afgeleiden van p en u volgens den tijd t bevatten, daarentegen de overeenstemming ontbreekt.

Waaraan dit toe te schrijven is, kan vooralsnog moeielijk met zekerheid worden uitgemaakt. In de eerste plaats zou dit het gevolg

kunnen zijn van door ons gemaakte fouten, hetzij in de redeneering, hetzij in de vrij gecompliceerde berekeningen. Het bestaan van zoodanige fouten komt ons echter niet zeer waarschijnlijk voor.

Ook aan de door ons gebruikte beginselen kan die niet-overeenstemming, naar ons voorkomt, niet geweten worden. De formules (24) en (25), waarvan wij zijn uitgegaan, en die den bewegingstoestand der door een laag uitgezonden moleculen karakteriseeren, kunnen wij niet anders dan als juist beschouwen. Zij schijnen ons op de gronden in het eerste gedeelte dezer verhandeling ontwikkeld de eenig mogelijke toe. Ook tegen het beginsel, hetwelk bij de afleiding der formules (33) en (34) is gebruikt, dat de hoeveelheid van beweging van alle botsende moleculen te zamen vóór en na de botsingen dezelfde waarde moet hebben, zal wel niemand bezwaar hebben. Wat er bij de botsingen van gasmoleculen ook moge plaats grijpen, aan dit beginsel moet daarbij toch noodzakelijk voldaan worden. En dat wij bij de afleiding der uitdrukking (37) voor I eenvoudig in rekening hebben gebracht, dat de moleculen, die op een gegeven oogenblik in een laag aanwezig zijn, dezelfde zijn, welke op vroegere tijdstippen in andere lagen in botsing zijn geweest en door deze zijn uitgezonden, daartegen zal wel weinig in het midden te brengen zijn.

Ook de verwaarloozing van termen van hoogere orde kan geen invloed hebben gehad op onze uitkomsten, daar toch, wanneer wij met termen van verschillende orden te doen hebben, de termen van lagere orde voor zich zelven aan de gestelde voorwaarden moeten voldoen.

De eenige reden, waaraan wij onze onbevredigende uitkomst kunnen toeschrijven, is deze, dat wij in ons analytisch onderzoek aan alle moleculen, die door een laag worden uitgezonden of gelijktijdig in een laag aanwezig zijn, eenzelfde snelheid u hebben gegeven, terwijl zooals bekend is, die snelheid voor de verschillende moleculen in werkelijkheid de meest uiteenloopende waarden bezit. De verdeeling der verschillende snelheden over de verschillende in eenzelfde richting zich bewegende moleculen wordt, zooals bekend is, waarschijnlijk bepaald door een wet, welke daarvoor het eerst door MAXWELL is opgesteld. Deze MAXWELL'sche wet hadden wij dus in ons onderzoek in reke-

ning moeten brengen, en daardoor zouden onze uitkomsten wellicht zoodanige wijzigingen hebben ondergaan, dat de verkregen uitdrukkingen voor r_1 en r_2 met elkander overeenstemden. De invoering van de wet van MAXWELL in onze beschouwingen zou ons echter tot berekeningen geleid hebben van zulk een omvang, dat wij geen poging hebben durven wagen om deze berekeningen te volvoeren, vooral omdat die poging waarschijnlijk toch schipbreuk zou hebben geleden op onoverkomelijke mathematische moeielijkheden, die zich in den gang dier berekeningen zouden hebben opgedaan *).

Dat wij, terwijl wij de wet van MAXWELL niet in acht genomen hebben, wel overeenstemming tusschen de op verschillende wijzen voor r_1 en r_2 afgeleide formules verkregen hebben voor zoover de termen betreft, die de eerste afgeleiden volgens x bevatten, die dus betrekking hebben op de veranderlijkheid van den bewegingstoestand in het gas met de plaats, niet echter voor zoover de termen betreft, die de eerste afgeleiden bevatten volgens t, die dus betrekking hebben op de veranderlijkheid

---

*) Tot welke ontzaggelijk omslachtige berekeningen het inachtnemen der wet van MAXWELL ons zou geleid hebben, daarvan kan men zich gemakkelijk een voorstelling maken, wanneer men er slechts op let op hoe zeer gecompliceerde wijze de snelheid u reeds in de formule (26) voor V optreedt, en wanneer men voorts bedenkt, dat de toepassing der MAXWELL'sche wet en de daarmede gepaard gaande omslachtige integraties niet slechts éénmaal maar meermalen in den gang van ons onderzoek zouden moeten plaats grijpen. Eens namelijk bij de berekening van R, welke berekening hier veel omslachtiger wordt daar $(V-v)^2$ niet meer verwaarloosd mag worden; vervolgens zoowel bij de berekening van $\bar{a}$ in de formule voor M als bij de berekening van $V\bar{a}$ in de formule voor M'; en ten slotte nog eens bij de berekening van I volgens de formules (35) of (36). En wanneer men in al die gevallen de wet in toepassing had gebracht, zou de uitkomst nog onjuist zijn, omdat ook de termen van I implicite u bevatten, en hierop bij de verrichte integraties niet gelet is kunnen worden. De omslachtige berekening zou dus niet eens tot het gewenschte resultaat kunnen leiden. Men zou door haar hoogstens misschien te weten kunnen komen, op welke wijze u in de verschillende termen van I voorkomt, en met deze kennis toegerust de geheele berekening nog eens moeten herhalen. Maar wanneer men bedenkt, dat zelfs in veel eenvoudiger gevallen als het onze, zooals bijv. in het door O. E. MEIJER in zijn *Kinetische Theorie der Gase*, pp. 317—325, behandelde geval der inwendige wrijving in gassen, de toepassing der wet van MAXWELL tot onoplosbare integralen leidt, dan zal men weinig hoop hebben, dat men in ons veel meer gecompliceerd geval de berekening ten einde toe zal kunnen volvoeren, zonder ook op zulke onoplosbare integralen te stuiten. Het zal daarom geen verwondering kunnen baren, dat door mij geen poging is gewaagd om de wet van MAXWELL op ons vraagstuk toe te passen.

van den bewegingstoestand met den tijd, komt ons niet zoo zeer vreemd voor. Op deze laatste termen zal toch het inachtnemen van de wet van MAXWELL waarschijnlijk van grooteren invloed moeten zijn dan op de eerste termen.

Is namelijk de wet van MAXWELL juist, dan zullen de moleculen, die door eenzelfde laag op eenzelfden tijd worden uitgezonden, niet allen dezelfde snelheid hebben en dus voor het doorloopen van denzelfden weg s verschillende tijden behoeven. Van de gelijktijdig in een laag aanwezige moleculen zullen dus diegenen, welke na haar laatste botsing een weg s hebben afgelegd en dus door de laag op afstand μs zijn uitgezonden, niet allen op denzelfden tijd door die laag zijn uitgezonden. Dit behoeft in het geval, dat de bewegingstoestand niet veranderlijk is met den tijd niet te worden in acht genomen, maar in ons geval wel, daar de tijd, waarop de moleculen zijn uitgezonden, verschillend zijnde ook de bewegingstoestand der op die verschillende tijden door dezelfde laag uitgezonden moleculen door eenigszins van elkander verschillende waarden van U, M en H gekarakteriseerd zal zijn, en ook de waarden van de grootheden β, enz, waardoor bepaald wordt hoevele van deze moleculen een afstand s zullen afleggen zonder in botsing te komen, voor de verschillende door dezelfde laag uitgezonden moleculen wegens de veranderlijkheid dier grootheden met den tijd eenigszins verschillend zullen zijn. De invloed van de wet van MAXWELL zal dus in een geval als het onze, waarbij de toestand ook met den tijd veranderlijk is, waarschijnlijk grooter zijn dan in zoodanige gevallen, waarin de toestand alleen met de plaats veranderlijk is; en die invloed zal zich niet onwaarschijnlijk het sterkst doen gelden voor die termen welke op de veranderlijkheid van den bewegingstoestand met den tijd betrekking hebben.

Dat wij, de wet van MAXWELL niet inachtnemende voor de termen die van de veranderlijkheid van den toestand met de plaats afhangen, een volkomen overeenstemming verkregen hebben, geeft ons hoop, dat wanneer wij die wet wel in rekening hadden kunnen brengen, wij ook voor de termen, die van de veranderlijkheid van den toestand met den tijd afhangen, tot overeenstemmende uitkomsten zouden gekomen zijn. Die overeenstemming voor de termen, die op de veranderlijkheid met de

plaats betrekking hebben, hebben wij toch alleen verkregen door de formules toe te passen in het eerste gedeelte dezer verhandeling voor den bewegingstoestand in geluidsgolven afgeleid. Zij kan dus onmogelijk aan het toeval worden toegeschreven. En het is dan ook om die verkregen overeenstemming, dat wij de in dit tweede gedeelte onzer verhandeling verkregen uitkomsten, hoe onvolledig zij ook nog zijn mogen, toch niet van belang ontbloot achten. Zij maken het voor ons waarschijnlijk, dat, wanneer wij de beginselen der kinetische gastheorie volkomen streng hadden kunnen toepassen, gebleken zou zijn, dat de door ons aangenomen bewegingstoestand in de geluidsgolven in gassen met die beginselen in volkomen overeenstemming is.

Groningen, Maart 1880.

OVER DE

SAMENDRUKBAARHEID VAN ETHYLEENGAS.

DOOR

J. D. VAN DER WAALS.

§ 1. In de „Beiblätter” der WIEDEMANN'sche *Annalen der Physik und Chemie* (1880 N^{0}. 1) zijn de uitkomsten opgenomen van een reeks onderzoekingen van AMAGAT, over de samendrukbaarheid der gassen bij hooge drukking. Die uitkomsten schijnen in het bijzonder voor ethyleengas ($C_2 H_4$) merkwaardig. Terwijl toch voor de andere onderzochte gassen het product van drukking en volume betrekkelijk weinig afwisselt, daalt dat product bij $C_2 H_4$ van 21473 bij 24 Meter kwikdruk, tot 9370 bij 64 Meter, om bij nog hoogeren druk weder te stijgen en bij 303 Meter een waarde van 29333 te bereiken.

Ofschoon ik reeds vroeger (continuiteit van den gas- en vloeistoftoestand, pag. 89 enz.) heb aangetoond, dat in het algemeen bij de gassen een dergelijke afwisseling in de waarde van het product pv is te wachten, scheen toch de mate van verandering van dat product in het geval van $C_2 H_4$ zoo groot, dat ik in den aanvang meende, dat hier een bijzondere invloed in het spel moest zijn. Dit heeft er mij toe geleid na te gaan in hoever door de formule, die ik voor de samendrukbaarheid der gassen in het algemeen gevonden had, de uitkomsten van AMAGAT konden worden verwacht. Spoedig bleek mij, dat die uitkomsten alleen dan verwacht konden worden, als wij mochten aannemen, dat de temperatuur, waarbij AMAGAT's waarnemingen plaats vonden, slechts weinig verschilde van de kritische temperatuur. Dat de kritische temperatuur hooger zou zijn dan die

der waarneming was niet waarschijnlijk, daar de dan plaatsgrijpende condensatie den waarnemer wel niet ontgaan zou zijn. Er bleef dus niet anders over dan de onderstelling, dat de kritische temperatuur van ethyleen slechts weinig lager zou liggen dan 18° of 22°: de temperatuur waarbij AMAGAT had waargenomen. Een besluit, waartoe trouwens ook reeds AMAGAT gekomen was.

§ 2. Uit de formule:

$$p = \frac{(1+a)(1-b)(1+\alpha t)}{v-b} - \frac{a}{v^2} \quad \ldots . (1)$$

volgt:

$$pv = (1+a)(1-b)(1+\alpha t)\frac{v}{v-b} - \frac{a}{v} \quad \ldots (2)$$

en dus:

$$\frac{d(pv)}{dv} = -\frac{(1+a)(1-b)(1+\alpha t)b}{(v-b)^2} + \frac{a}{v^2} \quad \ldots (3)$$

De minimumwaarde van het product pv wordt dus gevonden, als:

$$\frac{v}{v-b} = \sqrt{\frac{a}{b(1+a)(1-b)(1+\alpha t)}} \quad \ldots (4)$$

terwijl die minimumwaarde zelve voldoet aan de vergelijking:

$$\frac{pv}{1+\alpha t} = (1+a)(1-b)\left\{2\sqrt{\frac{a}{b(1+a)(1-b)(1+\alpha t)}} - \right.$$
$$\left. - \frac{a}{b(1+a)(1-b)(1+\alpha t)}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots . (5)$$

Het tweede lid dezer vergelijking stelt voor de verhouding tusschen het minimumproduct bij de temperatuur t en het product zooals dat bij de eenheid van druk gevonden wordt. Door de kritische temperatuur in (5) in te voeren, neemt zij een eenvoudiger gedaante aan, en wordt zij tegelijk geschikt om aan te toonen, hoe de waarde van het minimumproduct samenhangt

met het meerder of minder verschil tusschen de temperatuur der waarneming en de kritische temperatuur. Deze laatste t_1 stellende, geldt de betrekking (continuiteit van den gas- en vloeistoftoestand, pag. 84):

$$1 + \alpha t_1 = \frac{8}{27} \frac{a}{b(1+a)(1-b)} \quad \ldots\ldots (6)$$

en vinden wij:

$$\frac{pv}{1+\alpha t} = (1+a)(1-b)\left\{2\sqrt{\frac{27}{8}\frac{1+\alpha t_1}{1+\alpha t}} - \frac{27}{8}\frac{1+\alpha t_1}{1+\alpha t}\right\} \ldots (7)$$

Ingeval $t = t_1$ is, vinden wij voor het tweede lid nagenoeg de waarde 0,3.

Bij toenemende waarde van de temperatuur der waarneming, neemt ook de waarde van het tweede lid toe.

Hieruit volgt dus deze regel: worden gassen samengedrukt boven de kritische temperatuur, dan zal het minimumproduct van drukking en volume steeds grooter zijn dan ongeveer 0,3 maal het product van drukking en volume, dat men verkrijgt bij 1 atmosfeer, of bij 1 Meter druk, en naarmate dat minimumproduct meer tot deze waarde nadert, is de temperatuur der waarnemingen dichter bij de kritische temperatuur.

§ 3. Gaat men, geleid door dezen regel, de getallen na, die AMAGAT voor het product pv bij ethyleen gevonden heeft, dan zal het bevreemdende in de sterke afwisseling dezer getallen ophouden. Immers de minimumwaarde blijft boven 0,3. De door hem medegedeelde getallen zijn:

p	pv
24,00	21473
34,81	18352
45,13	12263
55,37	9772
63,96	9370
71,84	9703
83,96	10675

p	pv
101,28.	12210
133,77.	15116
177,52.	18962
214,48.	22115
250,15.	25065
303,02.	29333

De druk is in meters kwik gegeven. Uit deze getallen blijkt, dat AMAGAT de waarde van pv eerst bij 24 meters opgeeft. Dat product zou bij 1 meter druk natuurlijk grooter zijn dan 21473, maar men zal het toch niet hooger dan 30,000 kunnen stellen. Zelfs bij deze hooge waarde vinden wij voor de minimumverhouding meer dan 0,3.

Maar aan den anderen kant zal men het produkt pv bij 1 meter druk veilig grooter dan 25000 mogen aannemen. In dat geval is de minimumverhouding $= 0,379$, en volgens (7) nog dicht genoeg bij 0,3 om tot een waarde van $\frac{1 + \alpha t_1}{1 + \alpha t}$ weinig van de eenheid verschillende te doen besluiten. Immers eene waarde voor $\frac{1 + \alpha t_1}{1 + \alpha t} = 0,9216$ doet voor de minimumverhouding reeds 0,3985 vinden.

Daar de temperatuur der waarnemingen op 18° à 22° wordt opgegeven, vindt men als waarschijnlijke waarde van de kritische temperatuur: $0^0 < t_1 < 18^0$. Ofschoon het weinig moeite gekost zou hebben de grenzen nauwer op te geven, reken ik dit hier overbodig, omdat een rechtstreeksch onderzoek het juiste getal onmiddellijk kon doen vinden.

§ 4. Een proefondervindelijk onderzoek heeft mij dan ook 9°,2 als de kritische temperatuur van C_2H_4 doen kennen.

Het ethyleengas, bereid door de inwerking van geconcentreerd zwavelzuur op absoluten alcohol, en gewasschen door kaliloog, zuiver water en zwavelzuur, werd in de pomp van CAILLETET saamgedrukt. Bij de temperatuur van het vertrek — 13° — bleef het onder elken druk homogeen de ruimte vullen. Door smeltend ijs omgeven, scheidde het zich bij eenigszins hoogen druk in twee

gedeelten. Langzame verandering der temperatuur toonde, dat bij $9^0,2$ de overgangstemperatuur lag. De kritische druk is nagenoeg 58 atmosfeer *).

Met de waarde $t_1 = 9^0,3$ levert (7) voor het minimumproduct, al naar gelang men de temperatuur der waarnemingen van AMAGAT op 18^0 of 22^0 stelt 0,3475 of 0,376,— en dus voor het product pv bij 1 Meter druk of nagenoeg 27000 of 25000.

§ 5. Met $t_1 = 9^0,3$ berekenen wij uit (6) de waarde van $\frac{a}{b(1+a)(1-b)}$ en vinden haar gelijk aan 3,484; wij zullen dus $\frac{a}{b}$ op nagenoeg 3,51 kunnen stellen. Daar de kritische druk $p_1 = \frac{a}{27\,b^2}$ is, en $p_1 = 44$ Meter bedraagt, vinden wij $b = 0,0029$, en dus $a = 0,0101$.

Ten controle voor de op deze wijze gevonden waarde van b, kunnen wij gebruik maken van het feit, dat AMAGAT het minimumproduct vindt bij ongeer 64 Meter druk. Met behulp van de in § 2 gevonden vergelijkingen wordt de volgende afgeleid, die den druk, waarbij het minimumproduct gevonden wordt, doet kennen:

$$\frac{pb}{(1+a)(1-b)} = 3\sqrt{\frac{27}{8}(1+\alpha t_1)(1+\alpha t) - \frac{27}{8}(1+\alpha t_1)} - 2(1+\alpha t) \quad \text{(8)}$$

In deze vergelijking is weder t_1 de kritische temperatuur en t die der waarneming; p stelt den druk voor, waarbij pv zijn minimumwaarde heeft.

Voor $t = 18^0$ zouden wij vinden $b = 0,00265$,
en voor $t = 22^0$ vinden wij $b = 0,00277$.

---

*) Gewoonlijk wordt koolzuur beschouwd als het gas, waarvan de kritische omstandigheden met de minste moeite kunnen worden aangetoond. Voor dat gas is de temperatuur 31° en de druk 78 atmosfeer. C_2H_4 blijkt volgens de bovenstaande getallen in dit opzicht koolzuur te overtreffen.

De betrekking tusschen volume, druk en temperatuur zal voor $C_2 H_4$ vrij nauwkeurig wedergegeven kunnen worden door

$$p = \frac{1{,}0072\,(1 + \alpha t)}{v - 0{,}0029} - \frac{0{,}0101}{v^2}$$

§ 6. Berekenen wij voor $t = 22^0$ de waarde van $\frac{p\,v}{1 + \alpha t}$, dan vinden wij daarvoor waarden, die in het algemeen met de waarnemingen van AMAGAT overeen te brengen zijn. Zoo vinden wij:

p.	$\frac{pv}{1+\alpha t}$ berekend.	Waargenomen ($p\,v_1 = 25000$).
24	0,843	0,858
34,7	0,733	0,734
45,2	0,623	0,490
55,3	0,405	0,391
64,2	0,381	0,375
71,8	0,394	0,388

Alleen het derde der opgegeven producten wijkt sterk af. Volgens de reeks der door AMAGAT opgegeven waarden is:

$$\frac{p\,v_{35}}{p\,v_{45}} = 1{,}49,$$

en volgens de berekende waarde daarentegen 1,18.

Dat sterke verschil heeft mij doen besluiten, dat het derde product, door AMAGAT gelijk aan 12263 opgegeven, door een drukfout of een andere vergissing veel te laag is. Het getal 15263 zou vrij wel met de gegeven formule overeenstemmen.

§ 7. Ik heb ter beslissing van de vraag, of het verschil aan een fout in de opgave, of aan een fout in de formule te wijten was, met behulp van de pomp van CAILLETET de waarde van het quotient $\frac{p_1 v_1}{p\,v}$ voor de opgegeven drukkingen bij temperaturen van 17^0—22^0 onderzocht.

Ofschoon ik erken, dat de methode van AMAGAT veel meer

nauwkeurigheid kan leveren, meen ik dat in dit geval, waar het verschil zoo aanzienlijk is, zelfs een minder nauwkeurig onderzoek beslissen kan.

Bij 17°2 vond ik voor deze verhouding 1,28, bij 18°8 de waarde 1,27 en bij $22^1/_2{}^0$ bedroeg de waarde 1,24. Ik meen dus hieruit werkelijk tot een fout in de opgaven te mogen besluiten.

Amsterdam Mei 1880.

RAPPORT

OVER EENE

VERHANDELING VAN DEN HEER

Dr. P. H. SCHOUTE,

GETITELD:

SUR UNE TRANSFORMATION GÉOMÉTRIQUE D'UN PROBLÈME DE LA THÉORIE DES ENVELOPPES DITES „COURBES DE SÛRETÉ" ET SA GÉNÉRALISATION.

(Uitgebragt in de Vergadering van 26 Junij 1880).

Aan de ondergeteekenden werd in de vergadering der afdeeling Natuurkunde van de Kon. Akademie van Wetenschappen van 29 Mei jl. opgedragen, verslag uit te brengen omtrent eene verhandeling van Dr. P. H. SCHOUTE te 's Gravenhage, getiteld: *Sur une transformation géométrique d'un problème de la théorie des enveloppes dites „courbes de sûreté" et sa généralisation.*

Zij hebben de eer daaromtrent het navolgende te berigten.

Door ED. COLLIGNON is op pag. 53—56 van de *Compte-rendu de la 7e session de l'association française pour l'avancement des sciences*, Paris 1878, eene ellips als omhullingskromme bepaald van de verschillende elliptische loopbanen, om een vast punt bij de gewone wet van aantrekking doorloopen door een ligchaam, waaraan eene snelheid van gegeven grootte, maar van veranderlijke rigting, wordt medegedeeld. In verband hiermede onderzoekt nu de schrijver der tegenwoordige verhandeling in het eerste gedeelte daarvan, wat de overeenkomstige omhullende is van de ellipsen, doorloopen indien de wet der omgekeerde vierkanten van de afstanden wordt vervangen door die der regtstreeksche afstanden zelve: eene zeer eenvoudige meetkundige beschouwing doet hem ook hier voor die omhullende eene ellips kennen. Na opgemerkt te hebben dat in deze

uitkomst als bijzonder geval de parabolische omhullende bevat is, behoorende bij de parabolische loopbanen van een zwaar ligchaam dat met gegeven snelheid maar onder verschillende elevatiehoeken wordt opgeworpen, geeft hij in verband met het voorgaande eenige uitbreiding aan een paar in JULLIEN's *Problèmes de mécanique rationnelle* voorkomende vraagstukken over de bedoelde elliptische en parabolische bewegingen, en gaat vervolgens de wijzigingen na, ontstaande indien de aantrekkende kracht in eene afstootende en dientengevolge de elliptische loopbanen in hyperbolische overgaan.

Terugkeerende tot de eerste door hem verkregen uitkomst, geeft de schrijver daaraan in het tweede gedeelte zijner verhandeling eene gewijzigde, en wél eene projectivische, beteekenis die hem leidt tot de meer algemeene opmerking, dat, als twee willekeurige krommen in de ruimte achtervolgens uit elkanders punten als centra geprojecteerd worden op een zelfde plat vlak, alsdan de projectien van de eene kromme en de projectien van de andere eene zelfde omhullingskromme hebben; eene opmerking waarvan de juistheid ook kan blijken door deze gemeenschappelijke omhullende te beschouwen als doorgang, op het aangenomen platte vlak, van het om de beide gegeven krommen omschreven ontwikkelbare oppervlak. Op het zamenvallen nu van de beide genoemde omhullingskrommen berust eene methode van meetkundige vervorming, waarvan de toepasselijkheid, hoofdzakelijk op in verschillende vlakken liggende krommen van den tweeden en den derden graad, door den schrijver ten slotte eenigzins nader wordt onderzocht.

Het komt den ondergeteekenden vóór dat de besproken verhandeling, al moge zij niet zeer omvangrijk zijn en wat het laatste gedeelte betreft grootendeels slechts negatieve uitkomsten bevatten, toch wel van genoegzaam belang is om in de Verslagen en Mededeelingen te worden opgenomen; reden waarom de ondergeteekenden dan ook de eer hebben in dezen zin te adviseren.

Delft en Leiden,
Junij 1880.

F. J. VAN DEN BERG.
D. BIERENS DE HAAN.

SUR UNE TRANSFORMATION GÉOMÉTRIQUE

D'UN PROBLÊME DE LA

THÉORIE DES ENVELOPPES DITES „COURBES DE SÛRETÉ" ET SA GÉNÉRALISATION,

PAR

P. H. SCHOUTE.

1. Au septième congrès de l'Association française pour l'avancement des sciences tenu à Paris en 1878 M. ED. COLLIGNON, Ingénieur-en-chef des ponts et chaussées, a fait une communication intéressante sur une question de la théorie des enveloppes. Il a déterminé par la synthèse l'enveloppe des ellipses planétaires obtenues en faisant varier la direction mais non la grandeur de la vitesse initiale. Je me propose de traiter le théorème analogue pour un autre mouvement elliptique, le mouvement qui est régi par une attraction centrale proportionnelle à la distance

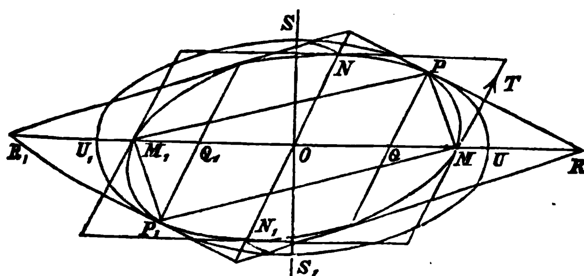


Fig. 1.

du mobile au centre d'attraction.

Soit O (fig. 1) le centre d'attraction, M la position initiale

du mobile qu'on suppose lancé dans le plan de la figure avec une vitesse donnée v_0, dont la direction n'est pas définie. Menons par O une parallèle ON à cette vitesse MT et prenons ON égal à $\frac{v_0}{\sqrt{f}}$, f représentant l'attraction sur l'unité de masse à l'unité de distance, l'ellipse qui a O pour centre et OM et ON pour diamètres conjugués sera, comme on sait, la trajectoire du mobile. Le problême de la courbe de sûreté en question revient donc à la recherche de l'enveloppe de toutes les ellipses, qu'on obtient en faisant varier la direction du diamètre NN_1 conjugué du diamètre commun MM_1.

J'observe d'abord, que chaque ellipse touche cet enveloppe aux deux points P, où la tangente est perpendiculaire à ON. Car on trouve la position infiniment voisine de l'ellipse en faisant tourner toutes les ordonnées parallèles à ON d'un angle infiniment petit autour de leurs pieds. De sorte que les points P se déplacent le long des tangentes PR et restent donc sur l'ellipse primitive. Et par là, la question est ramenée à la recherche du lieu géométrique des points P, où les tangentes PR à l'ellipse sont perpendiculaires au diamètre conjugué de OM.

Le lieu des points P est une ellipse, dont M et M_1 sont les foyers. Car M_1, Q, M, R étant quatre points harmoniques, les droites PM_1, PQ, PM, PR forment un faisceau harmonique, dont les deux rayons correspondants PQ et PR se coupent à angle droit; d'où il suit que ces rayons sont les bissectrices des angles formés par les deux autres. L'enveloppe est donc une ellipse, dont M et M_1 sont les foyers et MS et OS en grandeur les deux demi-axes.

2. Le résultat, que je viens de déduire, contient comme cas particulier celui de la courbe de sûreté du mouvement parabolique des corps pesants. En effet, on n'a qu'à supposer que le centre d'attraction O s'éloigne à l'infini, pour que la force attractive devienne constante en grandeur et en direction *). Dans

*) Voir JULLIEN, *Problèmes de mécanique rationnelle*, deuxième édition, t. I, p. 400, N°. 26.

ce cas les courbes enveloppées prennent la forme de paraboles passant par M (fig. 2) avec des axes verticales FG et une même directrice horizontale SU. Et l'enveloppe se change en même temps dans la parabole, dont M est le foyer et dont le pied S de la perpendiculaire, abaissée de M sur la directrice commune des paraboles enveloppées, est le sommet.

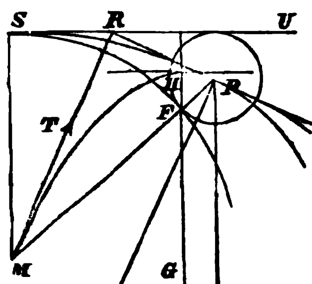


Fig. 2.

L'application de la construction des points P, où chaque ellipse touche l'enveloppe, au cas particulier des paraboles n'offre pas de difficulté. La tangente PR au point cherché faisant des angles égaux avec la verticale par P et PM, la droite PM passe au foyer F de la parabole. D'où l'on trouve encore que le lieu géométrique des foyers F des paraboles est une conique; car chaque droite MP coupe l'enveloppe parabolique en deux points P et contient donc deux points F, etc. En effet, l'égalité des distances MF et MS fait voir, que cette courbe est le cercle, dont M est le centre et MS le rayon. Et parce que le sommet H se trouve a égale distance de F et de la directrice SU, le lieu du sommet H des paraboles est l'ellipse, dont MS représente en grandeur et en position le petit axe, et en grandeur le demi grand axe.

On connaît le problème suivant:

„Plusieurs projectiles P sont lancés en même temps du même point avec une même vitesse v_0 et dans des directions différentes. Au même instant on laisse tomber librement du même point un corps pesant p. Démontrer que les projectiles se trouvent à chaque instant sur une même sphère variable, qui a son centre au point p et dont le rayon est $v_0 t$, le temps t étant compté depuis l'instant du départ" *).

Chemin faisant j'en donne la généralisation suivante:

„Plusieurs points matériels P, attirés vers un centre fixe O par une force proportionnelle à la distance de ce centre, sont

*) Jullien l. c., t. I, p. 311, N°. 20.

lancés en même temps du même point M avec une même vitesse v_0 et dans des directions différentes. Au même instant on fait partir un point matériel p sans vitesse initiale du même point M, sollicité par la même force émanante du point O. Démontrer que la surface synchrone est une sphère variable, qui a son centre au point p et dont le rayon est $\frac{\sqrt{f}}{v_0} \cos t\sqrt{f}$, le temps t étant compté depuis l'instant du départ."

On connaît encore le problême:

„Un point matériel, attiré vers un centre fixé O par une force proportionnelle à la distance, est lancé d'un même point M et avec la même vitesse suivant différentes directions situées dans un même plan. Montrer que le lieu du mobile est un ellipsoïde et que le point du départ du mobile est un point ombilical de la surface" *).

J'y ajoute l'énoncé suivant:

„Démontrer de même, que la série doublement infinie des ellipsoïdes qu'on obtient, en faisant tourner le plan par M autour de ce point, admet pour enveloppe un ellipsoïde de révolution, dont O est le centre et M un des deux foyers; chaque ellipsoïde de la série touchant cet enveloppe le long de l'ellipse située dans le plan diamétral conjugué de la perpendiculaire au plan correspondant par M."

3. Quand on change le sens de la force qui régit le mouvement elliptique en remplaçant l'attraction par une répulsion de même grandeur, la trajectoire est comme on sait l'hyperbole, qui est, suivant l'expression de PONCELET †), supplémentaire de l'ellipse trouvée plus haut par rapport au diamètre OM. J'indique les théorèmes qui découlent de cette remarque.

„Les différentes hyperboles, qu'on obtient en faisant varier la direction de la vitesse initiale, touchent leur enveloppe aux points P, où la tangente est perpendiculaire au diamètre conjugué de OM; cette enveloppe est une hyperbole, dont les points M et M_1 sont les foyers et dont l'axe imaginaire est $v_0\sqrt{f}$."

---

*) JULLIEN, l. c. t. I, p. 342, N°. 20.

†) *Traité des propriétés projectives des figures*, deuxième édition, t. I, p. 29.

„Plusieurs points matériels P, qui se trouvent sous l'action d'une force répulsive, émanant d'un centre fixe O, sont lancés en même temps d'un même point M avec une même vitesse v_0 et dans des directions différentes. Au même instant ou fait agir la même force répulsive sur un point matériel p, déposé sans vitesse initiale au même point M. Démontrer que les points P se trouvent au même instant sur une même sphère variable, qui a son centre au point p et dont le rayon est représenté par l'expression $\frac{1}{2} v_0 (e^{t\sqrt{f}} - e^{-t\sqrt{f}})$."

„Un point matériel, qui éprouve de la part d'un centre fixe O une répulsion proportionnelle à la distance, est lancé d'un même point M et avec la même vitesse suivant différentes directions situées dans un même plan. Montrer que le lieu du mobile est un hyperboloïde à deux nappes et que le point de départ du mobile est un point ombilical de la surface. Démontrer de même que la série doublement infinie des hyperboloïdes, qu'on obtient en faisant tourner le plan par M autour de ce point, admet pour enveloppe un hyperboloïde à deux nappes de révolution, dont O est le centre et M un des deux foyers; chaque hyperboloïde de la série touchant l'enveloppe suivant l'ellipse située dans le plan diamètral conjugué de la perpendiculaire au plan correspondant par M."

---

4. Le problème, qui nous occupe, donne lieu à une transformation géométrique, que je vais indiquer. Toutes les ellipses enveloppées sont les projections obliques d'un même cercle, le cercle décrit, dans le plan par MM_1 perpendiculaire au plan des ellipses, sur MM_1 comme diamètre (fig. 3). De plus, la droite nN qui projette le

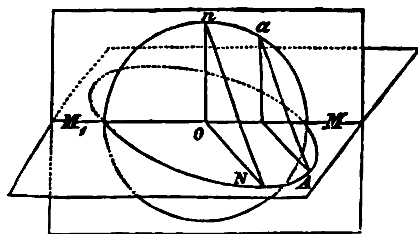


Fig. 3.

sommet n de ce cercle en N, extrémité du diamètre ON conjugué de OM dans l'ellipse, engendre un cône droit, dont nO est l'axe, quand le diamètre ON tourne autour du centre O. L'enveloppe cherchée est donc encore l'enveloppe des cercles d'intersection du plan avec les cônes droits dont les arêtes aA projettent les différents points a de la circonférence, résultat bien facile à vérifier par le calcul.

5. En général, si les courbes enveloppées données sont des projections centrales d'une même courbe A de l'espace et que le lieu des centres de projection d'où cette courbe A se projette suivant la série de courbes données est une autre courbe B, on n'a qu'à projeter la courbe B de tous les points de la courbe A comme centres de projection pour trouver une autre série de courbes qui admet la même enveloppe que la série donnée. Toutefois la transformation ne s'applique que dans les cas où les courbes enveloppées peuvent être envisagées comme des projections d'une même courbe de l'espace. Ce qui exige que toutes ces courbes passent au moins pas un nombre de points fixes égal à leur ordre, les points où la nouvelle courbe A, dont l'ordre égale celui des courbes données, perce leur plan. La transformation en question ne saurait donc être utile dans la recherche de la développée d'une courbe, les normales à cette courbe ne passant pas par un point fixe.

Examinons si les courbes enveloppées sont nécessairement des projections d'une même courbe A, aussitôt qu'elles passent par le nombre indiqué de points fixes, et considérons d'abord le cas des courbes du second ordre. On sait que deux coniques, qui coupent la droite d'intersection de leurs plans aux mêmes points, forment la base d'un faisceau de surfaces du second ordre et admettent donc quatre cônes du second ordre, qui les contiennent à la fois. Toutes les coniques passant par deux points fixes sont donc toujours projections centrales d'une conique quelconque, pourvuque celle-ci passe par les deux points fixes communs. Le cas d'une série de cercles, courbes qui sont des projections centrales d'un même cercle quelconque situé dans un plan parallèle, parce que cette courbe passe aussi par les deux ombilics

du plan de la série, en forme un exemple bien simple *). Et dans le cas considéré du mouvement des corps pesants les trajectoires paraboliques, qui se trouvent dans un même plan vertical, se touchant au point situé à l'infini dans la direction verticale, ces courbes ont trois points communs; le point M et deux points à l'infini; de sorte qu'elles sont aussi bien projections d'une même parabole située dans un plan parallèle que d'une parabole quelconque passant par M dont l'axe est vertical.

Cependant dans le cas d'une série de courbes planes d'ordre supérieure n, les courbes C_n qui passent par n points fixes ne sont pas en général des projections d'une même courbe. J'observe d'abord que deux courbes C_n quelconques, qui coupent la droite

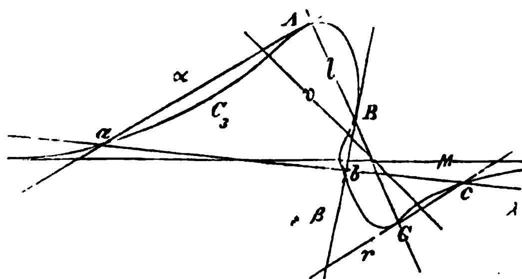


Fig. 4.

d'intersection de leurs plans aux mêmes points, ne sont pas projections l'une de l'autre. Si l'on représente par l (fig. 4) la

*) Appliquons la théorie à un cas spécial et supposons que les courbes enveloppées données sont représentées par les équations $\left\{\begin{matrix}(x-a)^2+y^2=\frac{2m^3}{a}\\ z=0\end{matrix}\right\}$, où a est le paramètre arbitraire. Considérons ces courbes comme projections d'un cercle $\left\{\begin{matrix}x^2+y^2=r^2\\ z=k\end{matrix}\right\}$, pour ce cas la courbe A, et déterminons la courbe B, lieu des centres de projection, ce qui fait trouver la courbe $\left\{\begin{matrix}2m^3(z-k)^2+kr^2xz^2=0\\ y=0\end{matrix}\right\}$

Projetons ensuite la courbe B de chaque point $\left\{\begin{matrix}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\\ z=k\end{matrix}\right\}$ de la courbe A et nous trouvons pour les projections sur le plan $z=0$ les courbes

$$2m^3+y^2(y\cot\varphi-x)(1+\cot^2\varphi)=0,$$

où $\cot\varphi$ est le paramètre arbitraire. En effet, l'enveloppe de cette nouvelle série de courbes coincide avec celle de la série donnée; car on trouve à la fois pour les deux enveloppes l'équation

$$y^2(x^2+y^2)^2-2m^3x(x^2+9y^2)+27m^6=0.$$

droite d'intersection des deux plans, en commencant par le cas $n = 3$ par C_3 l'une des deux courbes, par A, B, C les points communs aux deux courbes sur la droite d'intersection l des deux plans, par α, β, γ les tangentes en ces points à C_3, par a, b, c les points où ces tangentes coupent C_3 hors du point de contact *), et qu'on désigne par les mêmes lettres avec un accent les éléments correspondants de l'autre courbe C'_3, on voit d'abord que le centre de projection devrait être le point d'intersection des trois plans $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ et que dans ce cas les points a et a', b et b', c et c' ne sont pas en général les projections les uns des autres. Et l'on voit de même, que la considération des tangentes α, β etc. suffit déja pour la démonstration du théorème dans le cas de deux courbes d'un ordre n supérieur à trois, parceque plus que trois plans quelconques ne se coupent pas en un point commun.

Deux courbes planes C_n, qui se coupent en n points, n'étant pas en général des projections l'une de l'autre, j'examine s'il soit toujours possible de déterminer une courbe C_n qui est la projection centrale de toutes les courbes C_n de la série donnée. A cette fin, j'observe que l'equation $f(x, y, a) = 0$ des courbes enveloppées contient au moins le deuxiéme degré du paramètre a; car si elle n'en contint que le premier degré elle représenterait un faisceau de courbes C_n qui n'admet pas d'enveloppe. En mettant l'équation sous la forme

$$\varphi(x, y) + a\psi(x, y) + a^2\chi(x, y) = 0 ,$$

ou voit que le plus petit nombre des courbes enveloppées, qui déterminent toutes les autres, est trois. J'examine donc, si trois courbes C_n, situées dans un même plan et coupées par une droite l de ce plan aux mêmes points, peuvent être projeteés de trois centres de projection différents sur un plan quelconque passant par la droite l suivant la même courbe. Ce qui en général n'est pas possible, puisque dix inconnus, les neuf coordonnées des trois centres de projection et la grandeur qui détermine la position

*) Comme on sait les trois points a, b, c de la figure sont sur une même droite λ, la droite satellite de l. De plus μ représente l'asymptote et ν la droite des points d'inflexion.

du plan de la projection commune passant par l, ne sauraient satisfaire aux $2\left\{\frac{n(n+3)}{2}-n\right\}$ équations, qui expriment l'identité d'une des trois projections avec les deux autres.

6. L'exemple considéré dans la note de l'article précédent montre que la transformation en question, substituant des courbes cubiques aux coniques données, peut même affectionner l'ordre des courbes enveloppées. Il va donc sans dire qu'en suivant la marche inverse cette transformation mène à une simplification d'un théorème donné en abaissant l'ordre des courbes enveloppées. Mais ce n'est pas dans cette direction que l'utilité s'en manifeste. Car au lieu de simplifier les problèmes auxquels elle s'applique, elle les rend pour la plupart plus compliqués. Je prétend seulement, qu'elle est un instrument utile dans la recherche de problèmes nouveaux sur les enveloppes.

La projection centrale d'une courbe s'accorde en général en ordre avec cette courbe elle-même. Seulement en prenant un des points d'une courbe gauche pour centre de projection on diminue l'ordre de la projection de cette courbe d'une unité. On pourrait croire que ce theorème connu menât à une méthode de transformation qui abaisse l'ordre des courbes enveloppées; mais cela n'est pas le cas. Car la supposition que les courbes données sont les projections d'une courbe gauche A, ses propres points étant pris pour centres de projection, amène la coincidence des deux courbes A et B; de sorte que le problème transformé ne diffère en rien du théorème primitif.

Cependant l'observation précédente fait connaître un théorème, qui peut-être n'est pas dépourvu d'intérêt. Quand on projette une cubique gauche R_3 de tous ses points sur un plan quelconque α les projections sont des coniques passant par trois points, les points d'intersection de R_3 avec α. Ces projections forment une série de courbes, dont l'indice, c. a. d. le nombre des courbes passant par un quatrième point fixe quelconque, est deux. Car du point quelconque p du plan α on peut mener à R_3 une corde qui la coupe aux deux points d'où elle se projette suivant des coniques passant par p. La condition, que ces deux coniques par p se touchent dans ce point, est donc identique

à celle, qui exprime que la corde de R_3, qui passe par p, soit tangente à cette courbe. Ainsi l'enveloppe des coniques, c'est l'intersection C_4 du plan α avec la surface développable F_4, dont R_3 est l'arête de rebroussement. Ce qui est d'accord. Car l'équation $f(x, y, a) = 0$ des coniques enveloppées contenant le paramètre a au second degré, sa dérivé par rapport à a est du premier degré en a. De sorte que l'élimination de a entre ces deux équations ne saurait mener à une équation d'un ordre supérieur à quatre.

En général, quand on projette une courbe gauche $R(\nu, h)$, dont ν représente l'ordre et h le nombre des points doubles apparents, de tous ses points sur un plan quelconque, les projections seront des courbes $C_{\nu-1}$ passant par ν points fixes, les ν points d'intersection de $R(\nu, h)$ avec le plan de projection. Puisque d'un point quelconque p de ce plan on peut mener h cordes à $R(\nu, h)$ et que chacune de ces cordes coupe $R(\nu, h)$ en deux points d'où $R(\nu, h)$ se projette comme une courbe $C_{\nu-1}$ passant par p, ces courbes forment une série dont l'indice est $2h$; elles auront donc une enveloppe, dont l'ordre ne saurait dépasser la limite $2h(2h-1)(\nu-1)$. Mais dans ce cas général l'intersection du plan de projection avec la surface développable dont $R(\nu, h)$ est l'arête de rebroussement, ne forme pas à elle seule l'enveloppe entière. Car des $(\nu-1)^2-\nu$ points d'intersections mobiles de deux courbes consécutives, qui appartiennent tous à l'enveloppe, la surface développable en question n'en contient qu'un.

La Haye le 22 Mai 1880.

VERSLAGEN EN MEDEDEELINGEN

DER

KONINKLIJKE AKADEMIE

VAN

WETENSCHAPPEN.

VERSLAGEN EN MEDEDEELINGEN

DER

KONINKLIJKE AKADEMIE

VAN

WETENSCHAPPEN.

Afdeeling NATUURKUNDE.

TWEEDE REEKS.

ZESTIENDE DEEL.

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
1881.

GEDRUKT BIJ DE ROEVER-KRÖBER-BAKELS.

INHOUD

VAN HET

ZESTIENDE DEEL

TWEEDE REEKS.

VERSLAGEN.

MEDEDEELINGEN.

BOUWSTOFFEN VOOR DE GESCHIEDENIS

DER

WIS- EN NATUURKUNDIGE WETENSCHAPPEN

IN DE NEDERLANDEN.

DOOR

D. BIERENS DE HAAN.



N°. XIX. EERSTE GEBRUIK DER ISOHYPSEN DOOR NEDERLANDSCHE INGENIEURS — N. S. CRUQUIUS — M. BOLSTRA.

1. Het is bekend, dat men alle bijzonderheden van een oneffen terrein, van bergen, enz. zeer gemakkelijk en duidelijk voorstelt door het aangeven der lijnen van een gelijk niveau: op die wijze toch wordt de meer of minder steile helling door korteren of grooteren afstand der opvolgende niveau-lijnen (isohypsen) voorgesteld, en verkrijgt men eene heldere voorstelling van den vorm van een berg of gebergte. Keert men de voorstelling om, dat is, denkt men zich de hoogten negatief, dus diepten, dan kunnen evenzoo diezelfde lijnen ook omgekeerd dienen, om den vorm van rivierbeddingen, zeestranden, enz. aan te geven. In dit laatste geval geven die lijnen den vorm van den stroom aan, indien de waterspiegel plotseling eene bepaalde lengte zakte: in het eerste geval den omtrek, dien een plotseling rijzende waterspiegel op den berg zoude afteekenen. Bij een tusschengeval, een eiland, bepaalt men door die lijnen den vorm, dien het bij verschillende hoogten van het omgevende water zoude verkrijgen; hetzij die hoogten werkelijke of denkbeeldige zijn.

2. Dr. W. WOLKENHAUER heeft in de Deutsche Rundschau

für Geographie und Statistik, München, 1879, Bd. I, S. 589—598, deze methode besproken in eene verhandeling »zur Geschichte der Tiefenmessungen", en daarin als uitvinder dier niveau-lijnen voor den zeebodem aangewezen den franschen ingenieur PHILIPPE BUACHE (geb. 7 Febr. 1700 te Parijs en aldaar 27 Januari 1773 overleden, Géographe du Roi, en lid der Académie des Sciences de Paris). Deze had in 1737 eene kaart vervaardigd van het kanaal de la Manche, waarop hij van 10 tot 20 vademen de gelijke diepte der zee aangaf, ten einde het verband tusschen de gebergten in Frankrijk met die in Engeland aan te toonen. Zij werd gegraveerd achter eene verhandeling »*ESSAI DE GEOGRAPHIE PHYSIQUE. Où l'on propose des vûes générales sur l'espèce de Charpente du Globe, composée des chaînes de montagnes qui traversent les mers comme les terres; avec quelques considérations particulières sur les différens bassins de la mer. & sur sa configuration intérieure*", opgenomen in de »Mémoires de l'Acad. Royale des Sciences, Année 1752, page 399—416." Die kaart komt aldaar voor als Pl. XXV, onder den titel »*CARTE PHYSIQUE et PROFIL du CANAL de la MANCHE* et d'une partie *de la MER du NORD, où se voit l'état actuel des profondeurs de la MER, Avec les* Terreins *de FRANCE et d'ANGLETERRE, dont les Eaux s'ecoulent directement dans ces MERS, depuis les différentes* Chaines de Montagnes, *Dressée en* 1752. *Par* Philippe Buache". Links onderaan komt het volgende voor. »Avertissement. *L'Auteur presenta en* 1737 *à l'Acad*[e]. *des Sc. ce Plan Physique de la* Manche, *en manuscrit, et celui de l'*Ocean *vers l'Equateur, pour montrer comment se font les jonctions des* Terres, *soit prochaines, soit éloignées*". BUACHE voegt daarbij (page 415) »L'usage que j'ai fait des Sondes, & que personne n'avoit »employé avant moi pour exprimer les fonds de la mer, me »paroît très-propre à faire connoître d'une manière sensible »les pentes ou talus des côtés, & en même-temps les espèces »de lits que cette méthode me donne, & qui nous conduisent »par degrés jusqu'aux fonds des bassins de la mer".

BUACHE komt op zijne methode terug in eene verhandeling, opgenomen in het volgende deel van de Mémoires de Paris, Année 1753, p. 586—588, »*PARALLÈLE DES FLEUVES DES*

QUATRE PARTIES DU MONDE, Pour servir à déterminer les hauteurs des montagnes du Globe physique de la Terre, qui s'exécute en relief au dôme du Luxembourg." Hij maakte toch eene globe van tien voet middellijn, waarop de bergen en relief waren voorgesteld, en dit evenzeer op den bodem der zee was toegepast. Daarin spreekt hij over het gebruik zijner lijnen bij bergen. »De cette façon, au lieu de supposer l'abais»sement des eaux pour découvrir le terrein [sic] qui foit la »liaison de l'Angleterre avec la France, je ferai le contraire »sur le globe physique; car en supposant les élévations des »eaux au dessus du niveau réel de la mer, on apercevra les »terres qui se couvriroient par l'augmentation successive du »volume des eaux."

3. Later is deze methode gebruikt door den franschen ingenieur DUCARLA, die daarover in 1771 aan de Fransche Akademie schreef. Deze wordt wel als de uitvinder beschouwd: en zelfs heeft, zooals beweerd wordt, BUACHE, die toen nog leefde, verklaard, dat eene graphische voorstelling van niet vlak terrein niet in zijne bedoeling had gelegen. BUACHE was toen echter bejaard, en naar het schijnt, wat afgeleefd; zoodat men alle recht heeft, aan zijne vorige geschriften van N°. 2 meer gewicht toe te kennen; en deze geven, dunkt mij, aan dien schrijver wel degelijk het recht van prioriteit.

4. Deze bewering van WOLKENHAUER (zie N°. 2) werd bestreden door den Heer JOSEPH. L. LÍČKA. Assistent der Geodäsie a. d. k.k. böhm. techn. Hochschule zu Prag, in de »Zeitschrift für Vermessungswesen von Dr. W. JORDAN, 1880, Seite 37—50." Deze haalt aan »Bardin, la Topographie enseignée par des plans-reliefs et des dessins, Paris 1855" (Prix 200 Francs), en »Aperçu historique sur les Fortifications des Ingénieurs et sur le Corps du Génie en France, par le Colonel AUGOYAT. Paris 1860—1864, III vol.", die reeds van onzen landgenoot CRUQUIUS melding maakten. In het eerste werk komt eene kaart der Merwede voor van M. BOLSTRA, naar eene vroegere van CRUQUIUS in 1729 uitgegeven.

De oorspronkelijke kaarten had de heer LÍČKA natuurlijk niet gezien, en het scheen twijfelachtig, of die lijnen van gelijk niveau aan MELCHIOR BOLSTRA (geboren in 1704 en in November 1776

te Leiden overleden), dan wel reeds aan NICOLAAS SAMUEL CRUQUIUS (geb. 2 December 1678, overleden 5 Februari 1754 te Spaarndam) toe te schrijven waren. Door de welwillende hulp van onzen verdienstelijken Bibliothecaris, Dr. W. N. DU RIEU, werd ik in staat gesteld de rijke kaarten-verzameling van den Heer BODEL-NYENHUIS door te zien, en gelukte het ons eindelijk, dit punt tot volkomen zekerheid te brengen.

5. Vooreerst de straks aangehaalde kaart [1]).

Deze heeft tot opschrift van het enkele blad:

»*KAART van een gedeelte der RIVIER de MERWEDE van des-zelfs begin (als de Samenkomst van WAAL en MAAS) tot beneden HARDINKSVELD, met de OUDE WIEL en KILLEN*".

Zij loopt aan de westzijde van 51°48'6" tot 51°52'6" en aan de oostzijde van 51°45'6' tot 51°49'12" N.Br., aan de noordzijde van 21°1'48' tot 21°11 18' en aan de zuidzijde van 20°58'24" tot 21°7'54"; en is lang binnen den rand 59 cM. en breed 42 cM.; deze kaart is derhalve niet juist naar het Noorden gericht.

Links boven onder den rand staat: »*de Dieptens op deeze Kaart uitgedrukt zyn gereduceert op een ordin. Laag water, ofte* 158 *duim beneeden het Hardinksvelder Toren peyl, en de Vloeden* 20 *duim daar booven*"; terwijl rechts beneden op een steen, omgeven door wilgen en elzen struiken, geschreven is »*deeze gekopieert uit de Kaart van de Merwede door N. Cruquius*, 1729. *en op Eene coers en maat gebragt als de Kaart van de Maas en Merwede, beginnende van de Noord Zee tot Hardinksveld. Door M. Bolstra.*" Daaronder de »*Maat van Een duizent Rhynlandsche Roeden*", waaruit blijkt, dat de verkleining 1 : 20000 is.

Op deze kaart nu worden in de Merwede, de Maas, de Waal en de Killen, de lijnen van gelijke diepten aangegeven: die op een even aantal niet genoemde eenheden door getrokken lijnen, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 18, 20, 30, 40, 50; die op een oneven aantal door gestippelde, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 25, 35, 45

Men vindt op deze kaart de gaten van de »inundatien van 1658, 1709, 1726, 1728, 1729" en de »*Nieuw Overlaat dyk gemaakt* 1738", als verlenging van »*de Nieuwe Wolferse Dyk*

ofte Inlaag 1593, 1594 en 1595" achter Hardinksveld om: terwijl er verder op voorkomt het »*Project Overlaat door 't Land van Altena*". De kaart is dus van lateren datum dan 1738, denkelijk omstreeks 1740.

6. Bij een daarop ingesteld onderzoek bleek het, dat die kaart eene juiste verkleining was van eene andere in twee bladen [2]); waarvan het eene tot opschrift heeft: »*de Rivier* de *MERWEDE*, van (*ontrent*) [sic] *de* Steenen hoek. *Oostwaards op*. tot *verby het Dorp van* Sleeuwyk *met den* Ouden Wiel *en de* Killen, *die uit de selve na den* Bies-Bos *afloopen. etc.*"; en het tweede: »*de Rivier* de *MERWEDE*, van *even boven het Dorp* Sleeuwyk. *Oostwaards op*, *verby* Gorichem, *en de Mond van de LINGE*, *tot aan desselfs beginsel*, *namentlyk de Rivieren de WAAL en MASE*, *by* Woudrichem *en* Loevesteyn, *etc.*"

Deze kaarten zijn juist naar het noorden gericht, en bevatten van 51°47′33″ tot 51°50′27″ »*Latitudo*" en van 20°55′55″ tot 21°1′35″ en verder tot 21°7′5″ »*Longitudo*".

Uit de bijgevoegde schaal blijkt, dat deze kaart juist de dubbele vergrooting heeft van de vorige; bovendien staat daaronder »*de Tien Duysend Roeden van dese Kaarten maken Een Rhynlandse Roede*", zoodat hier de verkleining 1 : 10000, en die der vorige kaart 1 : 20000 is. Bovendien staat bij de aansluiting van het eerste blad aan het tweede, dwars over de Merwede, bij de cijfers der hier overal getrokken lijnen van gelijk, door cijfers aangegeven, niveau, (de gestippelde lijnen daartusschen hebben geene cijfers) — »A° 1729 *in July Voeten diep beneden 't lage Water*"; waaruit blijkt, dat de bij de vorige kaart nog onbekende eenheden hier, en derhalve evenzeer daar, voeten zijn.

Nergens komt op deze kaart de naam van den maker voor; maar de volstrekte gelijkenis met de vorige, de overeenkomst van den vorm der lijnen van gelijk niveau, dringen tot het besluit, dat dit de bedoelde kaart van 1729 is; terwijl hier niet alleen de Project overlaat door 't Land van Altena, maar ook de nieuwe overlaat achterom Hardinksveld, beide door gestippelde lijnen zijn aangegeven; de laatste was dan ook in 1729 slechts in project, maar in 1738 reeds uitgevoerd.

Een derde bewijs van de identiteit dezer kaart is geree-

delijk te putten uit de in N°. 4 aangehaalde groote kaart van de Maas en Merwede, van de Noordzee tot Hardinksveld. Daarbij komen onderscheidene kartons; en op eene daarvan eene verkleinde afbeelding van de kaart van CRUQUIUS; en deze is volkomen gelijkvormig aan de hier beschreven kaart. Over deze groote kaart handelen wij later.

7. Maar onafhankelijk van al deze niet rechtstreeksche bewijzen, is het mij gelukt er een rechtstreeksch op te sporen, dat de identiteit buiten twijfel stelt.

H. Ed. Groot Mogenden, de Heeren Staaten van Hollandt en Westvrieslandt committeerden bij Resolutie van 10 Mei 1729 de Professoren in de Philosophie en Mathesis op de Universiteyt te Leiden, 'SGRAVESANDE en WITTICHIUS, en den Landmeeter CRUQUIUS tot eene inspectie van de Rivier de Merwede van Gornichem af benedewaarts Deze zonden eene Missive met Bijlaagen, gedateerd te Leiden 8 July 1730, welke werden opgenomen in de Resolutien van H. Ed. Gr. Mogende van 12 July 1730, blz. 553—582, met drie kaarten; en welk stuk ook afzonderlijk is uitgegeven onder den titel »Rapport van de Professoren 'SGRAVESANDE en WITTICHIUS en van de Landmeeter CRUQUIUS, wegens haare gedaane inspectie van de Rivier de Merwede van Gornichem af benederwaarts, en wegens de voorgeslaage middelen tot voorkooming van inundatien. 33 blz. folio met 3 kaarten" [3]).

Van deze drie kaarten, alle 62 cM. lang en 52 cM. hoog, die derhalve door CRUQUIUS vervaardigd werden, zijn de beide eerste geene andere dan juist de beide bladen, in N°. 6 beschreven. Ook de derde, die daarbij behoort, komt in de verzameling BODEL-NYENHUIS voor, en is merkwaardig genoeg, om ze afzonderlijk te beschrijven.

Zij is in reepen verdeeld. De bovenste heeft tot opschrift »No. 3. *Caarte ofte Afteeckening Van de RIVIER DE MERWEDE Van GORICHEM af benedenwaarts etc.*", waarvan de schaal is 1 : 50.000; hierop komen de lijnen van gelijk niveau niet voor. De tweede heet »N°. 2. *Doorsnydingen van* DE RIVIER *omtrent den ouden Wiel*"; de zes doorsnijdingen zijn geteekend op de schaal 1 : 2000. Daarop volgt de derde over 495 mM. der breedte. »N°. 5. *Hoogte van den Dyk benoorden*

de MERWEDE; *ten aanzien van 't Waterpas, van de Rivier, en van 't Polder-Land, daar benoorden: tusschen 't Dordrechtse (of Papendrechtse) en 't Loevesteynse Veer*". De schaal is 1 : 10000, doch de lootlijnige afstand is 500 maal grooter. »*Dit Profil dan aanmerckende* 500 *maal langer uitgetrocken te zyn, vertoont zig alles is de ware Proportie.*"

Links van de laatste reep, en als onderste reep voor de geheele breedte, zijn nog twee kartons aangebracht. Het eerste geeft de »WATER-BEWEGING, *aan 't Hoofd te Hardinks Veldt Waargenomen*" en de »*SNELHEIT van STROOM*"; geheel bepaald naar de regels van de thans algemeen gebruikte graphische methode, waarbij de tijd door de abscissen, de Vloed, de Ebbe, en de Snelheid door ordinaten worden voorgesteld.

Het tweede karton draagt tot opschrift »*de Daaglykse Hoogte van 't HOOGSTE en 't LAAGSTE WATER in de RIVIER, op de Aangeteekende Maanden en Dagen, aan 't Hoofd te Hardinks Veld in 't Jaar* 1729 & 1730 *voor 't meerendeel Waargenomen, en de overige tot het Water van Hardinks Veld gereduceert, Waar door met behulp van 't Bovenstaande op yder Oogenblik, de Hoogte van 't Water, in Relatie van Dyk en Landen, op alle de Plaatsen langs de bovenstaande Rivier by-na kon werden gevonden.*"

Hier zijn de dagen van 1. Junius 1729 tot 31. Martius 1730 als abscissen genomen; en de »*Rhynlandsche Voeten beneden 't Hardinks Veldse Tooren Peyl*", van 5 tot 15 als ordinaten bepaald, geheel naar de vermelde graphische methode.

8. Laat ons nog even terugkeeren tot het zoo pas aangehaalde Rapport van 'S GRAVESANDE, WITTICHIUS en CRUQUIUS. De Resolutie van 10 Mei 1729, waarbij deze heeren gecommitteerd werden, had zijnen oorsprong in de zware overstroomingen van den winter 1729 Vandaar ook de »vier Pointen" die in het Rapport worden behandeld.

»Eerst.

Den staat van de Rivier de Merwede, zo op haar zelve geconsidereert, als met relatie tot de aanleggende Dijken en naburige Landen, van Gornichem af benedewaarts tot Dordrecht toe.

Ten tweede,

De gevolgen uit de tegenwoordige Constitutie te duchten, en zulx wel met relatie, 1. tot de Inundatien; 2. tot de Navigatie.

Ten derde.

De remedien welke wy (onder correctie) zouden vermenen dat tot voorkominge van Inundatien zouden konnen worden in het werk gestelt.

Ten vierde.

De middelen waar door de Rivier, met Relatie tot de Navigatie (zo ons voorkomt), zoude konnen worden verbetert."

De uitkomst van het onderzoek was het voorstel van een der beide overlaten op de kaart van CRUQUIUS (zie boven N⁰. 5), waarvan de voor- en nadeelen »en zulx: 1. Ten aanzien van de kosten. 2. Met relatie tot het te hopene effect", werden overwogen, met deze einduitkomst, dat de overlaat ten Noorden (dus die welke in 1738 werd gemaakt) aanbevolen werd.

Ten aanzien van onze lijnen van gelijk niveau, hier van gelijke diepten, vindt men slechts een paar woorden, en wel op blz. 554, waar men het volgende leest.

»De Linien in de Rivier getrokken, met de getallen daar »by genoteert, wyzen overal de Dieptens aan; zo dat door deze »Kaarte de regte constitutie van de Rivier, zo als wy deselve »in de maanden van Juni en Juli des voorledenen jaars heb»ben gevonden, in allen deelen word aangewezen;"

Dat dit Rapport niet zonder tegenspraak bleef, blijkt uit de Bijlagen, vier in getal.

Blz 582—594. »A. *Memorie, vervattende de reedenen, observatiën en raisonnencenten over het subject der middelen, om de Stad van Gorinchem, het Land van Arkel en den Alblasser Waard te bevryden van inundatie, by opstoppinge van de Rivier de Merwede door Ysdammen, gemaakt en overgegeven by de Heeren Burgemeesteren en Regeerders der voorschreeve Stad Gorinchem, mitsgaders Dijkgraaf en Heemraaden van het Land van Arkel aan de Heeren 's Gravesande en Wittichius, Professoren in de Philosophie en in de Mathesis op de Universiteit tot Leiden, mitsgaders Nicolaas Cruquius, Mathematicus en Landmeeter tot Delft, als tot het inspecteeren en examineeren*

der Riviere, en de voorgeslaage middelen tot bevrydinge van de Stad en Lande voor inundatien, by haar Edele Groot Mog. gecommitteert zynde." Niet gedateerd.

Blz. 594—597. »B. *Nader en specificq Concept, of Project, van de te maaken overlaat in den Dijk tot Sleuwijk, gemaakt en overgegeeven by de Heeren Burgermeesteren en Regeerders der Stad Gorinchem, mitsgaders Dijkgraaf en Dijkheemraaden van den Lande van Arkel, den* 19 *Juny.* 1729."

Blz. 598—610. »C. *Generaale Consideratien, by Dijkgraaf en Heemraaden 's Lands van Altena, opgestelt ter wederlegginge van het verzoek van de Heeren Drossaard en Burgermeesteren der Stad Gorinchem, mitsgaders van Dijkgraaven en Heemraaden van den Lande van Arkel en den Alblasser Waard, ten einde omme over den Dijk van den ouden Altenaaschen Polder een Overloop van Waater te maken.*" Gedateerd »17 Augusty 1729."

Blz. 610—621. »D. *Remarques van Burgermeesteren en Regeerders der Stad Gorinchem, mitsgaders Dijkgraaf en Heemraaden van den Lande van Arkel, op de Generaale Consideratien van Dijkgraaf en Heemraaden s' Lands van Altena, tot pretense wederlegginge van het versoek by de gemelde Burgermeesteren en Regeerders der Stad Gorinchem, mitsgaders Dijkgraaf en Heemraaden van den Lande van Arkel voorschreeven gedaan, ten einde omme over den Dijk van den ouden Altenaschen Polder een Overloop van Waater te maaken, aan de Leeden van haar Edelen Groot Mog. Vergaderinge gedistribueert en overgegeeven in de maand October deeses jaars* 1729."

Daarop schreef CRUQUIUS »Aanmerckingen over den Tegenwoordigen, Slegten-, Toestandt van de Rivier de Merwede. 's Gravenhaage. 1731. folio, 26 bladz." [4]), die door Burgem. en Reg. van Gorinchem werden bestreden.

In de Vergadering van HEd. Gr. Mog. van 14 Juny 1731 (zie blz. 330) werd daarop eene resolutie genomen tot het hervatten van de Besoigne van Gecommitteerden ter naadere voldoening van de Resolutie van 10 Mei 1729, op grond van »het geschrift (hier boven vermeld) door den voorschr. Landmeter, in verscheyden respecten daar van (van het vorige Rapport namel.) discrepeerende . . . mitsgaders . . . van de We-

derlegging (van dat geschrift) door Burgemeesteren en Regeerders der Stad Gornighem (sic) en door Dijkgraaf en Hoogheemraaden van de Lande van Arkel."

Later verscheen nog »Destructive Remarques op de abusive Aanmerckingen van N. CRUQUIUS van 17 January 1731 1735. folio, 12 blz." [5]).

9. Thans komt de groote kaart van BOLSTRA aan de beurt, die reeds in N° 5 en 6 vermeld werd [6].

Zij bestaat uit vijf bladen, die met de kartons alle 71 cM. hoog zijn; de beide eerste zijn 585 mM. lang, de beide volgende 50 cM., het laatste is 70 cM. lang.

Het eerste blad bevat van den onderrand tot het karton van 51°56'53" tot 52°2'0"; het laatste van het onderste karton tot den bovenrand van 51°44'10" tot 51°49'24" N.Br. De noordkant loopt over alle bladen van 20°15'24" tot 21°2'30", de zuidkant van 20°11'0" tot 20°58'12" Lengte. Hieruit blijkt dus, dat de kaart niet zuiver zuid-noord is gericht.

Het bovenste karton voor het eerste blad, het bovenste voor het tweede, en het onderste voor het vijfde blad, komen somtijds te zamen op een afzonderlijk blad voor. Dit is het geval bij het exemplaar uit de verzameling van BODEL NYENHUIS, dat nu beschreven zal worden

Het eerste blad, in dezen vorm slechts 53 cM. hoog (even als het tweede blad), heeft aan den bovenrand twee kartons naast elkander; het eerste geeft het »*Profil der Doorsnyding uyt de Pan tot in de Noord Zee*"; deze wordt op de kaart aangeduid als »Concept-Doorgraving van N. Cruquius"; zij beoogde de afsnijding van den »Hoek van Holland". Het tweede karton heeft tot titel »*Het Product der Peylingen op de Hoek van Holland binnen in de Pan, en daar buyten in de Noord Zee, volgens Waarneminge in de Maand September* A°. 1738", naar de graphische methode. Tegen den onderrand is een steen afgebeeld, dragende aan de bovenzijde de schaal (waaruit blijkt dat de verkleining is 1 : 20000) en aan de voorzijde het opschrift: »*de Ordinaire Ebbe in de Noord Zee voor de Mond van de Maas, valle lager dan de Dieptens die op deese Kaart staan uytgedrukt Vier en twintig Rhynlandse duymen, en de Vloeden dertig duym daar en boven; alles volgens waarne-*

minge gehouden sedert Nov 1738, *tot Nov.* 1739, *door M. Bolstra.*"

Het tweede blad bevat, boven aan links, twee kartons onder elkander. Het bovenste heet: »*Vergelijking van de Maas aan het Brielse Hoofd, met de Noord Zee, tot Katwyk;*" het onderste »*Hoog Water van de* MAAS *aan het* BRIELSE HOOFD."

Het vierde blad heeft een karton aan de benedenkant voor de geheele lengte van het blad, met het opschrift »*Vergelyking van de Maas aan het Brielse hoofd, met de Merwe te Dordrecht aan de Rietdykse haven, van Novembr.* 1739 *tot Nov.* 1741."

Het vijfde blad heeft rechts onderaan twee cartons boven elkander. Het bovenste geeft de »*Gemiddelde maandelykse waarnemingen, van de Rivier de Merwede in duimen; boven het Amsterdamse Peyl*"; waarnevens het »*BERIGT. de Ordinaire Vloeden en Ebben aan de Kop komen na-genoeg over een met die te Dordrecht. het Peyl daar deese Gronden na zyn in kaart gebragt is te Dordrecht, en aan de Kop, op 't Amsterdamse Peyl; dat verhogende tot Hardinksveld op* 40 *duim daar booven; ofte* 146 *duim beneeden 't Toren-peyl, aldaar; zynde na-genoeg gelyk met de Ordin. Ebben en de Vloeden* 16 *duim daar booven — te zien in deez' nevensgaande Tafel, meeting, peyling, karteering enz. by my M. Bolstra.*"

Het tweede is »*Afbeelding in Figuur, van de Vloeden en Ebben der Merwede, van Verscheide maanden; zo te Dordrecht als tot Hardinksveld.*" Beide loopen van Augustus 1739 tot Junij 1741.

Alle vorige kartons zijn naar de graphische methode bewerkt.

Op deze kaart komen onze lijnen weder voor, geheel in denzelfden zin behandeld, als bij de kaarten van N⁰. 4 en 5.

Nog hebben wij het blad, waarop de kartons voorkomen, die bij de vorige vijf bladen behooren.

Het eerste, dat boven het eerste blad behoort, bevat eerst den titel »KAART VAN DE BENEEDEN RIVIER DE MAAS EN DE MERWEDE, VAN DE NOORD ZEE TOT HARDINKSVELD" en dan den »*Tyd van 't Hooge (en 't Laage) water met Nieuwe ofte Volle maan op de Bovenstaande Plaatsen in Uyren en minuten.*"

Het tweede karton geeft »*Gemiddelde Vloeden (en Ebben)*" voor het tweede blad.

Beide kartons zijn naar de graphische methode bewerkt.

Het derde karton bevat »*de Vyf Blaaden van de Maas en Merwede in een Generaale Kaart door M. Bolstra*", op eene schaal van 1 : 80.000. Daarop is een kleiner karton aangebracht »*de Twee Blaaden van de Rivier de Merwede door N. Cruquius dus gecopieert en Verklynt door M. Bolstra*", op eene schaal van 1 : 80.000. Op beide kartons zijn wederom de lijnen van gelijk niveau overgebracht.

Voegt men dit kleine karton naast het grootere, waartoe beide zijn ingericht, dan wordt de titel gewettigd, die boven het grootere voorkomt »KAART VAN DE BENEEDEN RIVIER DE MAAS EN DE MERWEDE VAN DE NOORD ZEE TOT GORINCHEM."

Dit derde karton is door ISAAC TIRION gecopieerd, en opgenomen in de »HEDENDAAGSCHE HISTORIE OF TEGENWOORDIGE STAAT VAN ALLE VOLKEREN;" XVIIe DEEL, AMSTERDAM, 1749. 8°.; en wel tegenover bladz. 348; de lijnen van gelijk niveau zijn daarop echter weggelaten, hetgeen, bij de hier behandelde vraag, op een dwaalspoor zoude brengen.

10. Wanneer niet in N°. 7 het rechtstreeksche bewijs geleverd was, dat de lijnen van gelijk niveau aan CRUQUIUS toe te schrijven zijn, zoude men dit nog kunnen aantoonen door een beroep op eene kaart van CRUQUIUS van het jaar 1733 [1]), waarvan de titel, boven de kaart aangebracht, dus luidt:

»*Het Eylandt West-Voorn of* GOEDEREEDE *met de Dieptens en Droogtens Ronds-omme tot aan Den Hoek van* HOLLANDT, *etc. Volgens Order van Haar Edele Groot Mogende, de Heeren Staaten van Holland & West-Vrieslandt, Gemeeten, Gepeylt en Op Voetmaat in Kaart Gebragt, bezuyden het Eylandt in Maart* 1729, *en daar benoorden in de Maanden July* 1731. *en* 1732, *door den Landmeeter Nicol. Cruquius; en Vervolgens in 't Koper door David Coster, en Gelettert door Claas Kondet. Anno* 1733".

Deze omvat van 51°44′30″ tot 52°2′42″ Latitudo en van 19°57′18″ tot 20°22′42″, en is dus juist naar het Noorden gericht. Zij is binnen den rand lang 525 mM. en 6 dM. hoog.

Op deze kaart komen weder dezelfde lijnen van gelijke diepten voor; maar hier, even als later bij BOLSTRA, zijn die voor evene getallen getrokken, en die voor de onevene gestippeld. Tegen den west-rand komen de schalen voor, waaruit blijkt dat de verkleining is als 7 : 37500. Links boven is een gelijkzijdige rechthoekige driehoek afgesneden, waarvan de rechthoekszijden 39 cM. lang zijn. Van boven af gerekend, komen daarop de volgende kartons voor.

De bovenste heeft tot titel »*De Noord-zijde van GOEDEREEDE, tusschen de Wooninge Zee-Zicht en 't Houten-Hooft, aan 't Oost Eynde van de Haven*" op vijf maal grooter schaal. Hier vinden wij onze lijnen weder voor de diepten 5 tot 45, evenzeer getrokken en gestippeld als boven.

Het volgende, op eene wederom drie maal grootere schaal »*Toestandt van DEN QUAADEN-HOEK in July* 1732, *op grooter Voetmaat als hier boven*", met een *PROFIL VAN DE LINIE A*, op dezelfde schaal als 't vorige karton.

Daaronder »*de Wyze van 'T VALLEN EN 'T RYSEN des Waters, by Ebbe & Vloedt aan de Haven*", naar de graphische methode.

Onder aan nog »*Wyzing van DE MAGNEET-NAALDE, op Goedereede* in Maart 1729 bevonden 14 *Graden Noord-Westering.*"

Een gedeelte dezer kaart, bevattende het Haring-Vliet met de bijbehoorende oevers van Voorne en Over Flacqué komt later gecopieerd voor in een kaartje [1]), gericht ZW. naar NO., met het bijschrift »*Copie uit de* Kaart *van* Goede-reede *door N. Cruquius* 1732." Ook hierop komen dezelfde lijnen van gelijke diepten voor, die men op de bovenvermelde oorspronkelijke kaart van CRUQUIUS vindt.

11. Hoezeer de methode der lijnen van gelijke hoogten eenvoudig genoeg is, om te onderstellen, dat zij ook vóór 1726 bekend was, heb ik, niettegenstaande een nauwgezet onderzoek, daarvan nergens iets kunnen opsporen.

Bij het inzien van eene verhandeling van den ingenieur F. W. CONRAD, voorkomende in de Notulen van het Kon. Instituut van Ingenieurs 1848—1849, blz. 202, met de Bijlage XXIII, is bij mij een vermoeden gerezen. In die verhandeling

toch worden de lotgevallen nagegaan van een voorstel van onzen CRUQUIUS tot het opmaken eener algemeene waterstaatskaart van ons land, beginnende met zijn brief aan Prof. LULOFS. 14 October 1725, en eindigende met een Rapport van H. Ed. Gr. Mogende van 18 Maart 1728.

Niet onwaarschijnlijk komt het mij voor, dat CRUQUIUS bij het opmaken van zulk eene kaart, waarbij de hoogten der verschillende plaatsen natuurlijk een hoofdrol moesten spelen, tot de gedachte gekomen is van eene graphische voorstelling door middel van die lijnen van gelijke hoogten, en dat hij toen die methode heeft toegepast bij het onderzoek, vermeld in N°. 7.

12. Van denzelfden NICOLAAS CRUQUIUS bezitten wij nog de terecht beroemde kaart van het Hoogheemraadschap van Delfland [9]). Zij is verdeeld in 25 bladen, dat is vijf bladen hoog, en evenzeer vijf breed. Bovendien behooren daarbij twee bladen voor den titel en een verzamelblad, dat het geheel voorstelt, en waarvan hier de beschrijving moge volgen.

De onderzijde loopt van 51°51'20" tot 52°2'25"; de bovenzijde van 51°59'20" tot 52°10 30" N.Br., zoodat de kaart bijna Noord-Oost gericht is.

Ter linkerzijde komen de namen en wapens van vijf hoogheemraden voor; evenzeer vier ter rechterzijde, en daaronder een wapenschild met het octrooi »DE STATEN VAN HOLLANT EN WESTVRIESLANT *Consent: Accord: en Octroyerē* Dijkgraaf en Hooge Heemraden van Delflant *dese Nieuwe Kaerte Alleen te doen Drucken, etc. Gegeven in den Hage d.* 15 *Maart A°.* 1712. A. Heinsius *vs. ter ordonnantie van de staten* Simon van Beaumont." Daaronder staat verder »'T HOOGE HEEMRAEDSCHAP VAN DELFLANT met alle deszelfs deelen, op Voetmaet in zyn Geheel, en in de volgende vyf en twintich Stucken naukeuriger IN KAART GEBRACHT. A°. MDCCXII."

Boven de kaart staat als hoofd:

»'T HOOGE HEEMRAED SCHAP VAN DELFLANT."

Eene tweede uitgaaf bevat dezelfde verzamelkaart met het bijvoegsel rechts onderaan »Dus Verhelderd A°. 1750." Deze verheldering bestaat in de aanteekening van eene menigte ondergeloopen land ten N.O., O. en Z.O. van Delft. Het ineen

loopen en daardoor zich vergrooten der veenplassen maakte de verandering noodzakelijk in dit verzamelblad. Hierbij zijn de veranderingen aangebracht, die er in dit oppervlak van het hoogheemraadschap hadden plaats gegrepen; en evenzeer nu de wapens en namen der nieuwe hoogheemraden ter zijde aangegeven.

Bij deze kaarten vond ik eene schriftelijke aanteekening van Prof. MACQUELIJN. »CRUQUIUS, Landmr. heeft gemaakt de Kaart van Delfland; ook die van Vriesld. (exeunte S. XVII). De eerstgen. is zeer fraai daarna gegrav., maar, van de teekenen, die op de kaart staan, mist men de verklaring, wijl van dit laatste blad het koper, voltooid of half voltooid, is verloren gegaan. Het 1e vereenigingsblad van CRUQUIUS kaart heeft men zelfs bij 't Hgheemrdsch. van Delfland niet; want het is later met veranderingen overgegraveerd, 1750."

Een nader onderzoek omtrent deze punten heeft aangetoond, dat er van deze geteekende kaarten van CRUQUIUS te Delft niets voorhanden was; dat dus de vermelde kaart van Friesland (die ook nergens anders vermeld wordt) aan een lapsus calami is toe te schrijven; dat thans de verzamelkaart van 1712 wel te Delft voorhanden is; en dat daar van het verloren gaan van een koperen plaat niets bekend is.

Men vond er slechts de volgende beschrijving van de in die dagen gewone, rondom de kaart aangebrachte versieringen.

»'t Al oude Adelyke wapen van Delfland, pronkt op het voorhoofd van deze landkaart.

»De zorg der Hemels sit 't Haerder bescherming ter Eener, ende de voorsigtigheijt met hare Sluyskroon en Slangespiegel, ter andre zijde aenwijsende 't Hoogheemraedschap, welker eere wapenen, dese kaert cieraat bijzetten.

»De Meetkunde met hare werktuigen sit aen de voet van het pijlaster, ter eener zijde de verbeelding van den lantbouw en aen de andre kant de visserij, jagt etc., verbeeld door kindertjes, op de onderlijst, elk in noeste en vrolijke besigheid, bij het geklater der waterwielen, terwijl de dankbaerheijt haer wierook swaeijt, om het outaer aen het voetstuk van 't pijlaster; waer in hare WelEdelheits wapenen gebeelthoud vertoont werden om derselver naem en gedagtenisse aen de eeuwigheijt te wijen."

En dit is misschien hetgeen de Heer MACQUELIJN met het vermiste bedoelt.

Wegens de zeldzaamheid van die eerste verzamelkaart mogen hier de namen der Hoogheemraden in beide jaren volgen.

In 1712. d'Heer en Mr. Jacob Vredenburch van Adrichem, Raedt en Out Burgemeester der stat Delft, Hoogbailjuw en Dykgraef van Delflant.

d'Heer en Mr. Antony van der Heim, Raedt en Meester van de Rekeningen der Domeinen van de Heeren Staten van Hollant en West-Vrieslant Raedt der Stat Delft, Hoogh Heemraedt.

d'Heer en Mr. Franco Pauw, Secretaris van de Rekenkamer van Hollant, Hoogh Heemraedt.

d'Heer en Mr. Jacob Meerman, Secretaris van 't Hooge Heemraedschap van Delflant.

d'Heer en Mr. Adriaan Boogaert van Beloys, Penningmeester van de Oost Ambachten.

d'Heer en Mr. Simon van Beaumont, Secretaris van de Staten van Hollant en West-Vrieslant, Hoogh Heemraedt.

Heer Jan van Ruytenburch, Heer van Vlaerding en Vlaerdinger Ambacht, Raedt ter Admiraliteyt van West-Vrieslant en de Noorder Quartieren, Hoogh Heemraedt.

Heer Willem Lodewyck Baron van Wassenaer Heer van Ruyven van Maeslant en Maessluys, Raedt ter Admiraliteyt op de Maese, Hoogh Heemraedt.

d'Heer Gerard van der Esch, M. Dr. Penningmeester van de West Ambachten.

En in 1750.

d'Heer Abraham van Bleyswyk, C. F. Raedt en Oud Burgemeester der Stadt Delft, Gecommitteerde Raedt van de Heeren Staten van Hollandt en West Vrieslandt, Dijkgraef van Delflandt.

Heer Carel Baron van Wassenaer, Heer van Daeveren, Hoogh Heemraedt.

d'Heer en Mr. Paulus Teding van Berkhout, Raedt en Oud Burgemeester der stadt Delft, Hoogh Heemraedt.

d'Heer en Mr. Quiryn van Beaumont, Raedt der stadt Delft, Secretaris.

d'Heer en Mr. Adrianus van der Goes, C. Z. Penningmeester van de Oost Ambachten.

Heer Cornelis Baron van Aerssen, Heer van Voshol, Hoogh Heemraedt.

Heer Willem Baron van Wassenaer, Heer van Ruyven, Hoogh Heemraedt.

Heer Arnout Joost van der Duyn, Heer van Maesdam, Luytenant Generael van de Cavallery, Hoogh Heemraedt.

d'Heer en Mr. Willem Quarles, Penningmeester van de West Ambachten.

13. NICOLAAS SAMUEL CRUQUIUS, ook KRUIK genaamd, werd 2 December 1678 te Delft geboren en overleed 5 Februari 1754 te Spaarndam, alwaar hij in de Hervormde kerk begraven ligt; in het grafschrift, door hem zelven vervaardigd, geeft hij aan, dat hij een afstammeling in den 16den graad is van Graaf WILLEM II. Hij was candidaat in de Medicijnen, en werd Examinator der stuurlieden van de Oost Indische Compagnie te Delft, later Landmeter van Rijnland, en daarna Schout van Spaarndam; ook was hij lid van de Hollandsche Maatschappij te Haarlem en van de Royal Society te London. Den 28sten Maart 1716 werd hij aan de Hoogeschool te Leiden ingeschreven als Krukius, student in Medicijnen, geb. te Delft, 36 jaren.

Behalve de bovengenoemde kaarten, en vele andere, die niet in druk uitkwamen, schreef hij nog:

Tafelen van Sons op- en ondergang. Leiden (A. Sylvius) 1727. 8°.

Waarvan later in 1731 eene fransche vertaling [10]) door hem aan HERMANNUS BOERHAAVE werd opgedragen.

Loop en Plaats der Planeeten uyt den Aardbol voor 1729 [11]) en ook voor 1732 [12]). Leiden in plano.

Aurora en Vesper, den opgang en ondergang der Zonne. Haarlem 1735. 8°. [13])

Tegenwoordige Miswijzing der Compassen. Haarlem 1738. 8°. [14]).

Zonnewijzer in plano.

Tractaatje over de Waterpassingen en Peilingen aan en

omtrent de Rivieren de Merwede, den Goudsen Yssel, Noord- en Zuider-Zee, enz.

Zijne kleinere geschriften werden later in twee deelen bijeenverzameld.

Zijn zinspreuk was, met zinspeling op zijn naam: Scientia neminem cruciat.

14. De andere landmeter, in dit stukje voorkomende, MELCHIOR BOLSTRA, werd in 1704 geboren en overleed te Leiden, in November 1779. Sedert 1 Oktober 1731 was hij Landtmeeter van Rhijnlandt, en werd 18 Maart 1732 als student in Mathesis, oud 28 jaren, te Leiden ingeschreven. Van zijn hand verschenen er, behalve de bovenvermelde, nog onderscheidene andere kaarten.

15. Vooreerst zijn groote Atlas van Rhijnlands Waterstaat [15]) in folio. Zij bevat twaalf dubbele bladen kaarten N°. 1—12, waarvan er op vier rijen telkens drie naast elkander behooren te liggen; bovendien een dubbel blad voor den titel, een voor de sluizen, en een voor de verzamelkaart.

Deze laatste loopt van 52°13′ tot 52°24′20″ N.Br. en van 20°29′ tot 21°0′10″ Lengte.

Links boven bevat een schild het volgende.

AFBEELDINGE van RHYNLANDS WATERSTAAT ten Opzigte van 't VERGROOTEN der HAARLEMMER of LEYDSE MEER met de byna GECOMBINEERDE en OMLEGGENDE VEENPLASSEN, op ordre van de Wel Eedele Heeren DYKGRAAF en HOOG HEEMRAADEN van RHYNLAND. Door derzelver ordinaris Landmeeter Melchior Bolstra. NB. de Oevers geteekent met de Jaargetallen 1531. *en* 1591. *zyn getrokken uyt de kaarten der Voorz.: Meer, in Druk uytgegeeven by de Eedele groot Agtbaare Heeren der stad Leyden. Anno* 1610 *uyt de oude Rhynlands Kaart. Ao.* 1647 *en* 1687. *uyt de Tegenwoordige Groote Rhynlands Kaart, en Ao.* 1740 *volgens Meetinge: Ao.* 1739 *en* 1740 *gedaan by my ondergeschreeven Landmeeter. M. Bolstra.*

Rechts beneden staat een ander schild, waarboven de *Maat van* 1000 *Roeden*, waaruit blijkt dat de schaal is 1 : 10000. Op dit schild komt voor de belangrijke opgaaf der in verschillende tijden opeenvolgende oppervlakten.

BEGROOTINGE
Getrokken uyt de Bovengemelde Kaarten,
zynde in den Jaare 1531 *groot bevonden*
gereekent zynde in Mergens

De HAARLEMMER MEER	3040
LEYDSE MEER	2175
SPIERING MEER	850
OUDE MEER	520
Monteerende te Saamen	6585.

De voors: vier Meeren te Saamen
Gecombineerde zynde Monteerde als volgd

Anno 1591 *in 't geheel*	12375
1647	17082
1687	18100
in Anno 1739 *en* 1740	19500

En op heeden byna vereenigd zynde met Gecombineerde Veenplassen zal over zulks Monteeren de Numbre van 30000 *Mergens.*

Het daarop volgende dubbele blad is ook merkwaardig; het bevat volgens den titel, die onderaan voorkomt,

Concept, Sluyzen en doorgravingen, om daar door te verkrygen een Meerder Loozing voor Rhynlands Boezem water, uyt den Rhyn tot in de Noord Zee, omtrent Katwyk. Het Product der Maandelykze en Jaarlykze waarnemingen van de hoogte en laagte, de wyze van 't Valle en Ryzen der Noord Zee, en het YE, tot Sparendam, met de Rhynlands boezem tot Leyden. Beschouwing der oppervlakte van Rhynland, ten aanzien van de Ordinaire Vloede en Ebbe, in 't YE en de Noord Zee, op Ordre van de Wel Eedele Heeren Dykgraaf en Hoogheemraden van Rhynland, door M. Bolstra 1740.

Deze kaart bevat, wat de *sluyzen* aangaat »*de Concept Sluyzen* 1629", de »*Concept Doorsnyding en Sluyzen* 1740" en de »*Concept, Doorgraving en Sluys van den Jaar* 1570."

Een karton geeft de »*Beschouwing van de Oppervlakte van Rhynland, met dat van de onbepolderde en bepolderde Landen, beyde in hooge, middelbaar en laage.*"

De drie laatste soorten zijn door watermolens aangegeven, de drie eerste door graanschoven, koebeesten en hooimetten

met een hooivork daartusschen, eigenaardige zinnebeelden van hunne bestemming.

Van de eerste verzamelkaart komt een herdruk [16]) voor, bijna op 1 : 3 verkleind.

Nog bestaat er daarvan een veranderde herdruk [17]) met den titel in een schild boven links aangebragt.

NAUWKEURIGE KAART van de HAARLEMMER of LEIDSE MEER *met Aanwyzing van derzelver byzondere VERGROOTINGEN, en van de omleggende en byna vereenigde VEENPLASSEN. In gevolgen de Kaart daar van gemaakt door M. BOLSTRA, Landmeeter van Rynland, waarby gevoegd is eene aanwysing van het laatste Concept der BEDYKINGE dezer* MEER, *waarvan de Ring is aangeweezen door de Letteren AA tot M. Tot opheldering van den* TEGENWOORDIGEN STAAT DER VEREENIGDE NEDERLANDEN. Uitgegeven door Is. TIRION. 1745.

De opgaven in het schild rechts onderaan komen ook hierop voor.

16. Verder eene kaart van de Merwede van *'t Huis te Merwede* tot voorbij Dordrecht met eenige *Concept Kribbens*. Op deze kaart vindt men weder de vroeger behandelde lijnen van gelijke diepte. Zij is van het jaar 1761.

Dan [18])

KAART VAN DE RIVIER DE LEK, *VAN KRIMPEN TOT HET HAGESTEINSCHE SCHOOR, gedaan op Ordre van de Edele Mogende Heeren Gecommitteerde Raaden van de Staaten van Holland en West Vriesland. door Melchior Bolstra in den Jaare* 1751 *en vervolgens tot in* 1764.

Deze kaart bestaat uit zeven bladen folio. Het vierde blad draagt boven aan den titel

KAART VAN DE RIVIER DE LEK, MET ZYN UITERWAARDEN, NOORDER EN ZUIDER DYKEN, VAN DE MERWEDE BENEDEN KRIMPEN, TOT HET SCHOOR VAN HAGESTEIN BOVEN VIANEN.

Later [19]) de

KAART VAN *DE OUDE MAAS, omtrent de* Lint *en* Krabbe, *met eenige Dieptens en Concept Kribbens, zooals die met de Letters* A, B *en* C *zyn afgetekend, benevens de Coers en strekking des Vaar waters, zoo van Rotterdam op de Krabbe, als van de Krabbe op Dordrecht. zynde de Dieptens in dezen uit-*

gedrukt, Rhynlandsche Voeten, en op de Hoogte van de Ordinre Vloeden gereduceert in Augusty 1770, *door my* M. Bolstra.

In een blad dubbel folio.

Hierop komen alleen voor de punten van bepaalde diepte, die echter niet door lijnen worden vereenigd.

Voorts [20])

KAART van de MERWEDE of NIEUWE MAAS, van den YSSEL tot ROTTERDAM, met de Geprojecteerde Waterwerken A, B en C, ter verbetering van dit Rivier-vak.

De kaart is op een dubbel blad folio. Onder aan rechts staat:

Gepeild en Gereduceerd als vooren Gemeld door MELCHIOR BOLSTRA.

Links beneden staat *L. Schenk Jansz. sculpsit* 1772.

Eindelijk [21])

DE VIER AMBAGTS-POLDER IN RYNLAND. In een blad folio.

Rechts onder aan staat beneden een »REGISTER der groottens van ieder AMBACHT."

Aldus gemeeten, gekarteert en gecalculeert door MELCHIOR BOLSTRA, Ordinaris Landmeeter van Rynland, en het zelve in zyn geheel binnen Dyks afwaterende groot bevonden twee duysent twee en vyftig Mergen, en vier en taggentig Roeden. Zoo als mede de verdere deelen en geheele als in dit bovenstaande Register staan uitgedrukt.

Deze kaart bevat de afkaveling van gemelden polder.

17. Ten slotte nog een woord over BOLSTRA's geschriften.

Verbaal van de Inspectie der Dyken langs de Leck. 1744 [22]).

Hoognoodig onderzoek omtrent de waare oorzaaken van het steeds aangroeyend bederf der Leck. 1749 [23]).

In welke hoeveelheid zijn de Nederlandsche Rivieren sedert den aanvang deeser Eeuwe verzand? Wat is het Middel, om de Zanden en Slikken, die zig op derzelver bodem gezet hebben, van daar te verdrijven; en derzelver meerder verzanding voor te komen. 1754 [24]).

Welke zijn de waare Oorzaaken, dat het Strand bij Petten en de Hondsbosschen sedert eenige Jaaren zo aanmerkelijk is afgenomen? Wat is het beste Middel om het Strand te dier Plaatse te bewaaren en te doen aanwinnen. 1755 [25]).

Bovendien gaf hij met CORNELIS VELSEN:

Consideratien 1745 [26]).

Met AD. MUTSERT:

Nadere Consideratien op het Verbaal van de Inspectie der Dijken langs de Lek. 1749 [27]).

En met JOHAN LULOFS:

Kortbondig Vertoog van het eminente gevaar waarin zich de Provincie van Hollandt bevindt. 1755 [28]).

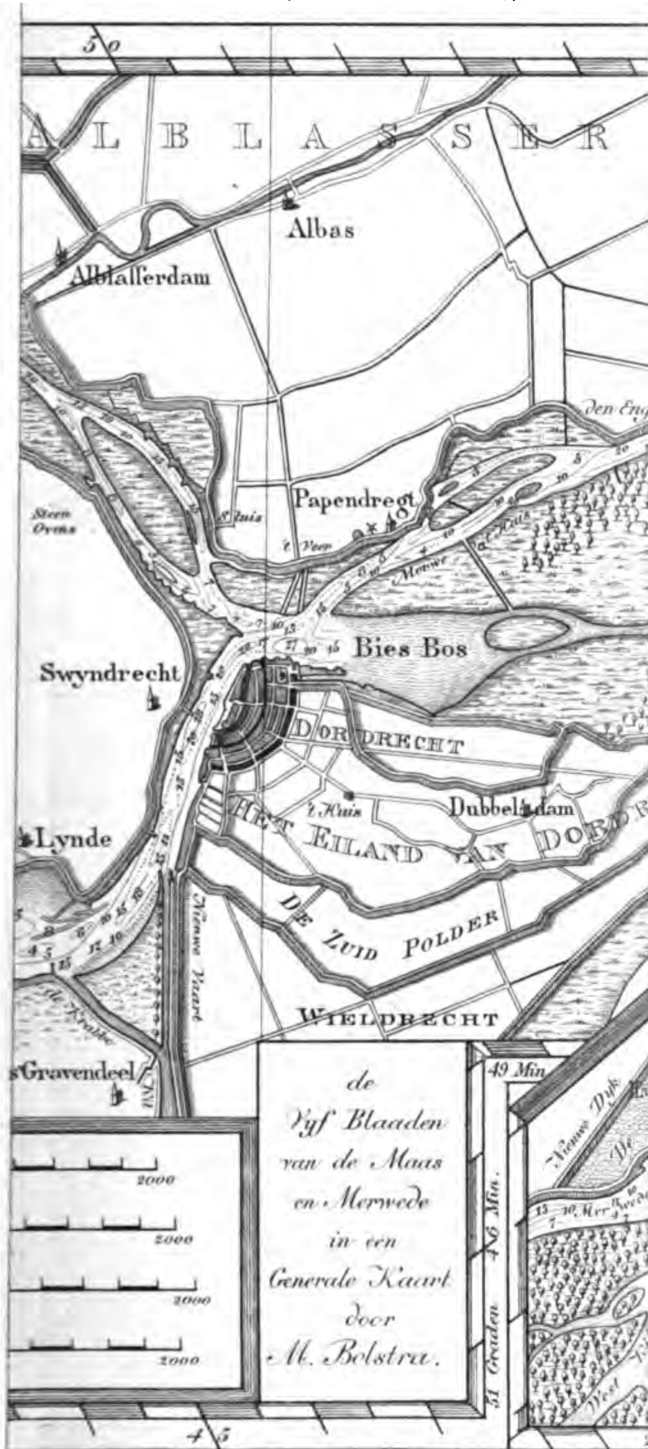
NASCHRIFT.

Eerst onder het afdrukken van dit stukje konde ik het volgende Rapport machtig worden.

Exposition Universelle de 1878, à Paris — Section Française. — Ministère de la Guerre-Service du Génie. — Notices sur les objets exposés par le Depôt des Fortifications, dans la Classe XV. Instruments de précision, et dans la Classe XVI. Géographie. — Paris 1878. 64 pages. 8°.

In het »Avant-Propos" wordt over de methode der horizontale doorsneden gesproken, zooals ze door DUCARLA (1771) was voorgesteld. In eene noot (bladz. 8) wordt hier herinnerd aan CRUQUIUS en aan PHILIPPE BUACHE; maar daarbij wordt de meening uitgesproken, dat het niet hun doel zoude geweest zijn, den vorm van de oppervlakten te bepalen (»la définition des formes du sol"); en dat men deze toepassing verschuldigd is aan den franschen ingenieur DUCARLA, die daarover in 1771 aan de Academie des Sciences eene verhandeling aanbood. Deze verhandeling wekte echter eerst de aandacht, toen daarvan in 1782 eene nieuwe uitgaaf verscheen door DUPAIN-TRIEL, die van deze methode in 1791 het eerste werkelijke gebruik maakte. Bij eene latere veranderde uitgave van de verhandeling van DUCARLA in 1804, schijnt DUPAIN-TRIEL nog weinig gevolg van zijne methode te verwachten.

Het bovenstaande heeft mij echter niet teruggebracht van het oordeel in N°. 3 uitgesproken, en blijf ik meenen, dat na onzen CRUQUIUS, en geheel onafhankelijk van hem, wer-



ALBLASSER
Albas
Alblasserdam
Papendregt
Steen Ovens
Bies Bos
Swyndrecht
DORDRECHT
Dubbeldam
HET EILAND VAN DORDR
Lynde
DE ZUID POLDER
Nieuwe Vaart
WIELDRECHT
s'Gravendeel
de
Vyf Blaaden
van de Maas
en Merwede
in een
Generale Kaart
door
M. Bolstra.
2000
2000
2000
2000
49 Min
46 Min.
51 Graden
Nieuwe Dyk

Di

de

vo

ça
su
la
G

zo
w
ne
w
ge
de
ve
da
ha
as
do
w
va
TI

he
na

kelijk PHIL. BUACHE de eerste was, die deze lijnen van gelijke diepte of gelijke hoogte gebruikte, om den vorm van de aardoppervlakte aan te geven.

Het kaartje, dat hierachter voorkomt, met het doel om het gebruik onzer lijnen van gelijke diepte duidelijk te maken, is genomen uit het karton, voorkomende op de groote kaart der Merwede door BOLSTRA, en beschreven in N⁰. 9; op het eind van dit Nr., bladz. 22, komt de beschrijving van dit karton zelf voor.

AANTEEKENINGEN.

---

1) *Kaart van een gedeelte der RIVIER de MERWEDE van deszelfs begin (als de Samenkomst van WAAL en MAAS) tot beneden HARDINKSVELD, met de OUDE WIEL en KILLEN.*

Deze is van M. BOLSTRA, 1 blad, denkelijk 1740.

2) *De Rivier* de *MERWEDE* van (*ontrent*) [sic] *de* Steenen hoek, *Oostwaards op*, tot *verby het Dorp van* Sleeuwijk *met den* Ouden Wiel *en de* Killen, *die uit de selve na den* Bies-Bos *afloopen etc.* (1e blad).

De Rivier de *MERWEDE*, van *even boven het Dorp* Sleeuwijk, *Oostwaards op verby* Gorichem, *en de Mont van de LINGE tot aan deszelfs beginsel, namentlyk de Rivieren de WAAL en MASE by* Woudrichem *en* Loevesteyn *etc.* (2e blad).

Deze kaart in twee bladen is van 1729; en blijkt geteekend te zijn door NICOLAAS CRUQUIUS.

3) Rapport van de Professoren 'S GRAVESANDE en WITTICHIUS en van de Landmeeter CRUQUIUS wegens haare gedaane inspectie van de Rivier de Merwede van Gornichem af benederwaarts, en wegens de voorgeslaage middelen tot voorkooming van inundatien. Met Bijlagen. folio. 70 blz. Met 3 kaarten.

4) Aenmerckingen over den Tegenwoordigen, Slegten-, Toestandt van de Rivier de Merwede. Door *N. CRUQUIUS.* 's Grav. 1731. folio. 26 blz.

5) Destructive Remarques op de Abusive Aanmerckingen van N. CRUQUIUS van 17 January 1731. ('s Grav.) 1735. folio. 12 blz.

6) KAART VAN DE BENEEDEN RIVIER DE MAAS EN DE MERWEDE, VAN DE NOORD ZEE TOT HARDINKSVELD.

De kaart in vijf bladen en een blad met karton is van M. BOLSTRA, omstreeks 1742.

7) *Het Eylandt West-Voorn of GOEDEREEDE met de Dieptens en Droogtens Ronds-omme tot aan Den Hoek van HOLLANDT, etc. Volgens order van Haar Edele Groot Mogende, de Heeren Staaten van Holland & West-Vrieslandt, Gemeeten, Gepeyld en op Voetmaat in Kaart Ge-*

bragt, bezuyden het Eylandt in Maart 1729. *en daar benoorden in de Maanden July* 1731. *en* 1732. *door den Landmeeter Nicol. Cruquius; en Vervolgens in 't koper door David Coster, en Geletteri door Claas Kondet. Anno* 1733.

[8]) *Copie uit de* Kaart *van* Goedereede *door N. Cruquius.* 1732.
Dit kaartje is van 1757, en bevat slechts een gedeelte der vorige.

[9]) 'T HOOGE HEEMRAED SCHAP VAN DELFLANT met alle desselfs deelen op Voetmaet in zyn Geheel, en in de Volgende Vijf en twintich stucken naukeuriger IN KAART GEBRACHT. A°. MDCCXII.
Deze kaart in 25 bladen, met 2 bladen voor titel, en een verzamelkaart is van N. CRUQUIUS.
Van het verzamelblad komt gewoonlijk de tweede veranderde uitgave voor van 1750.

[10])* TABLES || Du veritable Lever & Coucher du Centre du So- || leil dessus & dessous l'Horison natu- || rel du Chateau || de VIEUX POELGEEST || (sur 52 Degrez & 12 Minutes de Latitude vers || le Nord) calculées en Heures & dixiemes par- || ties de Minutes, selon les quelles l'heure & || le mouvement du Pendule peut être exa- || miné & corrigé exactement sans au- || cun Instrument; || Comme aussi || du commencement de l'Aube du Jour, & de la || fin du Crepuscule au Soir, en Heures & Minu- || tes, a cause que eette Connoissance peut || être quelques fois d'utilité. || On se peut servir aussi de cettes Tables || a LEIDEN & en RHYNLAND, || & avec un petit Supplement dans toutes les Vil- || les & Bourgs des Provinces Unies, comme de || même dans les autres parties de l'Europe, || qui sont situées environ sur le même De- || gré de Latitude vers l'Est ou Ouest. ||
Dediées au tres noble, fort celébre & sçavant || Seigneur || HERMANNUS BOERHAAVE || Maître ès Arts liberaux, Docteur en Medecine || & en Philosophie, excellent Professeur || en Medecine, Botanie, & Chemie, || dans l'Université de la Province d'Hollande || a Leide, President du College des Chirurgiens &c. &c. || par son tres humble & tres obeïssant Serviteur || & Disciple || NICOLAAS CRUQUIUS. || Membre de la Societé Royale d'Angleterre.
8°. 37 blz.
Onderaan op blz. 36 staat A LEIDE, || Imprimé par GUILLAUME DE GROOT, || pour ANGE SYLVIUS, Libraire dans || le Doelestraat. 1731.

[11])* *Loop & Plaats der PLANEETEN, uyt den Aardbol, voor het Jaar* 1729. *Te Leyden by A. Sylvius.* 4°. 1 blad.
Bevat den schijnbaren loop van Jupiter, Mars, Venus, Mercurius en Saturnus. Ook graphisch voor de opeenvolgende maanden.

12)* *Loop, Plaats en Distantie der Planeten, uit den Aardbol voor 't Jaar* 1732. 4°. 1 blad.

Bevat hetzelfde ook voor de maan, en de teekening der *Maan Eclips. 1ste Decemb. 's Avonds by ons* en die van de *Son Eclips voor Europa* 17 *Decem. Voor & na midd.* en *deze Eclips in Holland, Aldus.*

13)* Aurora en Vesper || *Dat is* || Het Lumieren des Daags, den Dage- || raat, of het begin der Morgen Schemering || Den Opgang, en Ondergang der Zonne; || met het eynde der Avond Schemering, || in uuren en minuten, || *Mitsgaders* || Den Azimuth, of streek van Zons Op- || en Ondergang bezuyden en benoorden, || het Oost en het West, in tiende Deelen || van Graaden: op yder Dag van 't Jaar. || *Voor de Rhynlands Sluysen.* || Te Spaarndam en Halfwegen. || Welke Tafelen, insgelyks konnen die- || nen voor de steden || Haarlem en Amsterdam. || En alle andere plaatsen, die omtrent op || dezelve Latitudo werden bevonden. || *Naaukeurig (in 't Jaar* 1735.) *uitgerekent* || Door || Nicolaas Cruquius. || Te Haarlem. || By *P. van Assendelft en de Erve van Kessel.* Boekverk. 8°. (12) blz.

14)* Tegenwoordige || miswysing || der || compassen || rondom den aardbol, || *Tusschen de* 65ste *Graden Noorder-* || *ende Zuyderbreette.* (July 1738). 8°. 12 blz.

Op blz. 12 onderaan staat:

Te Haarlem, gedrukt by *Michiel van Leeuwen.* 1738.

15)* *Afbeeldinge* van *Rhynlands Waterstaat.* Atlas in folio (1740).

De kaart zelve bestaat uit 12 dubbele bladen N°. 1—12; een dubbel blad met den titel; een met de sluis-projecten; een als verzamelblad.

16) *Afbeeldinge van Rhijnlands Waterstaat.* Op 1 vel. 4°.

Is een latere uitgaaf van het verzamelblad van Noot 15.

17) Nauwkeurige Kaart van de Haarlemmer of Leidse Meer. Is. Tirion. 1745. folio.

Is mede een latere, eenigzins veranderde herdruk van dezelfde verzamelkaart.

18) Kaart van de Rivier de Lek, *van Krimpen tot het Hagesteinsche Schoor.* 1764. 7 bladen in folio.

19) Kaart van *De Oude Maas omtrent de* Lint *en* Krabbe. 1770. 1 blad dubbelfolio.

20) Kaart van de Merwede of Nieuwe Maas van den Yssel tot Rotterdam (1772). folio.

[21]) De vier Ambagts Polder in Rijnland. 1 blad folio.

[22]) Verbaal van de Inspectie der Dyken langs de Leck. 1744. folio. 5, 3 blz.

[23]) Hoognoodig onderzoek omtrent de waare oorzaaken van het steeds aangroeyend bederf der Leck. 1749. folio. 4 blz.

[24])* In welke hoeveelheid zijn de Nederlandsche Rivieren sedert den aanvang dezer Eeuwe verzand? Wat is het Middel, om de Zanden en Slikken ... te verdrijven ... en te voorkomen. Haarl. 1753. 8°. (34) blz. 1 krt.
= Verh. Holl. Maatsch. v. Wetensch. Haarlem. I Dl. 1754.

[25])* Welke zijn de waare Oorzaaken, dat het Strand bij Petten en de Hondsbosschen sedert eenige Jaaren zo aanmerkelijk is afgenomen? Wat is het beste Middel om het Strand te dier Plaatse te bewaaren en te doen aanwinnen. Haarlem 1755. 8°. (16) blz. 2 krt.
= Verh. Holl. Maatsch. v. Wetensch. Haarlem. II Dl. 1755.

[26]) Consideratien van M. Bolstra en C. Velsen. 1745. folio.

[27]) Nadere Consideratien op het Verbaal van de Inspectie der Dijken langs de Lek. 1749. folio. 17 blz.

[28]) Kortbondig Vertoog van het eminente gevaar in hetwelk zich de Provincie van Hollandt bevindt. 1755. folio. 7 blz.

BOUWSTOFFEN VOOR DE GESCHIEDENIS

DER

WIS- EN NATUURKUNDIGE WETENSCHAPPEN

IN DE NEDERLANDEN.

DOOR

D. BIERENS DE HAAN.

N°. XX. VOORLOOPER DER ZEEKAARTEN. — DE ZEEKAARTEN VAN WILLEM JANSZ. BLAEU.

1. Zooals men weet is onze LUCAS WAGHENAER de eerste geweest, die zeekaarten uitgaf; waarover men kan raadplegen mijne Bouwstoffen N°. XII, § 7, blz. 233. Maar de steeds ijverige navorscher FRED. MULLER vestigde mijne aandacht op een veel ouder boekje »Caerte van der zee om Oost en West te zeylen [1])" van 1541.

Men zoude zich echter zeer vergissen, wanneer men daarin eene gewone zeekaart verwachtte: vooreerst betreft het hier alleen kustbeschrijving en zoogenaamde »landverkenningen", dat is voorstellingen van de kust, zooals deze zich, van het schip gezien, aan het oog vertoont. Maar daarenboven zijn deze voorstellingen niet geteekend, maar daarentegen slechts in woorden omschreven.

Zoo leest men blad 2 rectò:

„Itē vā Heylige lant nader Elue oost zuytoost tot || Schoerhoeck toe/ eñ vā Schoerhoec tot die Butter || ton oost ten zuydē. Buttersant lecht ouer dat Vo- || gel sant/ vā dē Butter ton tot dye Moster ton oost || ten suydē/ van die Moster ton tot die bakē oost aen || op seuen of acht vadē/ niet nader aent zuytlant. Eñ || dan oost zuytoost also langhe als die twe toor-

nen || ouer een comen/ dat is Oldebroec int lant te hale || voor die Medem/ dan oost na Brunsbutel/ dā hout || dat voortlant tot die Stoer.

Itē Wangherooge zult ghi kennē daer staet een || cleyn kerckxen op/ eñ die toren staet aent westeynde.

Itē Spijkerooghe zult ghi kennen eñ het zijn || slechte duynen."

Evenzoo blz. 3 recto:

„Itē als ghi in die Lauwersche wilt zeylen so sult || ghi dat steenhuys op Schiermonijke oge eñ die mo || len ouer een brenghen/ eñ lopen also die Borne in.

Itē Schiermonike oge te kennē dat is een leghe || duyne/ eñ opt west eynde staet een steē huys/ ende || Schiermonike oge is lanc twe mylen/ eñ tusschen || Schiermonike oghe eñ Amelant leyt een rif/ eñ als ghi dat wester gat wilt in zeylē/ so sult ghi langes || Amelant vaste bi dat landt houden eñ het is diep op || een leech water drie vadem."

Op deze wijze wordt overal de beschrijving van de kust gegeven, en wel achtereenvolgens van:

1 verso. Bouenberghen, Vrieslantszijde, Heylinghe lant.

4 recto. Die Maese, Dat Veerghat, Die Wielinghe wt te zeylen.

5 recto. Die Wielinghe in te zeylen.

5 verso. Zeelandt, Vlaenderszyde, Dat Swyn.

6 recto. Dat Cloeke diep, Die lopinge van dē stroom vā den Seyms langhes die Cust vā Bartangen en Vrancrijck.

7 recto. Dit zijn sommige havenē van Retouwen eñ Britanien.

8 recto. Die Baye.

11 verso. Dat is die gronde eñ diepte van Bertangen.

14 recto. Bertanien, Die coerts vander Kiliaeds.

15 recto. Die streckinge vā die cust van Portingale eñ van Spangien.

15 verso. Massisacho.

18 recto. Dit zyn die getijden van Portingale, Spangen eñ Vranckrijck.

19 recto. Walterslande.

19 verso. Dit zijn die hauenen langhes die custen van Spangen ende van Portingale.

20 recto. Die cape Prior.
24 recto. Dit sijn die ghetijden langes die cust van Yerlant eñ Enghelant.
25 recto. Die lopinghe vander stroomen van Yerlandt ende Enghelandt.
26 recto. Poortlant. Dit sijn die hauenē langes den west cust van Enghelant.
29 verso. Die diepte langhes Enghelant.
31 recto. Die streckinghe ontrent Engelants eynde ende van yerlandt.
32 verso. Hier beghint hoemen in Noorweghen seylen sal.
33 recto. Dit is te zeylen in dat Wester gat.
36 recto. Van den Swine oostwaert.
38 recto. Die coerts na Dantsick. Dit is na Rijghe te zeylen.
38 verso. Van Reuel tot Gotlant.
39 recto. Bi noordē Gotlant om na Reuel. Dit is die Coerts door die Belt.

Men kan zich door deze opgaaf een denkbeeld vormen van de menigte inlichtingen omtrent de vermelde kusten, die zeker het gevolg zijn van herhaalde waarnemingen door tal van zeevarenden op hunne reizen bijeenverzameld. En daardoor is de titel van »Caerte" wel gewettigd, al is dit geheel iets anders dan hetgeen nu onder dien naam wordt verstaan.

Van dit boekje is nog bekend een herdruk van 1588 te Amsterdam bij CORNELIS CLAESZ.

2. Een dergelijke »Kaerte van dye Suyd zee" is bij denzelfden drukker een jaar vroeger 1540 verschenen: het bevat evenzeer beschrijvingen van landverkenningen aan de Zuiderzee, en begint aldus:

„Item die wil zeylen van Amstelredam || ter zeewaert die ghaet van tyoort nae || Urck noort oost.

¶ Item om te weten die mercke van || muydersant/ als Monikedam is om- || trent dat west eynde van schetelboucks hauen/ oft || als dat huys te muyden staet tusschen weesp eñ die || terck te muydē so syt ghi te neuen dat sant."

De 14e bladzijde eindigt aldus:

„Item deese Kaerten sal nyemant na || drucken of hi heeft oorlof van die hee- || ren van Amstelredā of hoor [sic] dienaer ||

dye ghene dye die Tonnen leg- || ghen oft dye die Bakens || setten."

Het schijnt hier eene soort van octrooi te zijn, echter zonder bekrachtiging der overheid.

De 17e bladzijde geeft ons eene figuur, waarvan eerst de onderstaande beschrijving moge volgen.

„Item, die weten wil hoe veel die maen after dye || zon of voor is. So salmē weeten dat die maē in || een etmael wasset oft mindert op dese ronde figuer || alle dage een strefe/ eñ. v. strekē maken. iiij. vre/ eñ || xv. streken maken. xii. vren/ so is dye maen vol van || die zon of. Daer bouen ende beneden dese ronde fi- || guer staet."

De figuur zelve bestaat uit een cirkel met de I H S in het midden en twee concentrische ringen daaromheen, die door stralen in 32 sectoren verdeeld zijn. De twee bovenste zijn ledig; de overige links bevatten van boven naar beneden de cijfers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 21 (lees 12), 31 (lees 13), 41 (lees 14) en 51 (lees 15); dan weder rechts naar boven de cijfers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 31, 41 en 51 (lees 13, 14, 15). De buitenste ring bevat de gedaante van het donkere gedeelte der maan, zooals die zich op de aangewezen punten van haar loopbaan voordoet; beginnende bij volle maan boven, grooter wordende naar de nieuwe maan beneden, en weder afnemende tot volle maan boven. De figuur geeft alzoo eene zeer duidelijke voorstelling van de verschillende phasen der maan op de verschillende tijdperken van haren ouderdom, maar is tamelijk grof geteekend, zooals uit het hier bijgevoegde plaatje, Fig. 1, blijkt.

3. De beide in N^{0}. 1 en 2 beschreven boekjes vond ik in de Akademische bibliotheek te Amsterdam onder het nummer S, 1584 en 1585. Achter het tweede is nog bijgebonden een boekje over scheepsrecht van denzelfden druk en bij denzelfden uitgever, dus wel van denzelfden tijd, hoezeer er geen jaartal op voorkomt. Het draagt den titel „Ordinancie dye die ghemene schipperen stuermannen boetsgesellē eñ coop- luydē mit malcanderen begherende vā schiprechte datmē in Hol- lant/ Zeelāt/ Blaēdere houdende zijn." [3])

Het bevat een en dertig artikelen omtrent de rechten en verplichtingen van den schipheer of schipper, den coopman of

vrachtman, de schipmans, over de verdeeling der schade, het gebruik van lichtschepen en lootsmannen, den tijd voor de lossing, enz. Het laatste artikel luidt aldus:

„xxxi. Item het si saecke dat die schipper leyt ghelae- || den op gheen side tzees ende hi heeft noot te verco- || pen van des coopmans goede tot des scheeps pro- || fijte ende dat schip blijuet verlooren met ongheual || soe sal dye schipheer betaelen den coopman van al || soe veel goets als hi vercoft heeft alst in dye marct || costede daer dye schipheer lade eñ dan en sal hi geẽ || vracht of hebben Voors vercoopt dye schipper ee- || nich ghoet van des coopmans goedẽ aan dese sijde || des zees dat sal den coopman betalen als dye weer || de aen dye marckt gheldet twysschen den minsten || ende den meesten/ ende daer sal die schipper zijn vol- || le vracht of hebben.”

Men vindt hier de ruwe beginselen van avary, grosse-rekening, die ook thans nog niet de volmaaktheid schijnt bereikt te hebben.

4. Deze kaarten waren de voorlooper der eigenlijke zee-kaarten, waaronder die van onzen LUCAS JANSZ. WAGHENAER (zie Bouwstoffen N⁰. XII) de eerste waren. Daarna kwamen die van WILLEM JANSZ. BLAEU, voor 1605 ook wel WILLEM JANSZ. VAN ALKMAAR geheeten, ook eenvoudig WILLEM JANSSEN. Deze was in 1571 te Alkmaar geboren, en richtte naderhand in Amsterdam eene boek-, plaat- en kaart-drukkerij op, die groote vermaardheid verkreeg, ook buitenslands; zijne atlassen, zee-atlassen en niet minder zijne hemel- en aardgloben waren spoedig zeer gezocht, en hun roem was van langen duur. Hij overleed aldaar 18 Oktober 1638.

Hij gaf drie werken uit, die op dit onderwerp betrekking hebben.

Licht der Zee-vaert. Amst. 1618—1621. oblong. folio, III Dln.; waarvan ook een herdruk te Amsterdam, 1625 [4]).

See-Spiegel, Inhoudende een korte Onderwijsinghe in de Konst der Zeevaert. Amsterdam 1622, III Dln. folio; waarvan ook een herdruk te Amsterdam, 1652 [5]).

De groote Zee-Spiegel. Amsterdam 1624, II Dln., groot folio; waarvan herdrukken in 1627, 1631, 1652 [6]) in III Deelen.

Niettegenstaande deze vele herdrukken, — of misschien wegens het vele gebruik, dat uit deze vele herdrukken wel zal

blijken, — zijn meer of min volledige exemplaren zeldzaam. Daarom wil ik van deze gelegenheid gebruik maken om volledige exemplaren dezer beide laatste werken, die te Leiden op de Bibliotheek voorhanden zijn, te beschrijven.

Doch eerst een paar woorden over de inleiding van het Derde Deel van 't Licht der Zeevaert: VAN HET GEBRUYCK DEZES BOECKS. Hierin wordt vooral behandeld *de Afwijckinghe der Naelde ofte de veranderinghe van 't Compas*, de miswijzing van het compas; en de graadboogh met al zijne onderdeelen, en een tafel voor zijne constructie. Overigens komen ook hier, behalve de dertig kaarten, een groot aantal landverkenningen voor. Uit de opdracht aan de „Heeren Staten Generael der vereenighde Nederlanden. Midtsgaders Den Doorluchtigen/ Hoogh. ghebooren Vorst ende Heeren/ Maurits," blijkt dat „de twee voorgaende Deelen innehouden de Beschryvinghe van de Oostersche ende Westersche Zeevaert," die juist het onderwerp van den Seespiegel uitmaken, en dus nu ter sprake zullen komen.

Ter wille van de merkwaardigheid volge hier het KLINCKDICHT van J. V. VONDELEN,

VVas nu de Straet gheveeght van overgheven guyten
Die d'Archipelago benouwen vroegh en spae,
En trecken haer ghewin uyt vromer lieden schae,
En terghen Godt, en 't Recht met steelen en vrybuyten:
De Cypersche handelaer gaf niet twee kop're duyten
Vyt vreeze van 't gevaer: 't verzeeck'ren bleef haest nae;
De koopman sliep gherust, terwijl op Gods ghenae
Hy wisselt een Katthoen, en zy zijn zilv're kluyten:
Want anxt van schipbreuck is van yders hert ghestreecken,
Nu 't LICHT DER ZEEVAERT blaeckt, en helder is ontsteecken
Men vreest' er noch Charybd' noch Scyll', noch plaet, noch blinck,
Natuere, dier jeloers onentvallighlijck ons banden,
Met klippen onder zee, van Turcxze en Griecxze stranden
Moet dulden, dat wy daer gaen landen vry en vranck.

5. Het tweede werk is verdeeld in drie deelen, waarvan de beide laatste ieder zes boeken bevatten.

Het Eerste Deel (1652) bevat „Een korte Onderwijsinghe in de KONST DER ZEEVAERT", 60 blz., met verschillende sterrekundige verklaringen, figuren en tafels.

Het Tweede Deel (1648) houdt in „Eene beschrijvinge der Seekusten Van de Oostersche ende Noordsche SCHIPVAERT."

Daarvan bevat het Eerste Boeck. „De Beschrijvinge der Noordzee/ en kusten van Hollandt/ Vrieslandt/ Holsten en Jutlandt; Van Amsterdam tot Schagen", met de Pas-Caerten N^{0}. 1—9, 20 Landverkenningen, 30 blz.

Het Tweede Boeck. „De Beschrijvinge der Seekusten van Noorwegen/ Denemarcken/ Holsten en Mekelenborgh. Van der Neus en Schagen tot Bornholm en Statijn in Pomeren", met de Caerten N^{0}. 10—18, 28 Landverkenningen, 36 blz.

Het Derde Boeck. „De Beschrijvinge der Seekusten van Pomeren/ Pruyssen/ Coerlandt/ Lijflandt en Sweden. Gelegen aan de Oost-Zee", met de Caerten N^{0}. 19—38, 43 Landverkenningen, 40 blz.

Het Vierde Boeck. „De Beschrijvinge der Seekusten van de Oostzijde van Enghelandt en Schotlandt", met de Caerten N^{0}. 31—40, 28 Landverkenningen, 26 blz.

Het Viifde Boeck. „De Beschrijvinge der Seekusten van Noorweghen. Van der Neus tot de Noord-kaap en van 't nieuw gevonden Landt Spitsbergen.", met de Caerten N^{0}. 41—48, 48 Landverkenningen, 24 blz.

Het Seste Boeck. „De Beschrijvinge der Seekusten van Laplandt en Russen/ en der geheeler Witte Zee. Van de Noordkaap Oostwaert tot Nova Zembla", met de Caerten N^{0}. 49—56, 24 Landverkenningen, 20 blz.

Het Derde Deel (1652) inhoudende „Eene beschrijvinge der Seekusten van de Westersche SCHIPVAERT". is mede in zes Boecken verdeeld. Daarvan bevat:

Het Eerste Boeck. „De Beschrijvinge der Seekusten van Hollandt/ Zeelandt/ en Vlaenderen. Van Tessel tot de Hoofden", met de Caerten N^{0}. 57—62, 22 Landverkenningen, 28 blz.

Het Tweede Boeck. „De Beschrijvinge der Seekusten van Vranckrijck/ van Cales tot aan Heysant: Ende van Engelandt/ Van Doveren om Engelandts-eyndt, tot de hoek van S. Da-

vid", met de Caerten N°. 63—73, 73 Landverkenningen, 40 blz.

Het Derde Boeck „De Beschrijvinge der Seekusten van Yerlandt", met de Caerten N°. 74—84, 67 Landverkenningen, 44 blz.

Het Vierde Boeck. „De Beschrijvinge der Seekusten van Vranckrijck en Biscaijen Tusschen Heyssant en Caep de Ortegael", met de Caerten N°. 85—93, 74 Landverkenningen, 34 blz.

Het Vijfde Boeck. „De Beschrijvinge der Seekusten van Gallusen/ Portugael en Spanjen/ Van de C. Ortegael tot de Straat van Gibraltar", met de Caerten N°. 94—102, 71 Landverkenningen, 30 blz.

Het Seste Boeck eindelijk. „De Beschrijvinge der Seekusten van Barbarien/ Van de straat van Gibraltar tot de Caep de Geer. Midtsgaders van de Canarische en de Vlaemsche Eylanden", met de Caerten N°. 103—108, 34 Landverkenningen, 18 blz.

De »Landverkenningen" zijn hier niet meer louter beschrijvingen, zooals in de boekjes N°. 1 en 2, maar opgehelderd door schetsen; zie de voorstelling van het eiland Madera, in de figuren 2 en 3, waarbij de onderschriften voorkomen:

bij Fig. 2. „Als Madera zuyden van u. is 12 mijlen/ vertoont het aldus."

Bij Fig. 3. „Als Madera w. z. w. van u. is 10 mijlen/ is 't aldus gedaen."

afgeteekend uit twee verschillende gezichtspunten. Voor de zeevarenden waren deze afbeeldingen zeker van groot gewicht.

6. Lijst der Pas-caerten.

1. Van de Oosterse en Noordse schipvaert van Nederlandt tot Nova-Zembla.
2. *Van de* Noord Zee.
*3. *Van de Zuijder Zee.*
4. *Van de* Vliestroom.
5. Het Vlie en Amelander gat.
6. *De Wester ende Ooster Eemsen met de ander gaten der Zee tusschen Amelandt en Langeroogh.*
7. *Van de* Weser, Elve, *en* Eyder.

8. *Vande Eylanden, Stroomen en droochten aen de Cust van Jutlandt tusschē de Eijder en Rifhorn.*
9. *Afbeeldinghe der Zeecusten van Jutlandt tusschē Schagen en Refhorn.*
10. *Vande Custen van Noorwegen, Denemarcken, Holsten Mekelenborg en Pomeren van Der Neus en Schagen tot voorbij Bordholm.*
11. *De Zeecusten van Noorwegen tusschen Der Neus en Langesondt.*
12. *De Zeecusten van Noorwegen tusschen de Langesondt en Pater noster.*
13. *Van 't Schager Rack tusschen Schagen en Kol.*
14. *Der Schoonse en Zeelandsche Kust tusschen Kol en Valsterbon.*
15. *Van 't Noorder deel van de Belt.*
16. *Van 't Zuijder deel van de Belt.*
17. *De Zeecusten van Holsterlandt, Mekelenborch, en de Eijlanden Laland, Falster en Meren.*
18. *De Zeecusten beoosten Valsterbō, van Bornholm en 't Eylandt Rugen.*
19. *Van de* OOST ZEE (1622).
20. *De Zeecusten van Pomeren tusschen het Swin en Rijgshooft.*
21. *De Zeecusten van Pruijssen tusschen Rijgshooft en Der Memel.*

*22. *De Zeecusten van Coerlandt tusschen Der Memel en Derwinda.*
23. *Verthoonende 't Canael tusschen 't suijdeinde van Oesel en Coerlandt en den grooten inham van de Rijgsche Zee.*

*24. *'t Noorder deel vandē Rijghse Inham, de Meumondt en 't Eylandt Dageroort.*
25. *De Zeecusten van Lijflandt van Dageroort tot Revel en van Vinlandt daer tegen over.*
26. *Vande Lijflandsche zee, van Revel en Elsenoos tot het uijterste der Oost-zee.*
27. *De Custen van Schoonen en Sweden tusschen Bornholm ofte Sandthamer en Calmer.*
28. *De Zeecusten van Godtlandt met de omleggende Eylandekens.*

29. *De Custen van Sweden, tusschen Calmer en Landsoort 't gat van Stocholm.*
30. *Caarte van 't Stocholmse Liet.*
31. *De Custen van* ENGELANDT, *Nederlandt, Jutlant en Noorwegen, gelegen aende* NOORDZEE.
32. *Verthoonende de mont vande Teemse de Rivier van Londen met alle gronden, diepten en ondiepten daarvoor gelegen.*
33. *De Zeecusten van Engelandt tusschen Aelborgh en Crammer.*
34. *De Noordkusten van Engellandt tusschen Crammer en Flamborger hooft.*
35. *De Noord Çust van Engelandt tusschen Flamborger Hooft en de Rivier van Neiesteel.*
36. *De Custen van Engelandt en Schotlandt tusschen Tinbij en Donde.*
37. *De Custen van Schotlandt van Donde tot d'Eylanden van Orkanesse.*
38. *Eijgentlijcke afbeeldinghe vande Eijlanden Hitlandt, anders Scetlandt, Falo eñ Faijerhil naar hare rechte gelegentheijt ontworpen.*
39. *Van de Eijlanden van Faro ofte Farre, vertoonende na 't leven de wōderlijcke gebroockenheyt ende gestalte der zelver, en watmen in 't bezeijlen van dien aldaer te schouwē heeft.*
40. *Verthoonende in wat ghestalte de Eylanden (Hebriden ghenaemt) achter de noordwesthoek van Schotlandt gheleghen zijn.*

(De drie laatste titels ook in het fransch.)

41. Van de Westcuste van Noorwegen en Spitsbergen.
42. *De Zeecusten van Noorwegen tusschen Der Neus en Schieteness.*
43. *Het Liet van Bergen begrepen in twee stucken.*
44. *Van de Noorweegsche Cust van Olde tot Stemmesheft.*
45. *Het Liet van Dronten.*
46. *De Custen van* Noorweghen *tusschen Dronten en Tromsondt.*
47. *Van 't noordelijckste deel van Noorwegen van Tromsondt om de Noord Caap tot Noordhijn.*
48. JAN MAGEN EYLANDT. — 't Nieuw gevonden lant Spitsbergen.

49. *Van de Cust van Laplandt en Russen tusschen de Noord caap en Nova Zembla.*

50. *De zeecusten van* Noorwegen *vā de Noordhijn tot Wardhuijs. — Het Eylandt Wardhuijs.*

51. *De Custen van Laplandt tusschen Wardhuijs en Kildijn.*

51½. *De Rivier van Kola en het Eylandt Kildijn. — Het Eylandt Kilduijn.*

52. *De Custe van Laplandt tusschen Kilduijn en de seuen Eijlanden.*

53. *De Custen van Laplandt tusschen de 7 Eijlanden en Swetenoes.*

54. *Van de Mont van de Witte Zee.* — LOMBARCHO.

55. *De Zeecusten van Laplandt tusschen 't Cruijs Eijlandt en Waniga en van Puslād. tot verbij de Riviere van Archangel.* — De Riviere Dwina *vande mont af tot de Stadt Archangel toe.*

56. *'t Westersche deel vande Witte Zee begrijpende de Zeecusten van Laplandt van Waniga verbij Ombaij tot Kandelox en de Custe van Corelia daer tegen over.*

57. *Vande Noord-Zee van het Tessel tot de Hoofden.*

58. *De Tesselstroom met de Gaten van 't Marsdiep. — Caerte vande Reede en de Haven van Medemblick.*

59. *De Mase met het Goereesche Gat.*

60. *De Gaten van Brouwershaven, Ziericzee en Der Veere.*

61. *Vande Gaten van Wielinge.*

62. *De Cust van Vlaanderē en Engelandt van Oostende tot deur de Haofden.*

63. *Het Canael tusschen Engelandt en Vrancrijck.*

64. *De Custen van Picardie en Normandie, van Swartenes tot de Seine.*

65. *De Cust van Normandie tusschen Seynhooft en de Kiscassen.*

66. *Van de Zeecusten van Normandie en Bretaigne tusschen de C. de Hagu en Roscou.*

67. *De Cust van Engelandt tusschen de Singels en de drooghten van Weembrugh.*

68. *De Custen van Engelandt tusschen de drooghtē van Weembrugh en Poortlandt.*

69. *De Cust van Engelandt tusschē Poortlādt en Goudstart.*
70. *De Custen van Engelandt tusschē Goutstart en Lezard.*
71. *De Engelsche Cust van Lezart af tot de C. de Cornwal en d'Eylanden van de Sortinges.*
72. *De Custen van Engelandt tusschē C. Corwal en het Eylandt Londey.*
73. *'T Canael van Bristou met de Zuijd-Cust van Wals-Engelandt.*
74. *Van Yerlandt.*
75. *De zuijdoost hoeck van Yerlandt tusschen Waterfoort en Glascarick.*
76. *De oost Cust van Yerlandt tusschen Glascarick en Dubling.*
77. *De Custen van Yerlandt van Dublingh tot Strangfoort.*
78. *De Kust van Vlster tusschen Strangfoort en Bandthaven met de Custen van Schotlandt daer tegen over.*
79. *De Noord-Cust van Yerlandt tusschen Bandthaven en C. de Telling.*
80. *De West-Cust van Yerlandt tusschen C. Tellin en Slijnehooft.*
81. *West-Cust van Yerlandt tusschen Slijnhooft en de Blasques. — 't Vervolgh vande Rievier van Limrick vant Eijlandt Qowine tot de Stadt.*
82. *De Zuijd-cust hoeck van Yerlandt tusschen de Blasques en Merenhooft.*
83. *De Eylanden en Havenen ontrent de Cabollare bij de zuijdwesthoeck van Ierlandt. — De Cust tusschen Baltimoer en Oldhooft.*
84. *De Zuijdcust van Yerlandt tusschen Oldhooft en Waterfoord.*
85. *Van Vranckrijck Biscaijen en Galissen tusschen Heisant en C. de Finisterre.*
86. *De Zeecusten en Eijlanden aent westeijnde van Bretaignen.*
87. *De Zeecusten van Bretaignen tusschen de Wester-pleimarques en de Rivier van Vannes.*
88. *De Zeecusten van Bretaignen en Poinctou tusschen Boelijn en S. Martens Eijlandt.*
89. *De Kusten van Vranckrijck tusschen Olone en de Rivier van Bourdeaux.*

90. *Van de Rivier van Bourdeaux en de haven van Arcachon.*
91. *De Zeecusten van Vranckrijck en Biscaijen tusschen Arcachon en de C. de Machicaco.*
92. *De Kust van Biscaijen tusschen de C. de Mascichaco en de C. de Pinas.*
93. *Zeecusten van Galissen tusschen C. de Pinas en C. de Ortegal.*
94. *De Custen van Gallissen Portugal en Andalusien van de C. Ortegal tot de Strate van Gibraltar* (met het wapen van Spanje).
95. *De Zeecusten van Gallissen tusschen de Cabē Ortegal en Finisterre.*
96. *De Zeecusten van Gallissen tusschen de Cabo Finisterre en Camino.*
97. *De Zeecusten van Portugal van Viane tot Avero.*
98. *De Custen van Portugael tusschen Avero en Roxent.*
99. *Van de Rivier van Lisbon en de bancken voor St. Vues.*
100. *De Custen van Algavre tusschen de C. S. Vincento en Aimonte.*
101. *De Custe van Andaluzien tusschen Aimonte en de strate van Gibraltar.*
102. *De strate van Gibraltar met de Spaansche Cust van daer tot Malaga.*
103. *Van Barbarische cust mits gaders van de Canarische en Vlaemsche Eijlanden.*
104. *Deze drie stucken vertoonen de Barbarische Cust van de Straat tot de C. Cantin.*
105. *De Custen van Barbarien van C. Cantin tot de C. de Geer.*
106. *De Eijlanden Lancerota, Festeventura en Groot Canarien.*
107. *De Eijlanden Tenerifa Palma Gomera en Ferro.*
108. *d'Eylanden Madera en Porto Santo. — De Reede van Pante del Gada int eijlandt S. Michiels. — De Reede voor de Stadt Angra int eijlandt Tercera.*

Behalve de met een sterretje geteekende kaarten, zijn alle dubbele. De titels zijn op de blanke recto's gedrukt, overigens zijn de keerzijden der kaarten wit. De meeste kaarten

dragen het bijschrift: *Met Privilegie der Ed. H. M. Heeren Staten generael voor thien jaren.* Er zijn er enkele, die het jaartal 1622 dragen. Het zijn alle paskaarten, of »platte caerten" naar de cylindrische projectie van MERCATOR.

7. Keeren wij nog even terug naar het Eerste Deel, dat wel merkwaardig is naar zijn inhoud.

In *Hooftstuck* I—IV wordt gehandeld »van de Sphaera, en haer onderscheyden bewegingen" naar het stelsel van PTOLEMAEUS, »van de rondigheyt en grootheijdt des aerdrijcks," »dat de aerde in 't midden des werelts is;" Hfdst. V—IX: over de verschillende punten en lijnen op de sphera; Hfdst. X en XI: »Van des Sons Declinatie met tafelen voor het schrickel Jaer, en drie volgende jaren;" Hfdst. XII—XV: Over de vaste sterren, met tafels der declinatie, en afbeeldingen met beschrijving der sterrebeelden; Hfdst. XVI—XXII: Over »lenghte, breette en hooghte der Polen;" waar tusschen Hfdst. XIX handelt »Van 't verschil der gemeene platte Zeekaerten met de ronde oft het Aerdrijck", alwaar slechts het volgende gezegd wordt.

„In de gemeyne Zeekaerten werden de Zeekusten en hoecken der Landen ghe- || teeckent nae haere streckingen en distantien van d'een tot d'ander/ oock na hare || breetten; maer om de onghelijckheydt diese hebben (door hare platte form) met || met de rondigheydt der aerde/ en is 't niet moghelijck die oock daer beneffens te stellen nae || hare rechte lenghte. Alle Meridianen oft linien van zuyden en noorden op Aerdrijck/ || hoe verre die op de middellinie van malkander staen/ streckende noordtwaert ofte || zuydwaert/ komen ten eynden van 90 graden van de linie/ op een punt by een; maer || op de platte zeekaerten/ 't zy of zoodanige Meridianen nae oft veer van den anderen || staen/ zy ghenaken malkander nimmermeer/ maer blijven altijt even verre van een. || Desgelijks met alle streecken/ nytgenomen alleen die van oost en west."

BLAEU rekende het dus niet noodig om de constructie dezer kaarten meer in bijzonderheden aan te wijzen, maar alleen te verwijzen naar de projectie van MERCATOR..

Hfdst. XXIII—XXIV: »Van 't maken der Graedbogen en Astrolabium" of »Zeerinck" geeft eenige constructiën en een tafeltje over deze werktuigen, waarbij ook de »omgekeerde

Graedboogh ofte dubbele dryhoeck" wordt behandeld, die dienen kan om de Son in de rug te houden. In Hfdst. XXV—XXVII leert men onder verschillende gegevens de Poolshoogte der Sonne en der sterren vinden; Hfdst. XXVIII leert »'t Gebruyck des Noordsters"; Hfdst. XXIX: »Van 't verhoogen der Hemelsche Lichten door de dampen" geeft eene kleine, grove tafel van refractie; Hfdst. XXX leert »Hoe veel mijlen men op yder Compas streeck moet zeylen eermen een graed in breette op Aerdrijck wint." Hfdst. XXXI handelt »Van 't veranderen der Kompassen", de miswijzing, en Hfdst. XXXII »Van de Water-ghetijden" met tafels dienaangaande. Hfdst. XXXIII leert »Om d'ouderdom der Maen te vinden", met »een tien-jarighen Almanach" en Hfdst. XXXIV: »Om d'uyre te vinden des daaghs en des nachts." Tot besluit vindt men een „Tafel van de rechte Ascensie van dertich der voornaemste vaste sterren."

De voorschriften, hier gegeven, op bevattelijke wijze, met ten deele beweegbare figuren en telkens door voorbeelden opgehelderd, zijn geheel ingericht naar de bevatting van gewone zeelieden; daarbij wordt alle eenigzins wetenschappelijke behandeling vermeden.

8. Omtrent het derde in N⁰. 3 genoemde werk valt weinig meer te zeggen, dan dat het van het vorige alleen onderscheiden is door het grootere formaat, en tevens kleineren omvang, omdat hier de blanke zijden der kaarten alle bedrukt zijn, en er dus van de vier bladzijden eener dubbele kaart, deze blz. 2 en 3 bevat, terwijl op blz. 1 en 4 de tekst zelve voorkomt, en dan ook de paginatuur wordt voortgezet.

Zooals reeds gezegd werd, leveren de meeste exemplaren dezer drie werken de duidelijke sporen, van veel gebruikt te zijn, waarbij de kaarten dikwerf ontbreken, die dus denkelijk voor grooter gemak in het gebruik, eenvoudig waren uitgesneden.

AANTEEKENINGEN.

---

¹) ¶ Dit is die Caer- || te vander Zee om Oost en West te || zeylen/ en is van die beste Pyloots/ eñ wt || die alđ beste Caertē ghecorrigeert/ diemē weet || te vinden/ ende elcke cust op tsijn gheset. || ¶. Item ghi schippers/ stuermans/ eñ bootsgesellen || Ick Jan Jacobzoō en houde geen Caerten voor die || mijn dan daer mijn naem eñ merck op staet/ want ic || laet dye mijnen alle iaers eens corrigeren/ wt || die beste Caerten eñ kenders vā die zee. || ¶ Ghedruckt int Jaer 1541. 16⁰.

Daaronder de dubbele arend van Oostenrijk met het wapen van Amsterdam links, en een monogram (dat van Karel V) rechts.

Dit zeldzame boekje is in klein 4°., bevat blad A—E, 80 bladz. (niet gepagineerd).

Op het einde der 79ste bladz. komt voor:

Gheprent bi mi || Jan Jacobszoon van Amstelredam || in dye vier Heims kinderen || Ende men salse te coop vindē op die oude Brugge.

Daaronder als drukkersmerk de vier Heems kinderen te paard.

Op de 78ste bladz. vindt men nog eens het wapen van Amsterdam, het Groot zegel van Oostenrijk, en een schip met volle zeilen daaronder.

²) ¶ Dit is die Kaer- || te van dye Suyđ zee tot dat Kan- || serdyep toe/ ende tot dat Maers- || diep toe/ Om met schepen wt of in te || zeylen van Amstelredam te zee/· || waert. Ghedruckt Int Jaer 1540. || (Vignette: hetzelfde schip als achter het vorige boekje.) 16⁰. 18 bladz. (zonder signatuur of pagineering).

Op de 16de bladzijde leest men:

Gheprent tot Am- || stelrenam (sic): By My Jan Jacobs || zoon Wonende inden Uijsel || In dye vyer Heems || Kinderen.

En daaronder dezelfde dubbele arend als in het vorige boekje.

³) ¶ Item dit is die || ordinancie dye die ghemene schip- || peren stuermannen bootgesellē en coop- || luydē mit malcanderen begherende vā schip- || rechte hebbē in Hollant/ Zeelāt/ Vlaē- || deren houdende zijn. || (Vignette, als bij het boekje in Noot (3) beschreven). 16°. 14 bladz. (zonder signatuur of pagineering).

Op bladz. 14 leest men verder:

„Gheprent tot Am- || stelredam. By My Jan Jacobs || zoon Wonende in den Uysel || In dye vyer Heems- || Kinderen."

Daaronder het wapen van Amsterdam.

Het jaartal ontbreekt geheel bij dit boekje.

4) De herdruk werd te Amsterdam uitgegeven door Jan Janszoon. in oblong. folio.

Dl. 1. 1626. 119 blz., 19 kaarten.
2. 1625. 131 blz., 41 kaarten.
3. 1627. 56 blz.

Van den eersten druk, uitgekomen bij Willem Jansz. 1618—1621, heb ik voor mij het 3de Deel met den titel:

TDERDE DEEL || VANT || Licht der Zeevaert || INHOVDENDE || De Beschrijvinghe der Zeecusten van || de Middelandtsche Zee. || By een vergaedert en in't licht ghebracht door || WILLEM JANSZOON. || vignette: een zeeslag || TOT AMSTERDAM, || By Willem Jansz. op 't Water in de vergulde Sonnewyser. Anno 1621. || Met Privilegie voor ses Jaren. Oblong. folio.

In verso van den titel de Privilegie. Dan twee bladz. opdracht aan de Staten Generaal en Prins Maurits, gedateerd „Datum in Amstel- || redam, den eersten September M.DC en achttien."

1 blz. voorrede, 1 blz. „KLINCK-DICHT door J. V. VONDELEN."

VAN HET GHEBRVYCK DESES BOECKS. 20 blz. zonder paginatuur.

Dan Capittel I—XXVI, blz. 1—240, kaarten I—XXX. De tekst is in twee kolommen gedrukt.

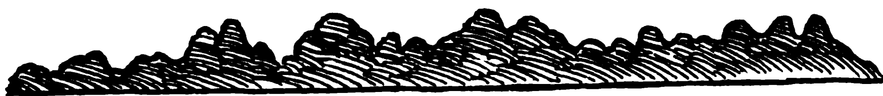
5) Zeespiegel/ || Inhoudende || Een korte Onderwijsinghe in de || KONST DER ZEEVAERT, || En || Eene beschrijvinge der Zeekusten || Van de Oostersche/ Noordsche en Westersche || SCHIPVAERT: || Vyt ondervindinghen van veel ervaren Zeevaerders || vergadert || en t'samen ghestelt || *Door* WILLEM JANSZ. BLAEU. || *Nieuwelijcx in verscheyde plaetsen verbetert en vermeerdert.* || Vignette: twee schepen in volle zeilen. || T'AMSTERDAM, By *Jan Blaeu*, op 't Water, in de vergulde Zonnewijser. || In 't Jaer MDCLII. folio.

6) DE GROOTE || Zee-spiegel, || Inhoudende || Een korte Onderwijsinge in de || KONST DER ZEEVAERT, || En || Eene Beschrijvinge der Zeekusten van de || OOSTERSCHE, NOORDSCHE en WESTERSCHE || SCHIPVAERT: || Vyt ondervindingen van veel ervaren Zeevaerders vergadert/ en t'samen gestelt || *Door* || WILLEM JANSZ. BLAEU. || *Nieuwelijcx in verscheyde plaetsen verbetert en vermeerdert.* || Vignette: als boven. || T'AMSTERDAM, || By JOAN BLAEU, Op 't Water, in de vergulde Zonnewyser, || in 't jaar MDCLV. folio.

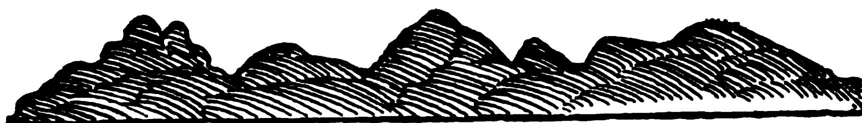
1



2



3



DE TAYBRUG,

DOOR

MICHAËLIS.

De bezwaren en kosten verbonden aan het vervoer over de *Tay* en de *Forth*, over de veeren te Tayport en Burntisland en een onheil, dat in 1849 bij laatstgenoemd veer plaats had, deden, naar het schijnt, reeds toen bij den Heer BOUCH, destijds ingenieur van de Edinburg-, Perth en Dundee-spoorwegmaatschappij, het denkbeeld ontstaan om beide riviermonden te overbruggen, hoewel hij eerst in 1854 aan de bestuurders van den Schotschen North-Eastern-spoorweg dit denkbeeld mededeelde, waar het volstrekt geen bijval ontmoette, omdat men het plan als onuitvoerbaar beschouwde.

De groote vorderingen op het gebied van de wetenschap van den ingenieur gemaakt, blijkende uit de belangrijke uitgevoerde bouwwerken, waren oorzaak dat de twijfel aan de mogelijkheid tot verwezenlijking van het denkbeeld allengs verdween, zoodat in 1864 het voornemen werd te kennen gegeven om eene wet aan te vragen tot vergunning van den bouw van eene brug over de *Tay*.

Het wetsontwerp werd ingediend, doch ontmoette eene ernstige tegenwerking van de zijde van het stedelijk bestuur van Dundee en van het havenbestuur (Harbour-Trustees). Door den invloed van de directie van de North-British-spoorwegmaatschappij, die toen eene brug over de *Forth* wenschte te bouwen, namen de voorstellers hunne aanvraag terug en het was, door verschillende omstandigheden, niet vóór 1870, dat op nieuw een wetsontwerp werd ingediend, dat op 1 Julij het

Huis der Lords bereikte, met de verklaring dat het geene oppositie had ondervonden en 14 dagen later door de Koningin werd bekrachtigd.

Intusschen waren de rigting en het ontwerp van de brug niet weinig gewijzigd.

De plaats, aanvankelijk voor den overgang gekozen, tusschen Newport en Craig-Pier, zou overspannen worden met 63 openingen, met den onderkant van de brug op 100 voet boven hoogwaterpeil, maar om den tegenstand van de Harbour-Trustees te overwinnen, had men reeds in 1865 eene meer westwaarts gelegen rigting, tusschen Woodhaven op den zuidelijken- en Buckingham-Point op den noordelijken oever aangenomen, hoewel de rivier daar veel wijder was, namelijk 8130 voet en met 80 openingen zou worden overbrugd, terwijl de brug eindelijk gebouwd werd $1^1/_4$ mijl (2 K.M.) ten westen van Dundee, waar zij, van oever tot oever, eene totaallengte heeft verkregen van 10320 voet of ongeveer 3145 M.

Volgens het toen aangenomen plan zou de brug, beginnende aan de zuidzijde, bestaan uit de volgende openingen:

3	van	60	voet	of	18.3	M.	ongeveer.
2	»	80	»	»	24.4	»	»
22	»	120	»	»	36.6	»	»
14	»	200	»	»	61.0	»	»
16	»	120	»	»	36.6	»	»
25	»	66	»	»	20.1	»	»
1	»	160	»	»	48.8	»	»
6	»	27	»	»	8.2	»	»

Te zamen 89 spanningen.

De as van de brug volgde over de vijf eerste openingen een boog van 20 chains (ongeveer 402 M.) straal, met de holle zijde westwaarts gekeerd; vervolgens eene regte lijn tot het einde der 16 spanningen van 120 voet en dan weder een boog van 402 M. straal, met de holle zijde naar het oosten, lang ongeveer 600 M., waardoor zij nagenoeg haaks op den noordelijken oever van de rivier, zich in Dundee met den Caledonian-spoorweg vereenigde.

Gedurende de uitvoering werd de grootte der openingen, om verschillende redenen, belangrijk gewijzigd, zoodat na de voltooijing de brug bestond uit:

11	overspanningen	van	245	voet	of	74.5	M.	ongeveer.
2	»	»	227	»	»	69.2	»	»
1	»	»	166	»	»	50.6	»	»
1	»	»	162	», 10 duim	»	49.6	»	»
13	»	»	145	»	»	44.2	»	»
10	»	»	129	», 3 duim	»	39.4	»	»
11	»	»	129	»	»	39.3	»	»
2	»	»	87	»	»	26.5	»	»
24	»	»	67	», 6 duim	»	20.6	»	»
3	»	»	67	»	»	20.4	»	»
1	»	»	66	», 8 duim	»	20.3	»	»
6	»	»	28	», 11 »	»	8.8	»	»

Behalve die van 166 voet, die door zoogenaamde bowstring-(boogpees) liggers gedragen werd, bestonden alle overspanningen uit balken met evenwijdige randen.

Toen in 1864 de directie der North-British-spoorwegmaatschappij op het intrekken van het wetsontwerp voor den bouw der brug aandrong, geschiedde dit niet met een vijandig doel tegen de onderneming, maar veeleer om hare eigene aanvraag om concessie voor den bouw eener brug over de Forth niet in gevaar te brengen.

Zoowel vóór als na dit tijdstip gebruikte die directie al haren invloed om de uitvoering te zien tot stand komen, daar haar belang hiermede regtstreeks was verbonden. Door den bouw der beide bruggen toch zou de afstand tusschen Dundee en Londen 12 mijlen (ruim 19 K. M.) korter worden dan langs de North-Western en Caledonian spoorwegen, doch ook door den bouw der Taybrug alleen verkreeg de North-British belangrijke voordeelen, niet slechts omdat zij daardoor bevrijd werd van de kosten van het veer en van den tol, bedragende ongeveer L. S. 13000, die jaarlijks voor het verkeer tusschen Broughty-Pier en Dundee, aan de Caledonian-spoorwegmaatschappij moest betaald worden, maar

ook omdat het vervoer van steenkolen uit Fife naar Dundee zeer zou toenemen, hetgeen mede voor deze stad, als fabriek- en handelstad, van overwegend belang was, daar, vóór dat de brug tot stand kwam, vele schepen de haven zonder lading moesten verlaten en te Newcastle steenkolen gingen innemen, terwijl het vervoer der tot eigen gebruik benoodigde steenkolen en verdere goederen langs de North-British, over de rivier naar Tayport en verder langs den Caledonian naar Dundee, door het herhaalde overladen, zeer kostbaar en bij stormweder onzeker was.

Bij het verkrijgen der concessie werd het kapitaal voor de uitvoering van de brug vastgesteld op L. S. 350000, verdeeld in 14000 aandeelen, elk van L. S. 25, van welk kapitaal de North-British, na voltooijing der brug, $5^1/_4$ procent waarborgde. Later werd nog eene leening gesloten van L. S. 116000, zoodat het geheele kapitaal bedragen heeft L. S. 466000 of ongeveer $5^1/_2$ millioen gulden. Behalve de brug bestond het werk nog uit een spoorwegtak, aanvangende aan het station Leuchars van de hoofdlijn van den North-British spoorweg en dit station verbindende met het zuidelijk uiteinde van de brug, en uit een lijntje met tunnel aan de noordzijde, ter verbinding met Dundee en de havens dier stad *).

Aan de zuidzijde van de rivier is de oever rotsachtig en hoog, zoodat de spoorstaven daar 70 voet (21.3 M.) boven hoogwater liggen, waardoor, daar de bezwaren van het bestuur voor de scheepvaart op de *Tay* tegen de hoogteligging der brug, door eene jaarlijksche uitkeering van L. S. 600, zoozeer waren verminderd, dat goedgevonden werd, dat de vrije ruimte boven den vaarweg tot 80 voet (24.4 M.) werd verminderd, eene flaauwe helling van het landhoofd bij Wormit tot de groote openingen kon aangenomen worden. Aan de noordzijde, waar het terrein laag is en de lijn met het beneden dit terrein gelegen station moest verbonden worden, werd die helling tamelijk steil, namelijk 1 : 74.

---

*) Volgens VON WEBER hebben de kosten der eigenlijke brug L. S. 500000 die van het geheele werk ± L. S. 1000000 bedragen.

Na het verkrijgen der Parlementsacte, waarbij de concessie verleend werd, moest een geschikte aannemer voor den bouw der brug gevonden worden.

Het is zeer goed te begrijpen dat het aantal aannemers, aan wie men de uitvoering van een zoo reusachtig werk kon opdragen en die niet terugdeinsden voor de groote moeijelijkheden en de kansen voor onheilen, die er aan verbonden waren, gering was.

Na eenige onderhandelingen werd echter den achtsten Mei 1871, tusschen de North-British-spoorwegmaatschappij en de firma CHARLES DE BERGUE & Co. van Londen, Cardiff en Manchester overeengekomen, welke firma aannam de brug voor L. S. 217000 in drie jaren te maken. Het werk kostte echter ongeveer L. S. 500000 en de uitvoering duurde zes jaren. Voor een deel is dit verschil zekerlijk toe te schrijven aan de omstandigheid, dat de Heer CHARLES DE BERGUE, kort na het aangaan der overeenkomst, ziek werd en in 1873 overleed en aan de verwikkelingen, die hierdoor ontstonden en eindigden in de overdragt van de overeenkomst aan de firma HOPKINS, GILKES & Co. te Middlesborough, doch voor een grooter deel misschien aan de onvoorziene moeijelijkheden, die men bij de uitvoering ondervond.

Gedurende het onderzoek naar de uitvoerbaarheid van het werk waren opnemingen en boringen gedaan, waaruit was gebleken, dat de oevers uit bazaltrotsen bestaan, die zich aan de zuidzijde tot 50 voet, steil boven hoogwater verheffen, en aan de noordzijde eene flaauwe glooijing hebben, doch onder water, van beide zijden, snel naar het midden der rivier afdalen en, zooals later bleek, dáár eerst aangetroffen worden op diepten, die men niet hopen kon door eene bekende funderingswijze te zullen bereiken. In het bed der rivier waren de rotsen gedeeltelijk bedekt met klei en rolsteenen, gedeeltelijk met zand, onder welk laatste, ter diepte van ongeveer 18 voet (5.50 M.) eene laag grind gevonden werd.

Bij het maken van het ontwerp had men zich gevleid de rots overal te kunnen bereiken of althans, waar die te diep wegzonk, eene laag klei of grind te zullen aantreffen van voldoende vastheid om er gemetselde pijlers op te funderen;

maar nadat de veertiende pijler gefundeerd was, bleek de rots zóó diep beneden water te liggen, dat de wijze van zamenstelling geheel moest gewijzigd worden en men besloot het gemetselde boveneinde der pijlers, ter vermindering van de drukking op den bodem, door gegoten ijzeren kolommen te vervangen.

De 18 voet dikke grindlaag, die over het algemeen werd aangetroffen, scheen vast genoeg om de aldus gevormde pijlers te dragen, doch op vijf plaatsen was de bodem zóó week, dat men 40 voet (12 M.) lange palen in den grond moest drijven, voor welk werk men geoefende heijers uit Holland liet overkomen.

De pijlers en de bovenbouw werden op den oever gemaakt. Hiertoe werd een deel van den zuidelijken oever gevlakt, waterpas gemaakt, en met eene betonlaag gedekt. Op dezen betonvloer werden de pijlers opgetrokken tot zoodanige hoogte, dat zij, op hunne definitieve plaats gebragt, met den top boven laagwater zouden reiken.

De drie eerste pijlers staan op den oever; de zes volgende bestaan elk onder water uit twee kolommen, die ieder afzonderlijk tot de bovenvermelde hoogte op den oever werden zamengesteld. Elke kolom, bestaande uit eene plaatijzeren omkleeding met ringvormige bemetseling in baksteen, werd afzonderlijk naar de plaats van opstelling gevlot en had een gewigt van ± 40 ton. In het midden der kolom bleef eene opening, waardoor de arbeiders en de bouwstoffen op en neder bewogen.

Wanneer eene kolom ter bestemde plaats aangevoerd en op den bodem der rivier gezonken was, werd het water door zaamgeperste lucht daaruit gedreven, en werd de grond binnen de kolom tot op de rots, die men op diepten van 8 tot 15 voet aantrof, uitgegraven, waardoor de schacht naar beneden zonk en vervolgens tot laagwater met beton werd gevuld, waarop het metselwerk kon worden opgetrokken. De plaatijzeren omkleeding was, gedurende de uitvoering, tot boven laagwater opgetrokken, doch werd, zoodra de pijler hoog genoeg was, weder tot dat peil verwijderd.

Het kleine grondvlak der cylinders, ($9^1/_2$ voet = 2.9 M.)

veroorzaakte vele moeijelijkheden bij het zinken. Het gebeurde niet zelden, dat de eene zijde in loopzand kwam, terwijl de andere op een grooten rolsteen stootte; daardoor geraakte de buis uit het lood en had men driemaal het onheil te betreuren, dat zij, bij sterken stroom en stormachtig weder, omtuimelde.

Om aan dit bezwaar het hoofd te bieden besloot men bij de volgende pijlers eene andere wijze van werken te volgen en de beide buizen, die een pijler vormden, op een gemeenschappelijk voetstuk te plaatsen.

Voor de nu volgende pijlers werd op den betonvloer, op den oever, een gesmeed ijzeren ring in elkander gesteld, hoog 3 voet (0.91 M.), lang 22 voet 7 duim (6.9 M.), breed 10 voet 6 duim (3.2 M.), met de lange zijden vlak en met half cirkelvormige einden; hierop werd geplaatst een gegoten ijzeren kegelvormig stuk, hoog 5 voet (1.5 M.), aan de binnenzijde voorzien van een rand, breed 2 voet 6 duim (0.76 M.), waarop het metselwerk, in twee gegoten ijzeren cylinders van 9 voet 6 duim (2.9 M.), werd opgetrokken. Op de 8 voet hooge werkkamer en tot de hoogte van de eerste ijzeren plaat der buizen is een met ijzer bekleede, gemetselde gang gemaakt, dienende om de later te vermelden betonvulling goed tegen den bovenkant van de werkkamer te kunnen aandrijven. Op den uitstekenden rand van de werkkamer werd eene gemetselde bekleeding opgetrokken, reikende, als de pijler ter bestemde plaats was gebragt, tot boven laag water. Tusschen dit metselwerk en de cylinderplaten werd eene tusschenruimte gehouden van 2 duim (5 c.M.) die later met betonmortel werd gevuld.

Om den pijler naar zijne bestemmingsplaats te kunnen vervoeren en daar te kunnen nederlaten, werden aan den plaatijzeren onderrand, aan elke lange zijde, twee ijzeren platen, breed 9, dik 1 duim (229 bij 25 m.M.) geklonken, waaraan, door middel van een $2^1/_4$ duim (57 m.M.) dikke bout, een dwarsstuk draaibaar was verbonden, aan elk einde waarvan, weder om een bout draaibaar, een opgaande stang bevestigd was, tusschen welke stangen, aan het boveneinde, een soortgelijk dwarsstuk aangebragt was. De opgaande

stangen, die 6 duim (0.15 M.) breed en om den anderen 1 en $^1/_2$ duim (254 en 127 m.M.) dik waren en uit stukken, lang 4 voet (1.22 M) bestonden, waren op afstanden van 1 voet (0.3 M.) onderling, doorboord met gaten van $1^3/_4$ duim (44 m.M.).

Bij het vlotten naar de plaats van opstelling hing de geheele pijler, ter diepte van 8 voet (2.4 M.) in het water, aan acht stalen pennen, dik $1^3/_4$ duim, die door de gaten van genoemde stangen gestoken waren en in groeven rustten, die in de voetstukken van vier hydraulische persen gemaakt waren. De persen waren geplaatst op een zamenstel van ijzeren balken, gedragen door twee pontons, waarop het geheele gewigt van den pijler, bedragende ongeveer 145 ton, droeg. De hydraulische pompen hadden eene slaglengte van één voet en het tweede dwarsstuk werd met stalen pennen aan de opgaande stangen, een voet boven den zuigerstang, vastgemaakt, waarna de perszuigers werden geligt, tot de stangen met dit stuk in aanraking kwamen en het zóóver opgetild hadden, dat de pennen uit de hangstangen konden weggenomen worden, waarna, door wegvloeijing van het water uit de persen, de pijler 1 voet kon dalen en dan op nieuw op de, 1 voet hooger geplaatste pennen kon opgevangen worden. Dit spel werd herhaald tot de pijler op den vasten bodem was nedergelaten, waartoe, daar voor de nederdaling van 1 voet ongeveer 5 minuten vereischt werden, een getijde voldoende was.

Wanneer de pijler 4 voet gedaald was, werden de hangstangen, door aanbrenging van verlengstukken van 4 voet lengte, die met bouten aan de reeds voorhanden stangen bevestigd werden, verlengd.

Het zinken geschiedde bij eb. Gedurende het laatste half uur van de eb, wanneer de pijler op den bodem rustte, werd hij zorgvuldig waterpas gesteld en wanneer de eene zijde meer inzonk dan de andere, werd hij door oppomping der persen aan de lage zijde tot den waterpassen stand teruggebragt, tot hij eindelijk behoorlijk horizontaal op den bodem rustte, dan werden de hangstangen boven water losgemaakt en konden de pontons zich verwijderen. Later werden de

stangen door een duiker, onder water van de ijzeren platen aan den onderrand vrij gemaakt, om weder bij de plaatsing van een volgenden pijler dienst te doen.

Zoodra de pijler op zijne plaats stond werd de mantel, met gegoten en getrokken ijzeren platen, tijdelijk verhoogd tot 6 voet (1.8 M.) boven hoog water en werd de gemetselde ring opgetrokken tot zoodanige hoogte, dat er geen gevaar was dat de pijler, door den later ontstaanden luchtdruk, zou opdrijven. Boven op elke buis werd dan eene luchtkamer met luchtsluis geplaatst en in de buizen en de werkkamer werd lucht geperst tot de bodem van de kamer droog lag en arbeiders zich door de opening, die in het hart van elke kolom gespaard was, naar beneden konden begeven om den grond te ontgraven, die door de opening in de buis naar boven werd gehaald en door een, aan weêrzijde met luchtdigte sluiting voorziene hellende buis, — waarvan tot vulling of ontlediging beurtelings de binnenste of de buitenste sluiting geopend werd,— naar buiten kon gebragt worden. Zoodra de pijler de vereischte diepte bereikt had, werd de geheele werkkamer en de opening in de buizen, met beton gevuld, de luchtkamers en de luchtsluizen verwijderd en, nadat het metselwerk tot eene voldoende hoogte opgetrokken was, ook de tijdelijke verhooging van den mantel weggenomen. Hierop werd eindelijk het gemetselde bovengedeelte der pijlers opgetrokken. Iedere pijler werd bij het zinken aan de zuidzijde gesteund door twee, als een verrekijker in elkander schuifbare, door waterdruk uit elkander geschoven beenen en met behulp van zware kettingen aan den voorgaanden pijler opgehangen.

Op den betonvloer, op den oever, werden de balken voor den bovenbouw in elkander gezet. Elke bovenbouw werd berekend op een draagvermogen van $1^1/_4$ ton per voet lengte (4100 K.G. per M.) boven zijn eigen gewigt, met eene maximum-spanning van 4 ton op den vierkanten duim (6.3 K.G. op den m.M²). De overspanning, die op den oever gereed gemaakt en tijdelijk van een houten vloer op den onderrand voorzien was, werd, zoodra die tot $6^1/_2$ voet (1.9 M.) boven hoog water waren opgetrokken, naar de

pijlers gevlot en daar, bij hoog water, opgeplaatst. Aangezien drie tot vijf spanningen aan elkander gekoppeld waren, moesten die telkens gelijktijdig op de pijlers worden gebragt.

Aan de onderranden van de brugbalken werden, rondom elken pijler, hangsteigers voor de metselaars gemaakt, terwijl de tijdelijke houten vloer diende tot opslagplaats voor de benoodigde materialen.

Nadat de brugbalken door middel van hydraulische dommekrachten twee voet waren geligt, werd het metselwerk daaronder opgetrokken en, zoodra dit verhard was, werden de brugbalken daarop neergelaten en de dommekrachten verwijderd, waarna de geheele pijler, tot den onderkant van de balken, opgemetseld werd. Het metselwerk van baksteen, in gelijke deelen Portlandcement en zand, verkreeg na versteening eene zeer groote mate van hardheid.

Bij den vijftienden pijler bleek het, dat de rots plotseling in de diepte verdween, zoodat deze pijler, die juist op den kant van de rots teregt kwam, zóóver uit het lood hing, dat men hem later moest doen springen en door een anderen vervangen.

Men besloot de tot nu toegepaste funderingswijze op nieuw te verlaten en trachtte een grooter draagvlak bij minder gewigt te verkrijgen. Ook werd van het funderen door zaamgeperste lucht afgezien.

Op den betonvloer, op den oever, werd eene elliptische kuip van plaatijzer gemaakt, lang $23^1/_2$, breed $13^1/_2$, hoog 20 voet (7.2, 4.1 en 6.1 M.) die langs den binnenwand op eene, door eene zwaren ijzeren plaat gevormde en met beton gevulde driehoekige ruimte, ter dikte van 14 duim (36 c.M.) bemetseld werd; boven dit metselwerk werd die kuip nog met eene later te verwijderen ijzeren stuk, eveneens hoog 20 voet (6.1 M.) verhoogd. De geheele aldus gevormde bak, die onder en boven open was en 50 ton woog, werd naar de plaats van opstelling gedreven en daar op den bodem neergelaten, op de boven omschreven wijze. Om de kuip tot op de gevorderde diepte te doen doorzakken, werden op eene daarbij vastgemeerde schuit 4 cylinders geplaatst van 5 voet (1.5 M.) middellijn, van onderen voorzien van

eene naar buiten openslaande deur, waardoor zij haren inhoud in bagger-aken konden lossen, van boven door middel van pijpen en kranen, verbonden met twee slangen van caoutchouc, die aan haar ondereinde door koperdraad versterkt waren.

Terwijl, door duikers, het ondereinde van de caoutchoucslang, naar het midden van de kuip werkende, in het zand werd gestoken, werd een der cylinders luchtledig gemaakt en de gemeenschapskraan geopend zijnde, vulde de cylinder zich met een mengsel van water en zand, dat door opening van de bodemdeur in de aak stortte. Terwijl de eene cylinder gevuld en ontledigd werd, werd een volgende luchtledig gemaakt, zoodat ongeveer $2^1/_2$ minuut tot vulling van elken cylinder, met een mengsel bestaande voor een derde gedeelte uit zand, noodig waren. Naarmate de grond door deze zandpomp verwijderd werd, zonk de kuip dieper in en zoodra men de verlangde diepte bereikt had, werd die, tot ongeveer 1 voet boven den bodem der rivier met beton gevuld en door eene steenstorting omgeven, waarna de tijdelijke kuip werd verwijderd.

Het onderste gedeelte van den pijler, hoog ongeveer 22 voet (6.7 M.) werd op den oever van baksteen in cement gebouwd; het had een langwerpig zeshoekigen vorm, lang 20, breed 10 voet (6 bij 3 M.) en was, ter vermindering van het gewigt, inwendig hol. Op den betonvoet neergelaten, reikte die ring met den bovenkant tot laagwater en de binnenruimte kon dus met beton worden gevuld, terwijl het metselwerk over eene hoogte van nog $14^1/_2$ voet (4.4 M.) werd opgetrokken, waardoor de pijler het peil van hoog water bereikte en met eene totaaldikte van 5 voet (1.5 M.) carmyllie-steen werd afgedekt. Hierop werden zes gegoten ijzeren kolommen, die eveneens een verlengden zeshoek vormden en waarvan de beide uitersten 15 duim (38 c.M.), de vier binnensten 12 duim (30 c.M.) middellijn hadden en die bestonden uit stukken van 10 voet (3 M.) lengte, door ijzeren stangen aan elkander gekoppeld, gesteld.

Voor de groote openingen waarvan men, vermoedelijk om het aantal pijlers te verminderen, de wijdte belangrijk grooter

wenschte te maken dan volgens het oorspronkelijke ontwerp, werd eene soortgelijke funderingswijze gevolgd. Daar echter de brugbalken van deze openingen 190 ton moesten wegen, was het noodig aan het grondvlak meer uitbreiding te geven en kreeg dan ook de cirkelvormige ijzeren kuip en middellijn van 31 voet (9.4 M.). Het onderste deel van 20 voet (6.1 M) hoog, dat in het bed der rivier moest dringen, werd weder ter dikte van 14 duim (36 c.M.) bemetseld en het geheel woog ongeveer 200 ton. De op den beton geplaatste zeshoekige voet verkreeg eene lengte van 27 voet (8.2 M.) bij eene breedte van 16 voet (4.9 M.), werd op gelijke wijze als de overigen afgedekt en op den deksteen werden weder onderling gekoppelde kolommen gesteld, waarvan aan de beide uitersten eene middellijn van 18 duim (46 c.M.), aan de vier anderen eene middellijn van 15 duim (38 c.M.) gegeven werd.

Het opbrengen van den bovenbouw op deze pijlers had volgenderwijze plaats: op iederen pijler werden de onderste pijpstukken der vier binnenste kolommen geplaatst en, nadat deze aan elkander gekoppeld waren, werd hierop, op de zelfde wijze, de tweede rij pijpstukken aangebragt, waarop een stel sterke dwarsdragers werd verbonden, die hydraulische persen droegen, door welke de brugbalken langzaam opgeheven en telkens op pennen opgevangen werden, op de zelfde wijze als gevolgd was om de pijlers naar beneden te laten. Wanneer de kolommen ter geheele hoogte der pijlers gesteld waren, werd nog een tijdelijk stel pijpstukken aangebragt, om de brugbalken tot de hoogte hunner draagvlakken op te ligten en eerst daarna werden de twee buitenste buizen opgerigt en aan de anderen door schoren en dwarskoppelingen verbonden.

Ten noorden van de groote openingen werden de pijlers in diep water, die op een grindbodem rusten, weder op een dubbel stel cylinders gefundeerd. De middellijn dier cylinders is 15 voet (4.6 M.) en het bovendeel der pijlers bestaat uit zes gegoten ijzeren, onderling gekoppelde kolommen, van 15 en 12 duim (38 en 30 c.M.) middellijn.

Voor eenige der pijlers van de openingen van 20 M., in

den noordelijken boog, waar de rivier eene geringe diepte heeft, werd een geheel ander stelsel gevolgd. Ieder dezer pijlers bestaat uit drie gegoten ijzeren buizen, naarmate van de hoogte afwisselend in uitwendige middellijn van 1 voet 4 duim (41 c.M.) tot 1 voet 8 duimen (51 c.M.), met een metaaldikte van 1 duim (25 m.M.), onderling door horizontale diagonaalstangen gekoppeld. Onder elken brugligger, d. i. met den top midden op midden 9 voet (2.7 M.) uit elkander, staat eene buis; die aan de binnenzijde van den boog heeft eene helling van $^1/_8$, die aan de buitenzijde staat te lood, doch is gesteund door eene derde buis, die onder eene helling van $^1/_3$ is geplaatst. Het stellen van deze buizen had op eene zeer eigenaardige wijze plaats. Tegen den onderrand van het onderste pijpstuk werd eene plaat geschroefd, die, evenals die rand 3 voet 10 duim (1.17 M.) middellijn had en voorzien was van 12 opstaande, getande ribben, bij het middelpunt aansluitende aan een pijpje van eenige duimen hoog en naar beneden te niet loopende. Terwijl de buis langs ijzeren leidstangen werd rondgedraaid, werd door het pijpje water geperst, dat den grond losmaakte, die door de getande ribben zooveel noodig verwijderd werd. Elke zesde pijler is dubbel.

Doch ook deze wijze van uitvoering kon niet tot het einde worden voortgezet, daar men op veenlagen en rolsteenen teregt kwam. In dezen bodem werden cylinders van 6 voet (1.8 M.) middellijn met de vroeger vermelde zandpomp gezonken en daarin werden de, met beton omgeven buizen geplaatst.

Beginnende aan den zuidelijken oever bestaan pijler 1 tot 14 uit metselwerk, pijler 15 tot 48 uit metselwerk tot 5 voet (1.52 M.) boven hoogwater en verder uit gegoten ijzeren buizen, pijler 49 tot 77 uit met beton gevulde ijzeren cylinders, waarin gegoten ijzeren buizen geplaatst zijn, die tot 5 voet (1.52 M.) boven hoogwater met metselwerk zijn omgeven; de pijlers 78 en 79 en 80 tot 84 bestaan geheel uit gegoten ijzeren buizen, waarvan die der beide eerstgenoemde pijlers met beton gevuld zijn.

Boven de dertien groote openingen en boven de, met een

bowstringligger overspannen opening van 166 voet, bij den noordelijken oever, is de baan van de brug op den onderrand der hoofdbalken aangebragt, bij de overigen bevinden zich de liggers onder de baan.

De zamenstelling van den bovenbouw, die mij slechts uit enkele, niet zeer volledige schetsen bekend is, geeft geene aanleiding tot bijzondere vermelding; slechts verdient het koppelen der spanningen in groepen van drie tot vijf opgemerkt, doch mijns inziens niet nagevolgd te worden. Is die koppeling stevig genoeg om de balken als een geheel te beschouwen, dan moet de uitzetting en inkrimping boven de smalle pijlers, over eene zoo aanzienlijke lengte en onder een zoo belangrijk gewigt, tot groote zijdelingsche werking op de pijlerkoppen hebben geleid en was die koppeling tot geheele overbrenging der krachten ontoereikend, dan had zij geen nut.

Tot den bouw van de brug zijn gebezigd 3520 ton gegoten ijzer, 6281 ton gesmeed en getrokken ijzer, 2560 M^3. hout, 8600 ton cement, 4350000 gebakken steenen, 780 M^3. gehouwen steen en 271 M^3. breuksteen.

Behalve het reeds vermelde omstorten van sommige pijlers en enkele ongevallen van minder beteekenis hadden, bij de uitvoering van het werk, twee zeer ernstige onheilen plaats; het eerste op 26 Augustus 1873 toen, door het springen der ijzeren omkleeding van een der cylinders van den met luchtdruk gefundeerden pijler N^0. 54, deze vol water liep, waarbij zes man, die bezig waren den grond in den pijler te ontgraven, verdronken; het tweede onheil viel voor in den nacht van 22 Februari 1877. Bij een hevigen storm stortten twee der groote spanningen en een balk van eene aangrenzende spanning, te zamen meer dan 400 ton wegende, naar beneden, terwijl de ijzeren opbouw der pijlers, waarop die balken rustten, geheel werd vernield. Door den hevigen wind was het niet mogelijk geweest de arbeiders, die op de brug waren, te bereiken. Bij het aanbreken van den dag bleek echter dat slechts één hunner vermist was.

De ramp, die op Zondag 28 December 1879 plaats greep, waarbij de pijlers onder de 13 groote openingen bezweken

en een passagierstrein in de *Tay* stortte, met het treurig gevolg, dat alle zich in den trein bevindende personen het leven verloren, is aan verschillende oorzaken toegeschreven geworden.

Het allereerst werd vermoed, dat de trein door den hevigen wind ontspoord was; hiervan zou het gevolg geweest zijn, dat hij met een der brugbalken, die in zijdelingsche rigting zeer weinig weerstand kunnen bieden, in aanraking was gekomen en dit aannemende, ligt het voor de hand te onderstellen, dat de wand zich begaf en de trein daardoor heen naar beneden stortte, terwijl de schok de verdere vernieling zou veroorzaakt hebben.

Eene andere onderstelling is, dat de hevige wind, aan de uitwerking waarvan de brug, met den trein belast, eene grootere oppervlakte aanbood, dan in onbelasten toestand, de pijlers zou hebben doen omstorten.

Men heeft het onheil ook toegeschreven aan ongenoegzaamheid der dwarsverbindingen van de buizen; aan onvoldoende afmetingen van den pijlervoet en eindelijk aan het gebruikmaken van slecht materiaal voor de gegoten ijzeren buizen van de pijlers.

Ik meen de eerste en de laatste der bovengenoemde onderstellingen buiten beschouwing te mogen laten. Het is wel mogelijk dat de trein op de brug derailleerde en zoo dit heeft plaats gehad en hij met eenige hevigheid tegen den brugbalk aankwam, is het zeer waarschijnlijk dat deze doorbrak; doch wanneer de brug overigens sterk genoeg was, laat zich daardoor nog niet verklaren waarom twaalf pijlers omstortten. Bovendien zal wel altijd onbewezen blijven, dat dit gebeurde en zou men eerst tot deze hypothese de toevlugt mogen nemen, wanneer door geene andere, meer voor de hand liggende onderstellingen, rekenschap van het onheil kan gegeven worden.

Uit de enquête en de overblijfselen van de brug zal kunnen bewezen worden, of de gebruikte materialen slecht waren, en indien dit het geval was, ligt hierin ongetwijfeld een der oorzaken van de ramp, doch in de eerste plaats moet die, mijns inziens, gezocht worden in de constructie van de brug.

De hevige storm heeft zonder twijfel tot de vernieling

veel bijgedragen; was echter de zamenstelling overigens onberispelijk geweest, dan zou hierdoor alleen de omstorting niet hebben plaats gehad. Bij den bouw van groote bruggen wordt er toch steeds op gerekend, dat die ook aan stormen moeten kunnen weerstand bieden, en dus moest men daarop bij het ontwerpen van eene brug over een riviermond, zoo nabij de zee, indachtig zijn. Heeft men hierop bij de brug over de *Tay* geen acht geslagen, dan heeft men eene fout begaan, maar bovendien laten zich in de constructie van die brug details aanwijzen, die, zoo zij al niet de verwoesting, na het zoo kort bestaan van het gebouw, moesten tengevolge hebben, toch ongetwijfeld konden doen voorzien, dat die brug, wanneer de uitvoering niet geheel zonder gebreken was, niet lang dienst zou kunnen doen.

Ik zal trachten aan te toonen, dat ofschoon het niet te bevreemden is, dat de rankheid der pijlers tot het vermoeden heeft aanleiding gegeven, dat deze door den hevigen storm zouden zijn omgestort, en hoewel moet worden toegegeven, dat in dit opzigt de brug bij andere soortgelijke constructiën ten achter staat, toch de hevigheid van den wind eene ongekende hoogte zou hebben moeten bereiken om, zonder andere bijkomende omstandigheden, een zoo noodlottig ongeval te kunnen teweegbrengen, zelfs al neemt men aan, dat de snelheid van den luchtstroom, tusschen de hooge oevers van den trechtersgewijze vernaauwenden mond van de *Tay* belangrijk wordt vermeerderd.

De minste breedte heeft de rivier voor Dundee, van waar die zoowel oost- en westwaarts toeneemt, doch bij de plaats waar de brug is gebouwd, haar maximum niet heeft bereikt.

Blijkens mededeelingen van Professor GRANT, van het *Observatorium* te Glasgow, was de snelheid van den luchtstroom, bij den storm van 28 December, 's avonds 7 uur 10 minuten, 72 mijlen in het uur, met windstooten van 90 mijlen in het uur, overeenkomende met eene drukking van 40 ℔ op den vierkanten voet, of 185 K.G. per M^2.

Om duidelijk te doen blijken, dat de storm alleen de vernieling niet heeft teweeg gebragt, maak ik, ter berekening van de stabiliteit van den pijler, de gewaagde en mijns

inziens overdreven onderstelling, dat die drukking, tusschen de oevers van de rivier, versterkt werd tot 250 K.G. per M^2.

Voor eene naauwkeurige berekening ontbreken de gegevens; voor eene benadering zijn de cijfers, in de voorgaande beschrijving medegedeeld, voldoende.

Bij het volgende onderzoek wordt aangenomen, dat de zes buizen van iederen pijler onderling en met het metselwerk onwrikbaar waren verbonden en met de brugbalken een geheel vormden. Door de kracht van den wind, waarvan de rigting ongeveer evenwijdig aan de as der pijlers wordt ondersteld, wordt dan een buigingsmoment opgewekt, dat in den uitersten vezel van de naar den wind gekeerde buis, nabij haar bevestigingspunt, de grootste trekspanning doet ontstaan.

In eene mededeeling van den Heer GILKES, een der aannemers, in de Transactions van het Instituut van Ingenieurs in Cleveland, van November 1876, worden de oppervlakten, die de pijler en de bovenbouw van elke groote opening aan den wind aanbieden, geschat op 800 vierkante voet of 74 M^2. Voor den pijler is dit misschien ruim gerekend, voor den bovenbouw is daarentegen de opgegevene oppervlakte veel te klein.

Uit eene schetsteekening van den bovenbouw, zooals die ontworpen was toen de grootste overspanningen nog aangenomen waren op 200 voet lengte, is af te leiden:

Voor de hoogte van den boven- en onderrand van den brugbalk 1 voet; voor die van den langsbalk, waarop de spoorstaaf rust, 14 duim; voor de gemiddelde breedte der diagonalen 10 duim, en stelt men voor den hellingshoek der diagonalen met den brugrand 45^0 en voor de hoogte van de spoorstaaf 5 duim, dan is, met verwaarloozing van de eindstijlen en van de koppen der dwarsdragers, de oppervlakte door een brugbalk aan de uitwerking van den wind aangeboden:

$$245 \left\{ 1 + 1 + 1^1/_6 + \frac{5}{12} + 2 \times {}^5/_6 \sqrt{2} \right\} = 1455 \text{ vierk. voet} = 135 \text{ M}^2.$$

Hoewel de binnenligger, voor een groot deel door den

buitenligger en den trein voor den wind gedekt is, blijft een gedeelte daarvan en zelfs van het dek, tenzij de rigting van den wind volkomen horizontaal en loodregt op de brug mogt ondersteld worden, aan de uitwerking daarvan blootgesteld en het is zeker geene overdreven ongunstige aanname, wanneer voor het drukkingsvlak van den wind wordt gesteld 160 M².

Voor de oppervlakte van den trein, bestaande uit zeven wagens met locomotief en tender, wordt gesteld 180 M².

De drukking op de deelen der constructie en op den trein wordt dus, met de bovenvermelde aanname voor:

den pijler . . .	74×250	$= 18500$	K.G.
» brugbalk .	160×250	$= 40000$	»
» trein . . .	180×250	$= 45000$	»

Het aangrijpingspunt der krachten kan gerekend worden te liggen boven den gemetselden voet van den pijler voor:

den pijler op	11.4	M.
» brugbalk op	27.	»
» trein op	25.	»

zoodat het omstortingsmoment van den pijler bedraagt:

$$11.4 \times 18500 + 27 \times 40000 + 25 \times 45000 = 2415900 \text{ M.K.G.}$$

De juiste plaats der ijzeren buizen op hun gemetseld voetstuk is mij niet bekend, doch van de waarheid kan niet veel worden afgeweken door aan te nemen, dat de vier binnenste buizen met haar middenpunt 1.5 M., de beide buitenste 3.2 M. uit de hartlijn van den pijler verwijderd waren.

Zoowel voor de buizen van 18, als voor die van 15 duim middellijn wordt de metaaldikte gesteld op $1^1/_4$ duim.

Het moment van enertie van het grondvlak ten opzigte van de pijler-as wordt dan bij benadering:

$$2 \{0.0421 \times 3.2^2 + 2 \times 0.0346 \times 1.5^2\} = 1.1736$$

en de spanning van een vezel in het hart van de uiterste buis, gereduceerd op den M^2.:

$$S = \frac{3.2}{1.1736} \times 2.415900 = 6587300 \text{ K.G. of } 659 \text{ K.G. per c.}M^3.$$

Deze spanning moet echter verminderd worden met de, in tegengestelde rigting werkende drukspanning ontstaande uit het eigengewigt van den pijler en dat van den daarop rustenden last.

Voor het eigen gewigt van het metallieke gedeelte van den pijler kan gesteld worden 40000 K. G. Het gewigt van den bovenbouw eener groote overspanning aannemende op $40 \times 74.5^2 = 222000$ K. G. en dat van den trein, voor zooveel het op den pijler dragen kan op $\frac{119}{149} \times 60 \times 3000$ $= 144000$ K. G., verkrijgt voor de geheele belasting op den pijlervoet 406000 K. G. en daar de gezamenlijke doorsnede der buizen bedraagt 2226 c.M^2., wordt dus de c.M^2. gedrukt met $\pm$ 180 K. G., zoodat de blijvende trekspanning bedraagt 479 K. G. per c.M^2.

Zooals ik hierboven opmerkte werd slechts om aan te toonen, dat de wind alleen geen oorzaak kan geweest zijn van het omstorten der pijlers, de overdreven onderstelling gemaakt, dat die eene drukking veroorzaakte van 250 K. G. per M^2. Was daarvoor aangenomen het cijfer van 185 K. G., dat uit de waarnemingen van Professor GRANT is afgeleid, dan zou de spanning, door den winddruk opgewekt, slechts hebben bedragen $\frac{185}{250} \times 659 = 488$ K. G. en dus de blijvende trekspanning $488 - 180 = 308$ K. G. per c.M^2.

Afgescheiden van andere oorzaken heeft dus de wind, hoewel hij daartoe veel kan hebben bijgedragen, de omstorting niet veroorzaakt. Ofschoon aanzienlijk genoeg voor zulke hooge buizen, ligt toch de berekende spanning ver binnen de grens der trekkende krachten, waaronder gegoten ijzer breekt en die men voor goede kwaliteit op 1100 K. G., voor beste kwaliteit op 1500 K. G. per c.M^2. stellen kan,

Bij soliede constructies blijft men met de geoorloofde spanning ver binnen die grens en neemt daarvoor in den regel niet meer aan dan $^1/_5$ van het brekingsgewigt, hoewel Dr. HEINZERLING, bij gebruik van materialen onder, voor het meerendeel constante krachten en onder den gewonen invloed van den dampkring, wanneer geene belangrijke trillingen kunnen ontstaan, eene spanning van 400 K. G. voor geoorloofd houdt.

Ofschoon nu aan deze voorwaarden niet voldaan werd en dus, door den wind, in de constructie hooger spanningen konden ontstaan dan men gewoonlijk toelaat, moest de brug daartegen bestand zijn.

Wanneer evenwel de dwarsverbindingen van de pijlers te zwak waren en, zooals maar al te zeer het geval schijnt geweest te zijn, door minder goede uitvoering, de uiterste buis, afgescheiden van de anderen, eene, zij het ook geringe eigen beweging verkrijgen kon, ontstond de mogelijkheid dat in die buis zeer belangrijke trekspanningen werden opgewekt.

Een drietal buizen, op het einde van den gemetselden voet geplaatst, vormde het steunpunt van een der balken van den bovenbouw van de brug. Deze drie buizen waren onderling bij de horizontale voegen, door dubbele gootijzers, die om de aan de buizen gegoten voren grepen, en in elk vak door plat-ijzeren strooken gekoppeld. Op elk drietal lag een hoog koppelstuk met draagplaat waarop de uitzettingsrollen bewogen. De vier binnenbuizen waren eveneens met goot en platijzer, doch niet met het zware koppelstuk vereenigd. De gaten waren ruw en in de voren der buizen gegoten. Ook in de goot en platijzers schijnen die met zeer weinig zorg bewerkt te zijn geweest, zoodat de bouten niet in de gaten pasten, maar eenige speling mogelijk was. De gezamenlijke buizen vormden dus geen onwrikbaar geheel, maar de eene kon zich ten opzigte van de andere meer of minder verplaatsen.

De beide uiterste buizen waren geplaatst in een vlak, haaks op de as van de brug, doch hadden in dit vlak eene kleine helling. Evenzoo bevonden zich de vier binnenste buizen

paarsgewijze, met eene geringe binnenwaartsche helling, in twee vlakken, evenwijdig aan de as van de brug.

Volgens VON WEBER bedroeg het verschil in lengte tusschen grond- en bovenvlak $1^1/_2$ voet, zij 46 c.M. Elke zijwand van de brug was met het hart geplaatst midden tusschen den top van de uiterste en de beide daarbij geplaatste buizen. De buitenbuis droeg dus $^1/_4$ en elke binnenbuis $^1/_8$ van het totaal gewigt van eene brug met de daarop geplaatste belasting en de resultante der drukking werkte ten opzigte van het hart van de buis in het grondvlak aan een hefboomsarm van 23 c.M., die door ombuiging van den top tengevolge van den wind tot 25 c.M. kon toenemen.

Was de dwarsverbinding onwrikbaar geweest, zoodat slechts ieder pijpstuk van 10 voet lengte op zich zelf kon doorbuigen, dan zou uit den hellenden stand van de buis geen gevaar voor den pijler zijn ontstaan, doch de speelruimte behoeft slechts zeer gering te zijn geweest om aan de buis over hare geheele lengte eene doorgaande buiging te laten aannemen, waardoor bij den voet een brekingsmoment kon ontstaan, gelijk aan het product van het op de buis drukkende gewigt met den boven berekenden hefboomsarm van 25 c.M.

Wanneer de trein zich boven een pijler bevond, bedroeg het daarop drukkende gewigt $222000 + \frac{119}{149} \times 180000 = 366000$ K. G. ongeveer, waarvan op iedere uiterste buis $^1/_4$ of ongeveer 91500 K. G. opgenomen werd. Hierdoor kon dus, bij het bevestigingspunt van de buis, een spanningsmoment ontstaan van 2100000 K. G. c.M., waaraan door de inwendige spanningen in het metaal, weêrstand moest geboden worden.

Het moment van inertie van de buis ten opzigte van eene middellijn, bij een uitwendigen straal $r = 23$ c.M. en een inwendigen $r_1 = 20$ c.M. bedraagt $\frac{\pi}{4}(r^4 - r_1^4) = 94123$ en dus de spanning in den uitersten vezel herleid op den c.M^2:

$$S = \frac{23 \times 2100000}{94123} = 511 \text{ K. G.}$$

Ook deze spanning op zich zelf, ofschoon stellig hooger dan mag worden toegelaten, was geen oorzaak van de breuk.

Die buis was evenwel in hare beweging niet vrij, maar werd, afgescheiden van de dwarskoppelingen, door het zware oplegstuk, gesteund tegen de beide binnenbuizen van het drietal, die evenwel weinig tegenstand konden bieden, daar eene eenvoudige berekening toont, dat eene drukking van 100 K. G. aan den top voldoende was om haar 3.5 c.M. te doen doorbuigen.

Van meer beteekenis is de koppeling, die door den bovenbouw van de brug zelf werd verkregen en die, wanneer de oplegging onwrikbaar was, de zes buizen aan den top weder tot een geheel verbond. Dit voordeel ging echter verloren wanneer de balk, onder den winddruk, over het van den wind gekeerde steunpunt kon verschuiven en daar de drukking op het draagvlak 183000 K. G. en de afschuivende kracht van den wind op deze hoogte 70000 K. G. bedroegen, konden alleen de bouten de brug op hare plaats houden, en aannemende dat deze onwrikbaar waren, dan konden nog de bovenbouw over zijne opzetrollen en deze over hun draagvlak verschuiven.

Men kan dus aannemen, dat de uiterste buis, bij elken windstoot, gedurende een oogenblik bijna elken zijdelingschen steun miste; al volgt hieruit nu niet, dat de bovenberekende spanning inderdaad is ontstaan, omdat door het gewigt van de brug, de oplegging en de dwarskoppelingen, eenige, zij het ook een onvoldoende tegenstand werd geboden, — toch blijkt er uit, naar het mij voorkomt, dat de pijler vermoedelijk door trekspanningen is bezweken, daar deze, door de golvende beweging, die de buis onder opvolgende windstooten moest aannemen, waarschijnlijk plaatselijk nog verhoogd werden en het wederstandsvermogen van het ijzer, bij de trillingen door die beweging en door den voortrollenden trein teweeggebragt, vermoedelijk verminderden.

Wanneer de bovenbouw over de drie van den wind gekeerde buizen kon heenglijden en de koppeling tusschen de vier binnenbuizen geen weêrstand bood, dan ontstond in den uitersten vezel van de buitenbuis van het, als een geheel

beschouwd ander drietal, met eene doorbuiging van 16 c.M. eene spanning van ruim 7000 K. G. per c.M^2.

Ofschoon nu deze toestanden niet in hun geheel en niet allen gelijktijdig kunnen zijn voorgekomen, daar de eerste eene onwrikbare verbinding onderstelt, is het toch stellig geene gewaagde aanname dat zij, voor zoover mogelijk te zamen, spanningen konden opwekken, die afscheuring ten gevolge hadden.

Bij het bovenstaande werd bovendien aangenomen, dat bij het opstellen alle assen der opvolgende pijpstukken van eene buis in eene regte lijn gelegen en dat de buizen zuiver cylindrisch en overal gelijk van dikte waren en werd de stof volkomen homogeen ondersteld. In de praktijk is aan die voorwaarden niet te voldoen en wanneer het juist is wat in de *Engineer* van 9 Januarij jl. wordt gezegd, *dat de randen afgedraaid, de voegen gevlakt, de gaten geboord en om te gemoet te komen aan de ongelijkheden in het gegoten ijzer, ringen soms tot zes in getal onder de moeren werden geplaatst*, dan valt zeker op gelijkmatige dikte evenmin als op eene naauwkeurige uitvoering te rekenen.

Ofschoon ik meen aangetoond te hebben, dat de topbelasting en de wind, bij den voet van de hellende buis noodzalijk trekspanning moest opwekken, die op de sterkte van het geheel een zeer nadeeligen invloed uitoefende, is het geenszins mijne bedoeling, bij eene goede uitvoering het gebruik van schoorbuizen af te keuren; door aan die buizen, bij voldoende afmetingen en onwrikbare koppeling, eene sterkere helling te geven, zou men de stabiliteit van den pijler vergroot hebben. Eene andere vraag is het, of de schoorbuis tevens behoorde te dienen om den last te dragen; maar hetzij men haar al of niet tot dit doel wenschte te bestemmen, moest men haar afmetingen gegeven hebben, voldoende om aan de grootste krachten, die er in konden worden opgewekt, met volkomen zekerheid weêrstand te bieden.

Hoewel dit uit het bovenstaande wel gebleken is, meen ik er ten slotte nog bepaald op te moeten wijzen, dat mij bij het voorgaande onderzoek slechts onvoldoende gegevens aangaande de Taybrug ten dienste stonden. Er bestaan, voor

zoover mij bekend is, geene beschrijving en teekeningen van het uitgevoerde werk. Wat men er hier en daar in verschillende tijdschriften van vindt, bepaalt zich slechts tot enkele onderdeelen der brug; bovendien komen die berigten in de verschillende bronnen niet altijd overeen.

Nadat ik het bovenstaande had opgeteekend, nam ik kennis van het rapport van den Heer LAW, aan wien door de Heeren ROTHERY, BARLOW en kolonel YOLLAND was opgedragen een onderzoek naar de Taybrug in te stellen.

Aangezien uit dit onderzoek blijkt, dat eenige der bovenmedegedeelde opgaven niet juist zijn en overigens mijne onderstellingen daardoor meer waarschijnlijkheid verkrijgen, meen ik niet beter te kunnen doen dan enkele zinsneden daaruit te vertalen.

In eene voorafgaande beschrijving van de brug zegt de Heer LAW:

»Over het nog bestaande zuidelijk gedeelte van de brug »heeft de spoorbaan eene klimming van 1 op 353.68 en die »klimming liep door over de eerste groote opening; over »de tweede bedroeg zij 1 op 490; over de volgende zes »openingen, de hoogste van de brug, was de baan waterpas. »over de daarop volgende opening was eene daling van 1 op 130 »en over de vier volgende van 1 op 73.56, welke daling over »bijna het geheele noordelijke einde van de brug bestond.

»Het gevallen deel van de brug bestond uit gesmeed ijzeren »traliebalken hoog 27 voet, met een afstand hart op hart »van 14 voet 10 duim. De bouw en onderrand hadden den »trogvorm, 2 voet wijd en 15 tot 16 duim hoog. De balk »van iedere overspanning was op zich zelf een geheel; de »eindvertikalen hebben dezelfde doorsnede als de randen; »slechts waren zij buitenwaarts 18 duim breed; de diagonalen »die alleen trekkende krachten moesten opnemen, bestonden »uit platte staven, paarsgewijze aan iedere zijde van de ran»den geplaatst; de gedrukte diagonalen hadden den I vorm »en waren tusschen de opgaande platen van de randen ge»plaatst en met deze en met de getrokken staven, bij hunne »ontmoeting, verbonden.

»De bovenranden waren door gesmeed ijzeren dwarsbalken »en diagonalen gekoppeld. De baan werd gedragen door »gesmeed ijzeren vischbuikvormige dwarsdragers, die 5 voet »5 duim uit elkander waren geplaatst, op den bovenkant »van den onderrand droegen en daaraan waren geklonken, »om te dienen als stijlen der dwarskoppeling, die door dia»gonaalstaven voltooid werd.

»Te oordeelen naar het overgeblevene deel van de brug is »de baan met zorg zamengesteld. De spoorstaven liggen op »houten langsliggers breed 18, hoog 15 duim; de rails zijn »van staal en wegen 75 pond per yard, met contrarails van »gelijk gewigt en materiaal, die met de spoorstaven in de»zelfde, 3 voet uit elkander geplaatste stoelen rusten. Om »de spoorwijdte te behouden zijn, op afstanden van onge»veer 19 voet, platijzeren koppelstangen aangebragt.

»De brug is bevloerd met planken, 4 duim dik, gedekt »met asphalt en met eene weinige duimen dikke grindlaag, »als waarborg tegen brandgevaar.

»De omgestorte pijlers bestonden uit zes gegoten ijzeren »kolommen, gekoppeld door gesmeed ijzeren dwars- en kruis»staven. De funderingmuur was een zeshoekige betonpijler, »met metselwerk omkleed, lang van punt tot punt 27 voet »6 duim, breed 15 voet 6 duim. Deze pijlers waren opge»trokken tot 5 voet boven hoog water bij springvloeden. »De vier bovenste lagen waren van gehouwen steen en er »blijkt geene beweging of verzakking te hebben plaats »gehad.

»De hoogte van de bovenste laag van het metselwerk tot »den onderkant der liggers wisselt af tusschen 83 voet en »81 voet 3 duim."

In eene tabel worden de volgende opgaven medegedeeld:

Nommers der pijlers.	Hoogte van den pijler.	Nommers der overspanningen.	Wijdte der overspanning.	Omschrijving van de oplegging op den pijler.
	vt. dm.		vt.	
28	67. 6	29	245	3 rollen op den lagen balk.
29	82. 6	30	245	8 » » » pijler.
30	83. 0	31	245	8 » » » »
31	83. 0	32	245	vastgebout op den pijler.
32	83. 0	33	245	8 rollen op den pijler.
33	83. 0	34	227	6 » en uitzettingstoestel.
34	83. 0	35	245	8 » op den pijler.
35	83. 0	36	245	vastgebout op den pijler.
36	83. 0	37	227	8 rollen op den pijler.
37	82. 8	38	245	6 » en uitzettingstoestel.
38	82. 4	39	245	8 » op den pijler.
39	82. 0	40	245	vastgebout op den pijler.
40	81. 8	41	245	8 rollen op den pijler.
41	66. 10	—	—	3 » op den lagen balk.

NB. De pijlers zijn gerekend uit het zuideinde.

»De zes kolommen waren zoo geplaatst, dat zij twee drie-»hoekige groepen vormden, die aan hun boveneinde alleen »door- dwars en diagonaalstangen verbonden waren. De beide »uiterste kolommen hadden 18 duim middellijn en helden in »de rigting naar de brug met den top 12 duim over. De »middellijn der vier andere kolommen was 15 duim; zij ston-»den paarsgewijze in vertikale vlakken evenwijdig aan de as »der brug en helden in dit vlak over hunne geheele hoogte, »12 duim naar binnen over.

»Iedere kolom bestond uit zes pijpstukken met randen, op »de voeg met 8 schroefbouten van $1^1/_8$ duim aan elkander

»verbonden. Ieder drietal was gedekt door een gesmeed »ijzeren doosligger met L grondplan en gedragen door de »drie kolommen; op dezen doosligger was een andere cel- »vormige ligger geplaatst, in de rigting van de as van de »brug en vertikaal onder den hoofdbalk. Boven op dezen »celvormigen ligger was eene zware gegoten ijzeren plaat »vastgebout, terwijl eene soortgelijke plaat onder aan den »brugrand bevestigd was en tusschen deze beide platen waren »de gegoten ijzeren rollen, zwaar in middellijn 5 duim, lang »2 voet geplaatst, waarop de brug droeg.

»Bij de pijlers 31, 35 en 39 ontbraken de rollen en waren »de tralieliggers met schroefbouten aan de celvormige lig- »gers bevestigd.

»In de rigting haaks op de brug lagen de assen van de »brugbalken midden tusschen de uiterste en de beide bin- »nenste kolommen van elke groep, zoodat de eerste de helft »en elk der beide anderen een vierde van de drukking »opnamen.

»De drie kolommen van elke groep waren door koppel- »en trekstangen verbonden. De horizontaal geplaatste kop- »pelstangen bestonden uit twee gootijzers, met de ruggen »naar elkander gekeerd, aan elk einde met twee bouten van »$1^1/_8$ duim verbonden aan ooren aan de kolom gegoten. »In elke regthoekige opening door de kolommen en twee »koppelstangen gevormd, waren diagonaalsgewijze getrokken »ijzeren platen, breed $4^1/_2$, dik $^1/_2$ duim, aangebragt met hun »boveneinde door bouten, dik $1^1/_8$ duim, verbonden aan »ooren, die aan de kolom waren gegoten en met hun onder- »einde met spieën bevestigd tusschen twee platen van $4^1/_2$ »bij $^3/_8$ duim, die weder door $1^1/_8$ duim dikke bouten ver- »bonden waren aan ooren, aan de kolommen gegoten.

»In de rigting haaks op de brug waren de kolommen van »15 duim op dezelfde wijze door horizontaal- en diagonaal- »stangen verbonden, terwijl bovendien, bij iedere voeg, de »15 duims kolommen van dezelfde groep door eene getrok- »ken ijzeren trekstang van $1^1/_2$ duim middellijn vereenigd »waren."

Na eene uitweiding over de wijze van berekening der

drukkingen op de pijlers, die mij niet voorkomt juist te zijn, gaat de Heer LAW aldus voort:

»Maar ongelukkiglijk moet het, tengevolge van de onvol- »doende wijze waarop de steun- en trekijzers, die de kolommen »vereenigden, waren aangebragt, er ver van af geweest zijn »dat de pijlers als stijve constructies konden worden aange- »merkt. De steunijzers waren gootijzers, met de ruggen naar »elkander geplaatst en de ooren der kolommen daartusschen. »waarmede zij, aan ieder einde, met twee bouten van $1^1/_8$ »duim verbonden waren; de boutgaten waren op $1^1/_4$ duim »middellijn gegoten en daar zij ruw en grooter dan de bout- »dikte waren en de einden der steunijzers geen vlak vonden »waartegen zij aanstieten, werden deze ijzers alleen op hunne »plaats gehouden door de zamenknijping der bouten. Maar »de aldus verkregen zekerheid moet zeer gering geweest zijn, »omdat, door de ongelijkheid der ooren zelf en door dat »sommige gaten in de ooren, op eene ruwe wijze, door een »stomp werktuig verruimd waren, waardoor een baard was »achtergebleven, het werkelijke draagvlak van onderscheidene »koppelstangen tegen de ooren zeer klein was.

»Bij de uitvoering van het werk werden de vlakke trek- »stangen met spieën opgesloten, maar daar de insnijdingen in »de staven, waar de spieën tegen steunden, ruw waren; »de wiggen zelf ruw gesmeed waren en de gaten in de »ooren niet cylindrisch, en schroefbouten in plaats van »pennen gebruikt waren, om de einden der diagonalen te »bevestigen, was het werkelijke steunvlak zeer gering en »eene betrekkelijk geringe kracht noodig om den kant van »het gat in den draad van de schroef te dringen.

»Evenzoo moet opgemerkt worden, dat het steunvlak van »de spie, tegen de staaf, geheel onevenredig was aan de door- »snede van deze, want terwijl de doorsnede van de, aan eene »trekkende kracht onderworpen staaf eene oppervlakte had »van 1.625 vierkante duim, was de oppervlakte van de, aan »drukking onderworpen spie, die 1.86 vierkante duim had »behooren te zijn, slechts 0.375 vierkante duim, dus de »sterkte slechts één-vijfde van die der staaf.

»Het gevolg daarvan kon wezen, dat door een zijdeling-

»schen druk tegen de kolommen, beweging moest ontstaan »in de koppel- en trekstangen, waardoor de laatste slap wer»den. En die beweging had inderdaad plaats. Ik bevond, dat »in de nog bestaande trekstangen, ijzeren stopstukken van »1/4 duim dik, tusschen de spie en de groef waren aange»bragt en ik vernam, dat dit van tijd tot tijd, sedert de »opening van de brug voor het verkeer, had plaats gehad.

»Uit de mededeelingen, die ik ontving, bleek dat ongeveer »150 zulke stopstukken waren aangebragt tusschen October »1878 en het tijdstip waarop de brug instortte, en dat de »noodzakelijkheid daaraan reeds ontstond toen de brug vijf »maanden in gebruik was. Deze omstandigheid toont aan, »dat onder de gezamenlijke inwerking van overtrekkende trei»nen en van den wind eene belangrijke, stootende beweging »in de pijlers heeft moeten ontstaan en wijst, naar het mij »voorkomt, op de eerste oorzaak van het onheil; want door »het slap worden van de dwars- en diagonaal-stangen werd »de eenige voorwaarde weggenomen, waarop de magt van »het bouwwerk, om weêrstand te bieden tegen omstorting »door eene zijdelingsche kracht, berustte. En het is gemak»kelijk te begrijpen, dat een storm, zoo hevig als die van »28 December jl. in de verbindingen der dwars- en kruis»stangen met de kolommen, bewegingen kon doen ontstaan, »waardoor deze niet meer in staat waren aan het bijkomende »gewigt van den trein en de zijdelingsche drukking van den »wind weêrstand te bieden."

Junij 1880.

OVER

PERIODIEKE TERUGLOOPENDE BETREKKINGEN

TUSSCHEN DE

COËFFICIËNTEN IN DE ONTWIKKELING VAN FUNCTIËN;

MEER IN HET BIJZONDER TUSSCHEN DE BERNOULLIAANSCHE EN OOK TUSSCHEN EENIGE DAARMEDE VERWANTE COËFFICIËNTEN.

DOOR

F. J. VAN DEN BERG.

Indien, stellende $i = \sqrt{-1}$ en $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}} = \cos\frac{2\pi}{n} + i \sin\frac{2\pi}{n}$, de n wortels van de vergelijking $\omega^n - 1 = 0$ worden voorgesteld door ω^k, waarin aan den exponent k achtervolgens alle geheele waarden van 0 tot en met $n-1$ zijn te geven, en onder welke wortels dus steeds $\omega^0 = 1$ voorkomt, terwijl wél steeds $\omega^{\frac{n}{2}} = e^{\pi i} = \cos\pi + i \sin\pi = -1$ is, maar deze waarde slechts voor het geval van n even, dat is voor een geheelen exponent $\frac{n}{2}$, tot de wortels behoort, en terwijl alle overige wortels steeds complex zijn, dan heeft voor eene willekeurige bestaanbare functie $F(x)$, die bij vervanging van x

door $\omega^k x$ en bij ontwikkeling volgens de magten van ω^k, daarbij lettende op $(\omega^k)^n = (\omega^n)^k = 1$, overgaat in

$$F(\omega^k x) = X_0 + \omega^k X_1 + \omega^{2k} X_2 + \text{enz.} + \omega^{(n-1)k} X_{n-1},$$

(waarin X_l naar omstandigheden eindige of oneindig voortloopende polynomia van x kunnen zijn), de zoogenaamde norm van deze functie, dat is het door de notatie $\prod\limits_0^{n-1}{}_k F(\omega^k x)$ voor te stellen product $F(x)\ F(\omega x)\ F(\omega^2 x) \ldots F(\omega^{n-1} x)$, eene bestaanbare waarde die onder den vorm van den dubbelorthosymmetrischen determinant van den n^{den} graad

$$\begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \ldots X_{n-1} \\ X_{n-1} & X_0 & X_1 \ldots X_{n-2} \\ X_{n-2} & X_{n-1} & X_0 \ldots X_{n-3} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ X_1 & X_2 & X_3 \ldots X_0 \end{vmatrix}$$

te schrijven is. Dit kan o. a. blijken doordien deze determinant, als men de kolommen achtervolgens vermenigvuldigt met, maar tevens de rijen achtervolgens deelt door 1, ω^k, ω^{2k}, enz., $\omega^{(n-1)k}$, (daarbij waar noodig weder lettende op $1 = \omega^{nk}$), bijgevolg wél zijne waarde onveranderd behoudt, maar toch den gewijzigden vorm aanneemt ontstaande door iedere X_l te vervangen door $\omega^{lk} X_l$, dat is door x te vervangen door $\omega^k x$, zoodat vooreerst de determinant, deze laatste vervanging toelatende, eene functie niet slechts van x, maar bepaaldelijk van x^n, moet wezen, terwijl ten andere meer in het bijzonder, de som der elementen van iedere rij in den gewijzigden vorm gelijk $F(\omega^k x)$ zijnde, de determinant zelf door deze $F(\omega^k x)$, dus ook door het product of de norm $\prod\limits_0^{n-1}{}_k F(\omega^k x)$, deelbaar moet wezen, en dan wegens de gelijkheid der aanvangstermen X_0^n in de ontwikkeling van deter-

minant en van product, niet anders dan deze norm zelf kan zijn. (Zie o. a. ook Dr. R. BALTZER, *Theorie und Anwendung der Determinanten*, 3e Aufl., 1870, pag. 98—104; Dr. S. GÜNTHER, *Lehrbuch der Determinanten-Theorie*, 1875, pag. 93—95).

In plaats evenwel van nu te trachten voor eene gegeven $F(x)$ deze norm hetzij door den vorenstaanden determinantenvorm hetzij op andere wijze volgens de magten van x^n te ontwikkelen, is het voor het hier volgende onderzoek doelmatiger uit te gaan van de ontwikkeling van het product der norm met de logarithmisch afgeleide $\frac{F'(x)}{F(x)}$ van $F(x)$, welk product dus wél bestaanbaar, maar eene functie niet uitsluitend van x^n, maar van x zelf, is. Stellende bijv. dat men in het geval verkeert dat dit product eene ontwikkeling volgens de geheele positieve opklimmende magten van x toelaat, welke ontwikkeling men dan, wat de coëfficiënten betreft met het oog op de verdere berekening, altijd onder den vorm

$$\frac{F'(x)}{F(x)} \cdot \prod_{0}^{n-1} {}^{k} F(\omega^k x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \text{enz.} +$$
$$+ n a_n x^{n-1} + \text{enz.} + (qn + p) a_{qn+p} x^{qn+p-1} + \text{enz.} \ldots (1)$$

kan schrijven, (zijnde hierin $q = 0, 1, 2,$ enz. tot oneindig, maar, voor eene bepaalde waarde van n, p slechts $= 1, 2, 3,$ enz. tot n te nemen), dan volgt hieruit gemakkelijk de ontwikkeling der norm zelve. Immers, het eerste lid van (1), dat is het product $F'(x) \cdot \prod_{1}^{n-1} {}^{k} F(\omega^k x)$, is niet anders dan de eerste term der naar x afgeleide functie van de norm, en uit dezen term zijn de overige $n-1$ termen dier afgeleide achtervolgens af te schrijven door, voor $k = 1, 2,$ enz., $n-1$ slechts x te vervangen door $\omega^k x$ (waardoor de norm zelve onveranderd blijft) en de uitkomst telkens met ω^k te vermenigvuldigen; zoodat men, de som van al deze n termen nemende, verkrijgt:

$$\sum_{0}^{n-1}{}^{k} \frac{\omega^k F'(\omega^k x)}{F(\omega^k x)} \cdot \prod_{0}^{n-1}{}^{k} F(\omega^k x) = \sum_{0}^{n-1}{}^{k} .\omega^k \{a_1 + 2a_2\omega^k x + 3a_3\omega^{2k}x^2 + \text{enz.} + na_n\omega^{(n-1)k}x^{n-1} + \text{enz.} + (qn+p)a_{qn+p}\omega^{(qn+p-1)k}x^{qn+p-1} + \text{enz.}\}.$$

Het blijkt alzoo dat in deze som de algemeene term in x^{qn+p-1} gevonden wordt uit den gelijknamigen term in (1) door vermenigvuldiging met den factor $\sum_{0}^{n-1}{}^{k} \{\omega^k . \omega^{(qn+p-1)k}\} = \sum_{0}^{n-1}{}^{k} \omega^{kp} = \frac{1-\omega^{np}}{1-\omega^p}$, dat is steeds met nul, behalve alleen voor $p = n$ zelf, als wanneer deze factor gelijk $\sum_{0}^{n-1}{}^{k} 1^k = n$ is; en de vorenstaande som herleidt zich dus tot

$$\frac{d. \prod_{0}^{n-1}{}^{k} F(\omega^k x)}{dx} = n\{n\,a_n x^{n-1} + 2\,n\,a_{2n} x^{2n-1} + 3\,n\,a_{3n} x^{3n-1} + \text{enz.} + q\,n\,a_{qn} x^{qn-1} + \text{enz.}\},$$

waaruit door integratie voor de norm zelve gevonden wordt:

$$\prod_{0}^{n-1}{}^{k} F(\omega^k x) = n\,\{a_0 + a_n x^n + a_{2n} x^{2n} + a_{3n} x^{3n} + \text{enz.} + a_{(q-1)n} x^{(q-1)n} + a_{qn} x^{qn} + \text{enz.}\}, \ldots\ldots\ldots (2)$$

indien namelijk na_0 de waarde voorstelt die zij voor $x = 0$ aanneemt.

De ontwikkeling (1) en dus ook (2) bekend zijnde, doet haar quotient de ontwikkeling van $\frac{F'(x)}{F(x)}$ kennen; of ook, deze laatste ontwikkeling schrijvende onder den vorm:

$$-\frac{F'(x)}{F(x)} = s_1 + s_2 x + s_3 x^2 + \text{enz.} + s_p x^{p-1} + \text{enz.} +$$
$$+ s_{n+p} x^{n+p-1} + \text{enz.} + s_{qn+p} x^{qn+p-1} + \text{enz.}, \ldots (3)$$

geeft de gelijkstelling der coëfficiënten van x^{qn+p-1} in het product der tweede leden van (2) en (3) en in het negatief genomen tweede lid van (1) de navolgende betrekking tusschen de coëfficiënten a (of liever de verhoudingen van deze) en s, namelijk:

$$a_{qn} s_p + a_{(q-1)n} s_{n+p} + a_{(q-2)n} s_{2n+p} + \text{enz.} + a_{2n} s_{(q-2)n+p} +$$
$$+ a_n s_{(q-1)n+p} + a_0 s_{qn+p} = -\frac{qn+p}{n} a_{qn+p}, \ldots (4)$$

die dus, wanneer men daarin voor eene bepaalde waarde van n en voor eene bepaalde aan $1 \leqq p \leqq n$ voldoende waarde van p achtervolgens $q = 0, 1, 2,$ enz. tot oneindig neemt, een stelsel van periodieke terugloopende of recurrente betrekkingen tusschen de coëfficiënten s_p, s_{n+p}, s_{2n+p}, enz. van eene met overspringing telkens van $n - 1$ tusschentermen gevormde groep van termen in (3) oplevert, en bijgevolg, op deze wijze toegepast op de verschillende voor p in aanmerking komende waarden 1, 2, 3, enz., n, alle dergelijke stelsels van betrekkingen voor al dergelijke groepen doet kennen.

En bovendien geeft nu het genoemde voor bepaalde n en p en voor $q = 0, 1, 2,$ enz. tot en met eene willekeurige q opgemaakte stelsel van $q + 1$ lineaire vergelijkingen (4) de gelegenheid om de $q + 1$ coëfficiënten s_p, s_{n+p}, s_{2n+p}, enz., s_{qn+p} als onbekenden op te lossen in functie van de coëfficiënten a, waardoor men in het algemeen voor s_{qn+p} eene breuk verkrijgt, hebbende tot noemer den determinant die gevormd wordt uit alle in de eerste leden der vergelijkingen

voorkomende coëfficiënten a en die dus, uithoofde daarin alle elementen aan ééne zijde der diagonaalrij ontbreken, zich herleidt tot zijn aanvangsterm a_0^{q+1}, terwijl de teller der breuk uit den noemer wordt afgeschreven door de laatste kolom te vervangen door de tweede leden der vergelijkingen, zoodat men, deze laatste kolom voorop brengende en tevens teller en noemer vermenigvuldigende met $(-)^{q+1} n$, verkrijgt den navolgenden $(q + 1)^{en}$ graads-determinant ter zelfstandige of onafhankelijke of independente berekening van s_{qn+p}, namelijk:

$$^{+1}.\, n\, .\, s_{qn+p} = \begin{vmatrix} p\, a_p & a_0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ (n+p)a_{n+p} & a_n & a_0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ (2n+p)a_{2n+p} & a_{2n} & a_n & a_0 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ ((q-2)n+p)a_{(q-2)n+p} & a_{(q-2)n} & a_{(q-3)n} & a_{(q-4)n} & \cdot & a_0 & 0 \\ ((q-1)n+p)a_{(q-1)n+p} & a_{(q-1)n} & a_{(q-2)n} & a_{(q-3)n} & \cdot & a_n & a_0 \\ (qn+p)a_{qn+p} & a_{qn} & a_{(q-1)n} & a_{(q-2)n} & \cdot & a_{2n} & a_n \end{vmatrix} \ldots (5)$$

Behalve de reeds boven gemaakte opmerking dat deze s_{qn+p} niet zoozeer van de coëfficiënten a zelve, maar alleen van hunne onderlinge verhoudingen afhangt, kan nog in sommige gevallen voor de werkelijke berekening de opmerking van dienst zijn dat men zoowel in (4) als in (5) alle coëfficiënten a in volgorde met de termen eener willekeurige meetkundige reeks mag vermenigvuldigen of mag deelen, dat is in het algemeen a_{qn+p} vervangen bijv. door $\lambda^{qn+p} a_{qn+p}$, mits dan slechts gelijktijdig iedere s_{qn+p} evenzeer vervangende door $\lambda^{qn+p} s_{qn+p}$. Dit blijkt namelijk, hetzij door neder te schrijven dat het product van (2) met x-maal (3) gelijk is aan $(-x)$-maal (1) en dan hierin de oorspronkelijke veranderlijke x te vervangen door λx; hetzij regtstreeks wat (4) betreft doordien deze betrekking de omschreven vervanging van alle a en s werkelijk toelaat, hetzij eindelijk voor zoover (5) aangaat door de opvolgende rijen van den determinant te vermenigvuldigen met λ^p, λ^{n+p}, λ^{2n+p}, enz., λ^{qn+p} en tevens de opvolgende

kolommen te deelen door 1, λ^p, λ^{n+p}, enz., $\lambda^{(q-1)n+p}$, hetgeen nederkomt op de vermenigvuldiging van den determinant zelf met λ^{qn+p}.

Ten aanzien van de beteekenis zoowel van de coëfficiënten s als althans van de in (2) en in het eerste lid van (4) voorkomende en dus bij $p = n$ behoorende coëfficiënten a kan nog het volgende worden vermeld. Stel dat men bij ontbinding van $F(x)$ in haar eindig of oneindig aantal lineaire factoren heeft:

$$F(x) = A(1-\alpha_1 x)(1-\alpha_2 x)(1-\alpha_3 x)(\text{enz.}) = A.\prod(1-\alpha x), \ldots (6)$$

dan wordt hieruit door logarithmische differentiatie en door invoering der notatie $s_p = \sum \alpha^p$, de formule:

$$-\frac{F'(x)}{F(x)} = \sum \frac{\alpha}{1-\alpha x} = \sum(\alpha+\alpha^2 x+\alpha^3 x^2+\text{enz.}+\alpha^p x^{p-1}+\text{enz.}) =$$

$$= s_1 + s_2 x + s_3 x^2 + \text{enz.} + s_p x^{p-1} + \text{enz.} \ldots (3)$$

teruggevonden, ten blijke dat de coëfficiënten s niet anders zijn dan de sommen der gelijknamige magten van de wortels α der vergelijking $F\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0$. Maar, indien men krachtens de beteekenis der n wortels ω^k uit de eenheid let dat (voor willekeurige y) steeds $\prod_0^{n-1}{}^k (y-\omega^k) = y^n - 1$ en dus ook hier $\prod_0^{n-1}{}^k (1-\alpha\,\omega^k x) = (\alpha x)^n.\prod_0^{n-1}{}^k\left(\frac{1}{\alpha x}-\omega^k\right) = (\alpha x)^n\left\{\left(\frac{1}{\alpha x}\right)^n - 1\right\} =$ $= 1-\alpha^n x^n$ is, leert tevens de vorenstaande waarde van $F(x)$ dat dan de norm:

$$\prod_0^{n-1}{}^k F(\omega^k x) = A^n(1-\alpha_1{}^n x^n)(1-\alpha_2{}^n x^n)(1-\alpha_3{}^n x^n)(\text{enz.}) =$$

$$= A^n.\prod(1-\alpha^n x^n) \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

wordt, ten blijke dat, al mogen de overige coëfficiënten a eene minder eenvoudige beteekenis hebben, de in (2) voorkomende coëfficiënten a_0, a_n, a_{2n}, enz. gelijk zijn aan $\frac{A^n}{n}$ maal de eenheid en maal de beurtelings negatief en positief genomen sommen der producten 1 aan 1, 2 aan 2, enz. van de n^{de} magten der evengenoemde wortels α.

Of nu overigens de formulen (4) of (5) met voordeel dienstbaar kunnen worden gemaakt aan de werkelijke periodieke of groepsgewijze getallenberekening der coëfficiënten s van eene of andere aangenomen functie $f(x) = -\frac{F'(x)}{F(x)}$, hangt dáárvan af of men, na hieruit $F(x) = e^{-\int f(x)\,dx}$ opgelost te hebben, er in slaagt de functie (1) regtstreeks te ontwikkelen volgens coëfficiënten a, eenvoudig genoeg om die in (4) of (5) te kunnen gebruiken.

Bepaalt men zich tot het meest eenvoudige geval $n = 1$, als wanneer in de vergelijking $\omega^n - 1 = 0$ geen andere wortel ω^k te pas komt dan de eenheid zelve, en dus ook de norm gelijk is aan $F(x)$ zelve, terwijl dan tevens voor p alleen de waarde $p = 1$ in aanmerking komt, dan gaat de formule (1) over in

$$F'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \text{enz.} + (q+1)\,a_{q+1}\,x^q + \text{enz.};$$

dan vallen (2), (6) en (7) zamen in

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \text{enz.} + a_q x^q + \text{enz.} =$$
$$= A(1-\alpha_1 x)(1-\alpha_2 x)(1-\alpha_3 x)(\text{enz.}) = A\prod(1-\alpha x);$$

dan is (3) te schrijven onder den vorm:

$$-\frac{F'(x)}{F(x)} = s_1 + s_2 x + s_3 x^2 + \text{enz.} + s_{q+1}\,x^q + \text{enz.};$$

en dan vereenvoudigen zich de formulen (4) en (5) tot:

$$a_q s_1 + a_{q-1} s_2 + a_{q-2} s_3 + \text{enz.} + a_2 s_{q-1} + a_1 s_q + a_0 s_{q+1} =$$
$$= -\,(q+1)\,a_{q+1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4_1)$$

en

$$(-a_0)^{q+1}s_{q+1}=\begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 2a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 3a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (q-1)a_{q-1} & a_{q-2} & a_{q-3} & a_{q-4} & \cdot & a_0 & 0 \\ q\,a_q & a_{q-1} & a_{q-2} & a_{q-3} & \cdot & a_1 & a_0 \\ (q+1)a_{q+1} & a_q & a_{q-1} & a_{q-2} & \cdot & a_2 & a_1 \end{vmatrix}, \ldots (5_1)$$

die zich nu van de formulen van ALBERT GIRARD en NEWTON voor de terugloopende berekening, en van de daaruit afgeleide formule voor de onafhankelijke berekening der sommen van de gelijknamige magten der wortels van eene vergelijking door middel van hare coëfficiënten, zooals deze formulen bijv. voorkomen in Dr. W. FIEDLER's *Elemente der neueren Geometrie und der Algebra der binären Formen*, 1862, pag. 44 en 47, en in GÜNTHER, *Determinanten-Theorie*, pag. 137—138, werkelijk door niets anders onderscheiden dan doordat de aldaar gebezigde notatie t hier vervangen is door $q+1$.

Als toepassing van de voorgaande algemeene methode stelle men zich vóór, de voortbrengende functie $f(x) = -\dfrac{F'(x)}{F(x)}$ in (3) zoo te nemen dat de periodieke terugloopende betrekkingen te voorschijn komen die tusschen de Bernoulliaansche coëfficiënten moeten bestaan. Daartoe zou men, met verschillende schrijvers den p^{den} Bernoulliaanschen coëfficiënt aanduidende door B_{2p-1} (welke notatie voor ons doel regelmatiger voorkomt dan de door anderen gebezigde op zich zelve eenvoudiger notatie B_p), invoerende (volgens C. KRAMP, *Elémens d'arithmétique universelle*, 1808, pag. V—VI) de notatie $p! = 1.\,2.\,3.\ldots p$, en thans om te bekorten van den beginne af zooveel mogelijk het Σ-teeken gebruikende, zich deze

coëfficiënten gekenmerkt kunnen denken als die van de ontwikkeling der functie

$$\frac{1}{2}cot\frac{x}{2}=-\frac{1}{x}+\frac{B_1}{2!}x+\frac{B_3}{4!}x^3+\frac{B_5}{6!}x^5+\text{enz.}+\frac{B_{2p-1}}{(2p)!}x^{2p-1}+\text{enz.}=$$

$$=-\frac{1}{x}+\sum_1^{\infty}{}_p\frac{B_{2p-1}}{(2p)!}x^{2p-1},$$

welke ontwikkeling althans boven die van bijv. — *cot x* zelve reeds het voordeel zou opleveren dat hare coëfficiënten niet nog buitendien met de opvolgende even magten van het getal 2 zijn aangedaan. Door evenwel voor het thans beoogde doel werkelijk van de aanname $f(x)=-\frac{1}{2}cot\frac{x}{2}$ zelve uit te gaan, zou niet alleen de tegenwoordige ontwikkeling zich van de algemeene (3) onderscheiden doordien zij slechts oneven magten van x zou bevatten, hetgeen op zich zelf minder bezwaar zou maken, maar zou, wat van meer belang is, blijken dat, als men op de uit deze $f(x)$ voortvloeijende $F(x)=e^{-\int f(x)dx}=$ $=e^{\int\frac{cos\frac{x}{2}d\frac{x}{2}}{sin\frac{x}{2}}}=sin\frac{x}{2}$ en de volgens (1) daarbij behoorende ontwikkeling van $\frac{F'(x)}{F(x)}\prod_0^{n-1}{}_k F(\omega^k x)=\frac{1}{2}cos\frac{x}{2}\prod_1^{n-1}{}_k sin\frac{\omega^k x}{2}$, — welke laatste, blijkens de ontwikkeling van ieder harer factoren, uit termen in x^{n-1}, x^{n+1}, x^{n+3}, enz. zou bestaan en dus niet alleen steeds de termen x^{n-1}, x^{3n-1}, x^{5n-1}, enz., maar als n even is bovendien de termen x^{2n-1}, x^{4n-1}, x^{6n-1}, enz. zou bevatten, — de boven omschreven handelwijze toepaste om tot de norm $\prod_0^{n-1}{}_k sin\frac{\omega^k x}{2}$ te geraken, dat dan de ontwikkeling van deze norm volgens (2) twee verschillende vormen zou aannemen, namelijk (x^n, x^{3n}, x^{5n}, x^{7n}, enz.) voor n oneven en (x^n, x^{2n}, x^{3n}, x^{4n}, enz.) voor n even. En hieruit zou dus niet alleen de noodzakelijkheid geboren worden om

bij de toepassing der algemeene methode op $f(x) = -\frac{1}{2} cot \frac{x}{2}$ de gevallen van n oneven en n even afzonderlijk te gaan behandelen, maar zou men naar gelang daarvan ook op verschillende vormen van terugloopende en van onafhankelijke formulen (4) en (5) voor de Bernoulliaansche coëfficiënten nederkomen; of, beter gezegd, de toepassing der algemeene methode op de gevallen van n even zou terugvoeren tot betrekkingen die niet bij den perioden-aanwijzer n zelf, maar slechts bij $\frac{n}{2}$, zouden behooren, en wél betrekkingen die bovendien waarschijnlijk steeds veel zamengestelder zouden zijn dan die welke thans op eenigzins gewijzigde manier voor zoodanigen aanwijzer $\frac{n}{2}$ regtstreeks zullen worden opgemaakt.

Om de aangevoerde reden namelijk afziende van de toepassing op de evengenoemde functie, zal daarentegen uit de thans volgende bewerking blijken dat een dergelijk bezwaar van splitsing in de oneven en de even gevallen zich niet, of althans slechts in veel geringer mate, voordoet wanneer men, ook ten einde van den beginne af naauwer aan te sluiten aan den gang der bewerking voor het algemeene geval, tot voortbrengende functie kiest $-\frac{1}{2} cot \frac{\sqrt{x}}{2}$ of, met het oog op het verkrijgen van eene eenvoudige integraalfunctie $F(x)$, liever nog $f(x) = -\frac{cot \frac{\sqrt{x}}{2}}{4\sqrt{x}}$. Indien men, om ook aan den allereersten term in de cotangenten-ontwikkeling denzelfden vorm te geven als aan alle volgenden en zoodoende de geheele bewerking en ook de uitkomsten in meer beknopten vorm te verkrijgen, tegelijkertijd als 0^{den} Bernoulliaanschen coëfficiënt invoert de notatie $B_{-1} = -1$, (zijnde deze notatie ook in overeenstemming o. a. met de bekende bijzonderheid dat in de formule, waardoor de som der $(2p)^{\text{de}}$ magten van de natuurlijke getallen van 1 tot y wordt uit-

gedrukt in de afdalende magten van y, de laagste term is $(-)^{p-1} B_{2p-1}\, y)$, en tevens op grond van $p! = \frac{(p+1)!}{p+1}$ let op de waarde van het symbool $0! = 1$, is dan de uitgangsformule der berekening:

$$f(x) = -\frac{F'(x)}{F(x)} = -\frac{\cot\frac{\sqrt{x}}{2}}{4\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\sum_0^\infty{}_p \frac{B_{2p-1}}{(2p)!}\, x^{p-1} \ldots \quad (3')$$

Hieruit klimt men op tot

$$F(x) = e^{-\int f(x)dx} = e^{\int \frac{\cos\frac{\sqrt{x}}{2} d\frac{\sqrt{x}}{2}}{\sin\frac{\sqrt{x}}{2}}} = \sin\frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{\sqrt{x}}{2} . \prod_1^\infty{}_q \left\{1 - \frac{x}{(2q\pi)^2}\right\}, \ldots (6')$$

waarin de splitsing in factoren alleen is bijgevoegd om, in verband met het boven in het algemeen omtrent de beteekenis der coëfficiënten s in (3) gezegde, in het voorbijgaan te doen opmerken dat het negatief genomen logarithmisch differentiaalquotient van (6′) geeft, lettende op (3′) zelve,

$$-\left(\frac{\cot\frac{\sqrt{x}}{2}}{4\sqrt{x}} - \frac{1}{2x}\right) = \frac{1}{2}\sum_1^\infty{}_p \frac{B_{2p-1}}{(2p)!}\, x^{p-1} = \sum_1^\infty{}_q \frac{\frac{1}{(2q\pi)^2}}{1 - \frac{x}{(2q\pi)^2}} =$$

$$= \sum_1^\infty{}_q \left\{\sum_1^\infty{}_p \frac{x^{p-1}}{(2q\pi)^{2p}}\right\} = \sum_1^\infty{}_p \left\{x^{p-1} \sum_1^\infty{}_q \left(\frac{1}{2q\pi}\right)^{2p}\right\},$$

zoodat men hier (met uitsluiting wat dit betreft van B_{-1} voor $p = 0$) naar behooren de bekende uitdrukking $\frac{1}{2}\frac{B_{2p-1}}{(2p)!} = \sum_1^\infty{}_q \left(\frac{1}{2q\pi}\right)^{2p}$ terugvindt.

$F(x) = \sin\frac{\sqrt{x}}{2}$ gevonden zijnde, komt het verder volgens de algemeene methode hoofdzakelijk aan op de ontwikkeling van

$$F'(x)\,.\,\prod_{1}^{n-1}{}_{k}\,F(\omega^k x) = \frac{\cos\frac{\sqrt{x}}{2}}{4\sqrt{x}}\,.\,\prod_{1}^{n-1}{}_{k}\,\sin\frac{\sqrt{\omega^k x}}{2}$$ volgens (1), of ook, zonder deze ontwikkeling zelve neder te schrijven, op de bepaling der coëfficiënten in haar product met den noemer $4\sqrt{x}$. Let men nu op, vooreerst dat de eerste term van dit product de waarde van het product zelf voor x oneindig klein, dat is de waarde

$$\prod_{1}^{n-1}{}_{k}\frac{\sqrt{\omega^k x}}{2} = \frac{\sqrt{\omega^{\frac{n(n-1)}{2}}\,x^{n-1}}}{2^{n-1}} = \frac{\sqrt{(-1)^{n-1}x^{n-1}}}{2^{n-1}} = \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} x^{\frac{n-1}{2}}$$

moet hebben; ten tweede dat zoowel in den factor $\cos\frac{\sqrt{x}}{2}$ als in ieder der factoren $\sin\frac{\sqrt{\omega^k x}}{2}$, en dus ook in het product zelf, de exponenten van x telkens met de eenheid opklimmen; ten derde dat, in denzelfden geest als boven in (1) met de coëfficiënten a voor het algemeene geval geschied is, ook thans weder de door de letters b aan te wijzen en voorloopig nog onbekende coëfficiënten in het product toch reeds dadelijk aangedaan met zoodanige getallenfactoren kunnen worden nedergeschreven als bij hunne later, althans voor $n = 1$ tot en met $n = 6$, te berekenen getallenwaarden in verband met den vorm der eindformulen (4) en (5) voor het tegenwoordige geval meest doelmatig zal blijken, en evenzeer wat de teekens betreft zóó dat dan al deze coëfficiënten b positief zullen blijken; dan kan men het meergenoemde product steeds schrijven onder den volgenden vorm:

$$\cos\frac{\sqrt{x}}{2}\,.\,\prod_{1}^{n-1}{}_{k}\,\sin\frac{\sqrt{\omega^k x}}{2} =$$

$$= 2\left(\frac{i}{2}\right)^{n-1}\sum_{0}^{\infty}{}_{q}(-)^q\left\{+\frac{b_{(2q+1)n-1}}{((2q+1)n-1)!}x^{\frac{(2q+1)n-1}{2}} - \frac{b_{(2q+1)n+1}}{((2q+1)n+1)!}x^{\frac{(2q+1)n+1}{2}}\right.$$

$$\left. - \frac{b_{(2q+1)n+3}}{((2q+1)n+3)!}x^{\frac{(2q+1)n+3}{2}} - \text{enz.} - \frac{b_{(2q+3)n-3}}{((2q+3)n-3)!}x^{\frac{(2q+3)n-3}{2}}\right\}$$

$$= 2\left(\frac{i}{2}\right)^{n-1}\sum_{0}^{\infty}{}_{q}(-)^q\left\{\sum_{0}^{n-1}{}_{p}\left\{\begin{matrix}(\text{voor } p=0) & + \\ (\text{voor } p=1 \text{ tot } n-1) & -\end{matrix}\right\}\frac{b_{(2q+1)n+2p-1}}{((2q+1)n+2p-1)!}x^{\frac{(2q+1)n+2p-1}{2}}\right\}$$

waarin, terwijl bij het eerste Σ-teeken als vroeger $q = 0$, 1, 2, enz. tot oneindig is te nemen, daarentegen voor eene bepaalde waarde van n thans, in verband ook met (3′), bij het tweede Σ-teeken aan p achtervolgens de waarden 0, 1, 2, enz., $n - 1$, in plaats van de vroegere waarden 1, 2, 3, enz. n te geven zijn, en daarbij telkens, zooals aangewezen is, alleen vóór den door $p = 0$ aangeduiden eersten term het teeken $+$, maar vóór alle $n - 1$ overige termen het teeken $-$ te schrijven is.

Met geringe wijziging, noodig doordien men thans met de ten minste voor even waarden van n irrationale functie (1′) in plaats van met de vroeger steeds rationale functie (1) te doen heeft, is nu weder de boven gevolgde handelwijze toepasselijk om uit (1′) te besluiten tot de ontwikkeling (2) der norm voor het tegenwoordige geval. Immers, door het eerste lid van (1′) te schrijven onder den vorm $cot \frac{\sqrt{x}}{2} . \prod_0^{n-1}{}_k \, sin \frac{\sqrt{\omega^k x}}{2}$ blijkt dat bij vervanging van x door $\omega^k x$ wél de $n - k$ eerste der onder dit nieuwe Π-teeken voorkomende factoren juist overgaan in de $n - k$ laatste, maar dat daarentegen wegens $\sqrt{\omega^n} = e^{\pi i} = -1$ de k laatste dier factoren overgaan in de k eerste ieder negatief genomen. Van daar dat thans, om uit het evengenoemde eerste lid, dat is uit den eersten term van $4\sqrt{x}$ maal de afgeleide der norm, achtervolgens de overige termen af te schrijven, de vervanging van x door $\omega^k x$ telkens gepaard moet gaan met eene vermenigvuldiging niet alleen met $\sqrt{\omega^k}$, maar bovendien met $(-1)^k = (\sqrt{\omega^n})^k$, dus in het geheel met $\omega^{\frac{(n+1)k}{2}}$. Dezelfde vervanging en vermenigvuldiging nu, toegepast op het tweede lid van (1′), komt voor den algemeenen term van dit lid bijgevolg neder op de enkele vermenigvuldiging met $\omega^{\frac{(n+1)k}{2}} . \omega^{\frac{k((2q+1)n+2p-1)}{2}} = \omega^{k((q+1)n+p)} = \omega^{kp}$; zoodat men, de som van al deze achtervolgens bij $k = 1, 2$, enz., $n - 1$, behoorende uitkomsten en van den oorspronkelijken term in (1′) zelve nemende, dezen term vermenigvuldigd vindt met

den factor $\sum_{0}^{n-1} {}_k\, \omega^{kp}$, dat is, evenals vroeger in het algemeen, steeds met nul, met uitzondering alleen van het binnen de tegenwoordige grenzen $0 \leqq p \leqq n-1$ liggende geval van $p = 0$, als wanneer evengenoemde factor de waarde n verkrijgt. En het blijkt alzoo dat, als men werkelijk, ook in de eerste leden, de evenbedoelde som van (1') en van de overeenkomstige formulen voor $k = 1, 2,$ enz., $n-1$, opmaakt en deze som tevens deelt door $4\sqrt{x}$, men thans, onverschillig of n even of oneven is, (en dus zonder in dit opzigt eene onderscheiding te behoeven, die zooals boven vermeld voor $f(x) = -\frac{1}{2} \cot \frac{x}{2}$ wél noodig zou geweest zijn), nederkomt op:

$$\frac{d \,.\, \prod_{0}^{n-1} {}_k \sin \frac{\sqrt{\omega^k x}}{2}}{dx} = \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} \sum_{0}^{\infty} {}_q (-)^q \frac{b_{(2q+1)n-1}}{((2q+1)n-1)!} \cdot \frac{n}{2}\, x^{\frac{(2q+1)n}{2}-1},$$

zoodat men de norm zelve naar verkiezing kan schrijven onder een der beide volgende vormen:

$$\prod_{0}^{n-1} {}_k \sin \frac{\sqrt{\omega^k x}}{2} = \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} \sum_{0}^{\infty} {}_q (-)^q \frac{b_{(2q+1)n-1}}{(2q+1).((2q+1)n-1)!}\, x^{\frac{(2q+1)n}{2}} =$$

$$= n \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} \sum_{0}^{\infty} {}_q (-)^q \frac{b_{(2q+1)n-1}}{((2q+1)n)!}\, x^{\frac{(2q+1)n}{2}} \quad . \; . \; . \; . \; (2')$$

zonder bijtevoegen constante, zooals de onderstelling van x oneindig klein in beide leden leert, terwijl diezelfde onderstelling evenals reeds boven bij (1') bovendien $b_{n-1} = \frac{(n-1)!}{2}$ doet kennen.

Schrijft men nu neder dat het product der tweede leden van (2') en van $4\sqrt{x}$ maal (3') gelijk is aan het negatief genomen tweede lid van (1'), dan kan men daarbij, als r

eene der waarden van 0 tot en met q voorstelt, in den algemeenen term van (2′) den aanwijzer q vervangen door $q - r$ en daarentegen in dien van (3′) den aanwijzer p door $rn + p$, ten einde de som der coëfficiënten van alle onderling gelijknamige termen, die voor $r = 0, 1, 2$, enz., q, uit een product van den vorm $\left\{ \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} x^{\frac{(2q-2r+1)n}{2}} \right\} \left\{ 4\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{rn+p-1} \right\}$ voortkomen, gelijk te kunnen stellen aan den negatief genomen coëfficiënt van $2 \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} x^{\frac{(2q+1)n+2p-1}{2}}$ in (1′). Dit doende en gelijktijdig met $(-)^q \cdot ((2q+1)n + 2p - 1)!$ of met $(-)^q \cdot \frac{((2q+1)n+2p)!}{n}$ vermenigvuldigende, naarmate men van den eersten of van den tweeden vorm van (2′) gebruik wenscht te maken, en tevens in het algemeen de notatie $\binom{s}{t} = \frac{s!}{t!(s-t)!} = \binom{s}{s-t}$ voor de onderling gelijke $(t+1)^e$ en $(s-t+1)^e$ binomiaal-coëfficiënten van de s^{de} magt invoerende, verkrijgt men de beide volgende vormen van de periodieke terugloopende betrekking tusschen de Bernoulliaansche coëfficiënten, uitgedrukt in de coëfficiënten b van de ontwikkeling (1′), namelijk:

$$\sum_0^q{}_r (-)^r \binom{(2q+1)n+2p-1}{(2q-2r+1)n-1} \frac{b_{(2q-2r+1)n-1}}{2q-2r+1} B_{2rn+2p-1} =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} (p=0) & - \\ (p=1 \text{ tot } n-1) & + \end{matrix} \right\} b_{(2q+1)n+2p-1} \dots\dots\dots\dots (4')$$

en

$$\sum_0^q{}_r (-)^r \binom{(2q+1)n+2p}{(2q-2r+1)n} b_{(2q-2r+1)n-1} B_{2rn+2p-1} =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} (p=0) & - \\ (p=1 \text{ tot } n-1) & + \end{matrix} \right\} \frac{(2q+1)n+2p}{n} b_{(2q+1)n+2p-1} \;, \; . \; (4'')$$

waarin de uitdrukking onder het Σ-teeken, in wier binomiaalcoëfficiënt men den beneden-aanwijzer desverkiezende ook door $2rn + 2p$ kan vervangen, behoort bij den $(r+1)^{en}$ of algemee-

nen term uit de $q + 1$ termen waaruit het eerste lid bestaat der $(q + 1)^e$ betrekking of vergelijking voor de $(p + 1)^e$ der n verschillende groepen die uit de Bernoulliaansche coëfficiënten, telkens met overspringing van $n - 1$ van hen, gevormd kunnen worden. Ofschoon van deze vormen (4') en (4'') de laatste in zooverre algebraïsch eenvoudiger is dan de gelijkwaardige eerste, dat althans alle coëfficiënten b in zijn eerste lid in hun geheel in plaats van in onderdeelen voorkomen, is daarentegen die laatste vorm voor de getallenberekening waarschijnlijk niet altijd de eenvoudigste. Ook zou men de gevonden terugloopende betrekking, in plaats van onder dezen laatsten vorm, nog wel onder een geheel van binomiaalcoëfficiënten bevrijden en in zooverre meer eenvoudigen vorm kunnen schrijven, en zou hetzelfde voor de zoo straks volgende onafhankelijke formulen (5') en (5'') kunnen gelden, door namelijk in plaats van de coëfficiënten B en b de volledige coëfficiënten zelve aan te houden die in (3') en in (2') en in verband daarmede ook in (1') voorkomen, bijv. in het algemeen onder de notatien $B'_{2p-1} = \frac{B_{2p-1}}{(2p)!}$ en $b'_{s-1} = \frac{b_{s-1}}{s!}$, als wanneer deze coëfficiënten B' en b' zouden zamenhangen volgens de terugloopende betrekking

$$\sum_0^q {}_r (-)^r \, b'_{(2q-2r+1)n-1} \, B'_{2rn+2p-1} =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} (p=0) & - \\ (p=1 \text{ tot } n-1) & + \end{matrix} \right\} \frac{(2q+1)n + 2p}{n} \, b'_{(2q+1)n+2p-1} .$$

Intusschen zou, in verband met de boven aangevoerde redenen die de keus juist op de coëfficiënten b in plaats van op deze b' bepaald hebben, deze vereenvoudiging meer schijnbaar dan wezenlijk zijn, daar voor de werkelijke getallenberekening de coëfficiënten B' en b' toch weder zamengestelder zijn dan de coëfficiënten B en b, en het daarbij dus wenschelijk zou zijn tot het gebruik van deze laatsten terug te keeren.

Zooals is aangewezen moet in het tweede lid van (4') en van (4'') voor geene andere waarde dan voor $p = 0$, dat is dus alleen voor de eerste der daarbij genoemde n groepen, het teeken — worden genomen. Wenscht men voor dit geval

den oneigenlijken Bernoulliaanschen coëfficiënt B_{-1} uit te sluiten, die met geen ander doel werd ingevoerd dan om de betrekkingen voor alle groepen onder één gemeenschappelijken vorm (4') of (4'') te kunnen zamenvatten, dan komt door $B_{-1} = -1$ te substitueren en door de teekens om te keeren:

$$\sum_{1}^{q} {}_r (-)^{r-1} \binom{(2q+1)n-1}{(2q-2r+1)n-1} \frac{b_{(2q-2r+1)n-1}}{2q-2r+1} B_{2rn-1} =$$

$$= \frac{2q}{2q+1} b_{(2q+1)n-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4'_0)$$

of

$$\sum_{1}^{q} {}_r (-)^{r-1} \binom{(2q+1)n}{(2q-2r+1)n} b_{(2q-2r+1)n-1} B_{2rn-1} =$$

$$= 2q\, b_{(2q+1)n-1}\,, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4''_0)$$

waarin wederom voor den beneden-binomiaal-aanwijzer ook $2rn$ kan geschreven worden. Deze op zich zelve staande betrekkingen zouden nu eigenaardig, in plaats van zooals aanvankelijk bij behoud van B_{-1}, dat is voor $p = 0$, aan het hoofd, thans voor $p = n$ aan het slot van de betrekkingen voor de n verschillende groepen geschreven moeten worden, in welk geval het trouwens regelmatig zou zijn, ten einde ze zooveel mogelijk in vorm met de betrekkingen voor $p = 1$ tot en met $n - 1$ te doen overeenstemmen, in deze ($4'_0$) en ($4''_0$) nog q en r te vervangen door $q + 1$ en $r + 1$ en dus bijv. in plaats van ($4''_0$) te schrijven:

$$\sum_{0}^{q} {}_r (-)^{r} \binom{(2q+3)n}{(2q-2r+1)n} b_{(2q-2r+1)n-1} B_{2rn+(2n-1)} =$$

$$= 2(q+1)\, b_{(2q+3)n-1}\,,$$

als wanneer wél moet worden opgelet dat, ofschoon deze laatste vorm overigens in allen deele werkelijk zou overeenstemmen met hetgeen eene onderstelde toepassing van (4'') zelve voor $p = n$ zou opleveren, dergelijke toepassing evenwel in geenen deele geoorloofd is daar zij in het tweede lid den verkeerden factor $2q + 3$ in plaats van den wezenlijk

vereischten factor $2(q+1)$ zou opleveren. En in dit opzigt althans zou dus de regelmaat in de n groepen $p=1$ tot en met n juist bij deze laatste groep verbroken worden, en blijft het ongestoord gebruik van de n groepen $p=0$ tot en met $n-1$ volgens (4′) of (4″) alzoo verkieslijk.

Neemt men in (4′) achtervolgens $q=0, 1, 2,$ enz. tot en met eene willekeurige waarde q, dan kan men uit de aldus komende $q+1$ vergelijkingen met $+B_{2p-1}$, $-B_{2n+2p-1}$, $+B_{4n+2p-1}$, enz., $(-)^q B_{2qn+2p-1}$ als $q+1$ onbekenden eene algemeene formule voor de onafhankelijke berekening van den willekeurigen Bernoulliaanschen coëfficiënt $B_{2qn+2p-1}$ opmaken. Men vindt zoodoende, geheel op dezelfde wijze als vroeger bij den overgang van de algemeene betrekking (4) tot (5) omschreven is, behoudens alleen dat thans met $(-1)^q$ in plaats van toen met $(-)^{q+1} n$ vermenigvuldigd wordt, den volgenden $(q+1)^{en}$ graads-determinant voor dit doel:

(zie (**A**) op de uitslaande bladz.).

zijnde hierin het tweede lid tusschengevoegd op grond van de boven reeds opgemerkte waarde $b_{n-1}=\frac{(n-1)!}{2}$, zoodat men, van dit tweede lid gebruik makende, in het derde lid aan de volstrekte waarden der coëfficiënten b van (1′) gebonden is, terwijl daarentegen de gelijkheid van het eerste en het derde lid alleen van de onderlinge verhoudingen dezer coëfficiënten afhangt. In deze laatste gelijkheid van (5′) en van de zoo straks volgende (5″), en in (4′), (4″), ($4'_0$) en ($4''_0$) kan bovendien nog, in denzelfden geest als vroeger in het algemeen voor (4) en (5) bleek, iedere $b_{(2q+1)n+2p-1}$ vermenigvuldigd worden (voor willekeurige λ) met $\lambda^{(2q+1)n+2p-1}$, mits dan tevens iedere $B_{2qn+2p-1}$ worde vermenigvuldigd, thans evenwel niet met $\lambda^{2qn+2p-1}$, maar met λ^{2qn+2p}; later, bijv. voor de bij $n=1$ en bij $n=2$ behoorende getallencoëfficiënten b, kan deze opmerking van dienst zijn. Eindelijk komt, op dezelfde wijze als (5′) uit (4′), nog uit (4″), maar door daarvoor met $(-)^q n$ te vermenigvuldigen, de gewijzigde vorm:

(zie (**B**) op de uitslaande bladz.).

$$
\ldots{}^{-1} =
$$

$$
\begin{array}{ccc|l}
\ldots & 0 & 0 & ,\ldots(5') \\
\ldots & 0 & 0 & \\
\ldots & 0 & 0 & \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \\
\ldots & \ldots3)n+2p-1 \choose n-1\Big)\frac{b_{n-1}}{1} & 0 & \\
\ldots & \ldots1)n+2p-1 \choose 3n-1\Big)\frac{b_{3n-1}}{3} & \binom{(2q-1)n+2p-1}{n-1}\frac{b_{n-1}}{1} & \\
\ldots & \ldots1)n+2p-1 \choose 5n-1\Big)\frac{b_{5n-1}}{5} & \binom{(2q+1)n+2p-1}{3n-1}\frac{b_{3n-1}}{3} &
\end{array}
$$

$$
\ldots{}^{1} =
$$

$$
\begin{array}{ccc|l}
\ldots & 0 & 0 & \ldots(5'') \\
\ldots & 0 & 0 & \\
\ldots & 0 & 0 & \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \\
\ldots & \binom{(2q-3)n+2p}{n}b_{n-1} & 0 & \\
\ldots & \binom{(2q-1)n+2p}{3n}b_{3n-1} & \binom{(2q-1)n+2p}{n}b_{n-1} & \\
\ldots & \binom{(2q+1)n+2p}{5n}b_{5n-1} & \binom{(2q+1)n+2p}{3n}b_{3n-1} &
\end{array}
$$

Ook bij deze formulen (5') en (5") is de aanwijzing herhaald, dat alleen als zij voor $p = 0$ worden toegepast, vóór het derde lid het teeken — genomen moet worden.

Zooals gezegd, om van (4') of (4"), of ook van (5') of (5") gebruik te kunnen maken voor de werkelijke berekening der Bernoulliaansche coëfficiënten, komt alles aan op de kennis der getallenwaarden van de in (1') optredende coëfficiënten b. Om deze te bepalen zou men bijv. als volgt in de eerste plaats formulen kunnen opmaken waardoor het product der sinussen van eenig aantal willekeurige bogen of hoeken wordt uitgedrukt in de sinussen of in de cosinussen van de algebraïsche sommen dezer bogen; en daarna formulen waardoor de overeenkomstige sommen van deze laatste sinussen of cosinussen achtervolgens worden herleid tot die voor een kleiner aantal bogen. Stellende namelijk

$$\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{2} + \text{enz.} + \frac{x_n}{2} = \sum_1^n {}^k \frac{x_k}{2} = X, \text{ heeft men}$$

$$\prod_1^n {}^k \left(2\,i\,sin\frac{x_k}{2}\right) = \prod_1^n {}^k \left(e^{\frac{ix_k}{2}} - e^{-\frac{ix_k}{2}}\right) =$$

$$= \left\{e^{iX} + (-)^n e^{-iX}\right\} - \sum \left\{e^{i(X-x_1)} + (-)^n e^{-i(X-x_1)}\right\} +$$

$$+ \sum \left\{e^{i(X-x_1-x_2)} + (-)^n e^{-i(X-x_1-x_2)}\right\} - \text{enz.},$$

waarin, de Σ-teekens betrekking hebbende op alle combinatiën van de n bogen x, genomen 1 aan 1, 2 aan 2, enz., $\frac{n-1}{2}$ aan $\frac{n-1}{2}$ of wel $\frac{n}{2}$ aan $\frac{n}{2}$, de laatste term is, voor n oneven: $+ (-)^{\frac{n-1}{2}} \sum \left\{e^{i(X-x_1-x_2-\text{enz.}-x_{\frac{n-1}{2}})} + \right.$ $\left. +(-)^n e^{-i(X-x_1-x_2-\text{enz.}-x_{\frac{n-1}{2}})}\right\}$, daarentegen voor n even:

$$+(-)^{\frac{n}{2}}.\frac{1}{2}\sum\left\{e^{i(X-x_1-x_2-\text{enz.}-x_{\frac{n}{2}})}+(-)^n e^{-i(X-x_1-x_2-\text{enz.}-x_{\frac{n}{2}})}\right\},$$

met voorvoeging in dit laatste geval van den getallencoëfficiënt $\frac{1}{2}$, omdat anders, terwijl in het uitgewerkte product eene zelfde magt van e slechts éénmaal voorkomt, deze volledige term wegens $-(X-x_1-x_2-\text{enz.}-x_{\frac{n}{2}}) =$ $= +(X-x_{\frac{n}{2}+1}-x_{\frac{n}{2}+2}-\text{enz.}-x_n)$ telkens zulk eene magt in wezenlijkheid tweemaal zou bevatten.

Voor n oneven heeft men dus, deelende door $2\,i$,

$$(-)^{\frac{n-1}{2}}\,2^{n-1}\prod_1^n{}_k\, sin\,\frac{x_k}{2} =$$

$$= sin\,X-\sum sin\,(X-x_1)+\sum sin\,(X-x_1-x_2)-\text{enz.}+$$
$$+(-)^{\frac{n-1}{2}}\sum sin\,(X-x_1-x_2-\text{enz.}-x_{\frac{n-1}{2}})\,,\;\ldots\;(8_a)$$

en voor n even, deelende door 2,

$$(-)^{\frac{n}{2}}\,2^{n-1}\prod_1^n{}_k\, sin\,\frac{x_k}{2} =$$

$$= cos\,X-\sum cos\,(X-x_1)+\sum cos\,(X-x_1-x_2)-\text{enz.}+$$
$$+(-)^{\frac{n}{2}}\,\frac{1}{2}\sum cos\,(X-x_1-x_2-\text{enz.}-x_{\frac{n}{2}})\,,\;\ldots\;(8_b)$$

omtrent welke beide formulen (die o. a. ook voorkomen bij J. W. L. GLAISHER in *The London etc. philosophical magazine*, 5th Ser., Vol. 6, n°. 38, Nov. 1878, pag. 335—337) in het voorbijgaan het volgende moge worden aangestipt: vooreerst dat zij door een oneven aantal der bogen x gelijk π te onderstellen, wederkeerig in elkander overgaan; ten tweede dat zij door alle bogen x te vervangen door hunne supplementen, de beide overeenkomstige voor n oneven en voor n even geldende formulen voor de cosinussen-producten opleve-

ren, die trouwens ook regtstreeks uit de ontwikkeling van $\prod_{1}^{n}{}_{k}\left(2\cos\frac{x_k}{2}\right) = \prod_{1}^{n}{}_{k}\left(e^{\frac{ix_k}{2}} + e^{-\frac{ix_k}{2}}\right)$ zouden voortvloeijen, of ook bijv. kunnen bewezen worden zooals bij A. DESBOVES, *Questions de trigonométrie rectiligne*, 2e Ed., 1877, pag. 93—97, n⁰. 83; ten derde dat de vier gezamenlijke formulen, door daarin alle bogen x onderling gelijk te nemen, als bijzondere gevallen bevatten de bekende formulen voor de ontwikkeling der magten van sinus en van cosinus volgens de sinussen en de cosinussen der veelvouden van den boog. (zie deze o. a. bij G. J. VERDAM, *Summarium der goniometrie* enz., 3e druk, 1858, pag. 41, form. 105 tot 110.)

Wil men nu ieder der voor de sinussen-producten gevonden formulen (8_a) en (8_b) regtstreeks voor de ontwikkeling van het eerste lid van $(1')$ gebruiken, dan dient men thans de tot nog toe aldaar overbodige onderscheiding tusschen de gevallen van n oneven en n even te gaan maken. Is n oneven, dan kan men in het genoemde eerste lid telkens als $k = 2k' + 1$ is, substitueren $\sqrt{\omega^k} = -\sqrt{\omega^{n+k}} = -\omega^{\frac{n+1}{2}+k'}$, en telkens als $k = 2\,k'$ is, $\sqrt{\omega^k} = + \omega^{k'}$, waardoor dat lid overgaat in $\cos\frac{\sqrt{x}}{2}\cdot\prod_{0}^{\frac{n-3}{2}}{}_{k'}\sin\left(\frac{-\omega^{\frac{n+1}{2}+k'}\cdot\sqrt{x}}{2}\right)\cdot\prod_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_{k'}\sin\frac{\omega^{k'}\sqrt{x}}{2} =$

$= (-)^{\frac{n-1}{2}}\cos\frac{\sqrt{x}}{2}\cdot\prod_{1}^{n-1}{}_{k}\sin\frac{\omega^{k}\sqrt{x}}{2}$ en het dus gelukt is overal den factor ω^k vóór het wortelteeken te brengen: dit maakt dat, als men voor dit geval in de formule (8_a) neemt $x_1 = \pi + \sqrt{x}$ en verder voor $k = 2, 3$, enz., n, telkens $x_k = \omega^{k-1}\sqrt{x}$, die formule niet alleen behoudens deeling door 2^{n-1} reeds eene ontwikkeling voor het eerste lid van $(1')$ geeft, maar eene ontwikkeling die wegens $X = \sum_{1}^{n}{}_{k}\frac{x_k}{2} =$

$= \frac{\pi+\sqrt{x}}{2} + \sum_{2}^{n}{}_{k}\frac{\omega^{k-1}\sqrt{x}}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{1-\omega^n}{1-\omega}\cdot\frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{\pi}{2}$ den

eenvoudigen vorm

$$(-)^{\frac{n-1}{2}} 2^{n-1} \cos\frac{\sqrt{x}}{2} . \prod_1^{n-1} {}_k \sin\frac{\omega^k\sqrt{x}}{2} =$$

$$= 1 - \sum \cos x_1 + \sum \cos(x_1 + x_2) - \text{enz.} +$$

$$+ (-)^{\frac{n-1}{2}} \sum \cos(x_1 + x_2 + \text{enz.} + x_{\frac{n-1}{2}}) . . \quad (8'_a)$$

aanneemt. Is n daarentegen even, dan kan men om tot het eerste lid van (1') te geraken, in de formule (8_b) wel weder $x_1 = \pi + \sqrt{x}$ en verder voor $k = 2, 3$, enz., n, telkens $x_k = (\pm)^{k-1} \sqrt{\omega^{k-1} x}$ nemen, naar verkiezing overal met het bovenste of overal met het onderste teeken, maar dan

$$\text{wordt } X = \sum_1^n {}_k \frac{x_k}{2} = \frac{\pi + \sqrt{x}}{2} + \sum_2^n {}_k (\pm)^{k-1} \frac{\sqrt{\omega^{k-1} x}}{2} =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{1 - \sqrt{\omega^n}}{1 \mp \sqrt{\omega}} . \frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{x}}{1 \mp \sqrt{\omega}} \text{ afhankelijk van } x$$

zelf, en ofschoon men nu het tweede lid van (8_b) wel zou kunnen schrijven onder den vorm

$$\cos X . \Big\{ 1 - \sum \cos x_1 + \sum \cos(x_1 + x_2) - \text{enz.} +$$

$$+ (-)^{\frac{n}{2}} . \frac{1}{2} \sum \cos(x_1 + x_2 + \text{enz.} + x_{\frac{n}{2}}) \Big\} +$$

$$+ \sin X . \Big\{ - \sum \sin x_1 + \sum \sin(x_1 + x_2) - \text{enz.} +$$

$$+ (-)^{\frac{n}{2}} . \frac{1}{2} \sum \sin(x_1 + x_2 + \text{enz.} + x_{\frac{n}{2}}) \Big\}$$

en dus de berekening zou kunnen verrigten door middel van soortgelijke cosinussen van sommen als zoo even en van overeenkomstige sinussen, zou toch niet alleen de toevoeging van deze sinussen, maar vooral ook de zamengesteldheid van $\cos X$ en van $\sin X$ in dit geval, die berekening in het algemeen vrij bewerkelijk maken. Van daar dat het verkieslijk schijnt zich, wat het regtstreeksch gebruik der formulen (8) betreft,

tot het geval van n oneven te bepalen, en de coëfficiënten b in de ontwikkeling van het eerste lid van (1') daarentegen voor n even op andere, later te bespreken wijze af te leiden uit coëfficiënten voor n oneven.

Overgaande tot de verdere ontwikkeling van ieder der in het tweede lid van ($8'_a$) voorkomende termen, kan men zich daartoe de boven als bijzonder geval $n = 1$ uit de algemeene betrekking (4) afgeleide formule (4_1) volgens GIRARD en NEWTON ten nutte maken, waarin men voor eenig aantal willekeurige grootheden α en voor een willekeurigen coëfficiënt A heeft $a_q = (-)^q A \sum \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_q$ en $s_q = \sum \alpha^q$. Neemt men namelijk voor het tegenwoordige doel in die formule n grootheden α aan, in het algemeen bepaald door $\alpha_k = e^{ix_k} = \cos x_k + i \sin x_k$, en voert men daarbij de notatiën $C_q = \sum \cos(x_1 + x_2 + \text{enz.} + x_q)$, $S_q = \sum \sin(x_1 + x_2 + \text{enz.} + x_q)$, en $c_q = \sum_1^n {}^k \cos q x_k$, $s_q = \sum_1^n {}^k \sin q x_k$ in, (deze laatste alzoo te onderscheiden van s_q in (4_1) zelf), dan heeft men, (4_1) door A deelende, aldaar te vervangen $\frac{a_q}{A}$ door $(-)^q \sum e^{i(x_1 + x_2 + \text{enz.} + x_q)} = (-)^q \sum \{\cos(x_1 + x_2 + \text{enz.} + x_q) + i \sin(x_1 + x_2 + \text{enz.} + x_q)\} = (-)^q (C_q + i S_q)$ en s_q door $\sum_1^n {}^k e^{iqx_k} = \sum_1^n {}^k (\cos q x_k + i \sin q x_k) = c_q + i s_q$, waardoor men na vermenigvuldiging met $(-1)^q$ en vervanging van q door $q-1$ de formule

$$q(C_q + i S_q) = \sum_1^q {}^r (-)^{r-1} (c_r + i s_r)(C_{q-r} + i S_{q-r})$$

verkrijgt, die zich alzoo splitst in de beide herleidingsformulen

$$q\, C_q = \sum_1^q {}^r (-)^{r-1} (c_r C_{q-r} - s_r S_{q-r}) \quad \ldots \quad (9_a)$$

en

$$q\, S_q = \sum_1^q {}^r (-)^{r-1} (c_r S_{q-r} + s_r C_{q-r}), \quad \ldots \quad (9_b)$$

zijnde hierin, blijkens $C_0 + i\,S_0 = \frac{a_0}{A} = 1$, te nemen $C_0 = 1$ en $S_0 = 0$. En door herhaalde toepassing van deze beide laatste formulen — die o. a. door $n = 2$ en $q = 2$ en daarna nog bovendien $x_1 = x_2$ te stellen, ook de grondformulen der goniometrie voor $\cos(x_1 + x_2)$ en $\sin(x_1 + x_2)$ in zich bevatten — is men derhalve in staat de waarden van C_q voor de opvolgende $q = 1, 2$, enz., $\frac{n-1}{2}$, dat zijn juist de termen in het tweede lid van $(8'_a)$, uit te drukken uitsluitend in de sommen c_q en s_q, die in het tegenwoordige geval met het oog op de ontwikkeling van $(1')$ gemakkelijker te berekenen zijn: immers men heeft in dat geval, lettende dat n oneven is en dat de bogen x_k alsdan de boven opgegeven waarden hebben,

$$c_q = \sum_1^n {}_k \cos q\,x_k = \cos q(\pi + \sqrt{x}) + \sum_1^{n-1} {}_k \cos q\,\omega^k \sqrt{x} =$$

$$\left\{\begin{array}{ll} = -2\cos q\sqrt{x} + \sum_0^{n-1} {}_k \cos q\,\omega^k\sqrt{x}, & \text{voor } q \text{ oneven} \\ = \sum_0^{n-1} {}_k \cos q\,\omega^k\sqrt{x}, & \text{voor } q \text{ even} \end{array}\right\} \quad . . (10_a)$$

en $$s_q = \sum_1^n {}_k \sin q\,x_k = \sin q(\pi + \sqrt{x}) + \sum_1^{n-1} {}_k \sin q\,\omega^k\sqrt{x} =$$

$$\left\{\begin{array}{ll} = -2\sin q\sqrt{x} + \sum_0^{n-1} {}_k \sin q\,\omega^k\sqrt{x}, & \text{voor } q \text{ oneven} \\ = \sum_0^{n-1} {}_k \sin q\,\omega^k\sqrt{x}, & \text{voor } q \text{ even} \end{array}\right\} \quad , . (10_b)$$

waarin verder

$$\sum_0^{n-1} {}_k \cos q\,\omega^k\sqrt{x} = \sum_0^{n-1} {}_k \left\{ \sum_0^\infty {}_r (-)^r \frac{q^{2r}\,\omega^{2kr}}{(2r)!} x^r \right\} = \sum_0^\infty {}_r \left\{ (-)^r \frac{q^{2r}}{(2r)!} x^r . \sum_0^{n-1} {}_k \omega^{2kr} \right\}$$

$$= n \sum_0^\infty {}_r (-)^r \frac{q^{2rn}}{(2rn)!} x^{rn} \quad . . . . (1$$

is, omdat namelijk $\sum_0^{n-1}{}_k\, \omega^{2kr}$ steeds gelijk nul, maar alleen wanneer r den vorm rn heeft, gelijk n wordt; en evenzoo is

$$\sum_0^{n-1}{}_k \sin q\,\omega^k \sqrt{x} = \sum_0^{n-1}{}_k \left\{ \sum_0^{\infty}{}_r (-)^r \frac{q^{2r+1}\,\omega^{k(2r+1)}}{(2r+1)!} x^{\frac{2r+1}{2}} \right\} =$$

$$= \sum_0^{\infty}{}_r \left\{ (-)^r \frac{q^{2r+1}}{(2r+1)!} x^{\frac{2r+1}{2}} . \sum_0^{n-1}{}_k \omega^{k(2r+1)} \right\} =$$

$$= (-)^{\frac{n-1}{2}} n \sum_0^{\infty}{}_r (-)^r \frac{q^{(2r+1)n}}{((2r+1)n)!} x^{\frac{(2r+1)n}{2}} \quad \ldots (11_b)$$

Ofschoon nu hiermede de weg is aangewezen om het voor eene willekeurige oneven waarde van n opgemaakte tweede lid van $(8'_a)$ en dan ook dat van $(1')$ werkelijk volgens de opklimmende magten van x ontwikkeld te krijgen, neemt dit niet weg dat reeds bij betrekkelijk kleine n, bijv. bij $n = 7$, als wanneer men in (9) tot $q = \frac{n-1}{2} = 3$ zou moeten gaan, de bewerkingen zeer langwijlig worden en de wet der coëfficiënten b niet zeer eenvoudig. Daarom zullen dan ook in het volgende deze coëfficiënten alleen voor ieder der gevallen $n = 1$ tot en met 6 berekend worden, met dien verstande dat, uithoofde voor $n = 1$, 2 en 3 de ontwikkeling van $(1')$ het gemakkelijkst regtstreeks schijnt te geschieden en uithoofde voor $n = 4$ en 6 de coëfficiënten b het geschiktst volgens de straks te vermelden formule (12) uit die voor $n = 2$ en 3 worden afgeleid, slechts voor $n = 5$ de zoo even omschreven algemeene methode werkelijk zal worden toegepast. Alvorens evenwel tot deze getallenberekeningen voor geheel bepaalde gevallen over te gaan, moge nog met een enkel woord melding worden gemaakt van de mogelijkheid om, wanneer reeds voor eenige door m aangeduide periode de getallencoëfficiënten $b^{(m)}$ op eene of andere wijze bekend zijn geworden, met behulp daarvan de coëfficiënten $b^{(n)}$ voor eene andere willekeurige periode n door terug-

loopende betrekkingen te berekenen. Daartoe toch is de opmerking voldoende dat het quotient van het eerste lid van (1′) door het dubbele eerste lid van (2′), namelijk $\frac{1}{2} \cot \frac{\sqrt{x}}{2}$, onafhankelijk is van den aanwijzer n, zoodat men geregtigd is tot hetzelfde besluit ten opzigte van de tweede leden: en in plaats dus van dit laatste quotient in verband te brengen met de ontwikkeling (3′), zooals boven geschied is om tot de terugloopende betrekking (4′) tusschen de Bernoulliaansche coëfficiënten en de coëfficiënten $b^{(n)}$ onderling te geraken, kan men het voor het tegenwoordige doel ook gelijk stellen aan het overeenkomstige quotient voor eenigen anderen aanwijzer m, dat is men kan de gelijkheid

$$\frac{+\frac{b^{(n)}_{n-1}}{(n-1)!} x^{\frac{n-1}{2}} - \frac{b^{(n)}_{n+1}}{(n+1)!} x^{\frac{n+1}{2}} - \text{enz.}}{+\frac{b^{(n)}_{n-1}}{1.(n-1)!} x^{\frac{n}{2}} - \frac{b^{(n)}_{3n-1}}{3(3n-1)!} x^{\frac{3n}{2}} + \text{enz.}} = \frac{+\frac{b^{(m)}_{m-1}}{(m-1)!} x^{\frac{m-1}{2}} - \frac{b^{(m)}_{m+1}}{(m+1)!} x^{\frac{m+1}{2}}}{+\frac{b^{(m)}_{m-1}}{1.(m-1)!} x^{\frac{m}{2}} - \frac{b^{(m)}_{3m-1}}{3(3m-1)!} x^{\frac{3m}{2}}}$$

nederschrijven die blijkbaar, door in de kruisproducten de coëfficiënten der gelijknamige magten van x in beide leden gelijk te stellen, de bedoelde terugloopende betrekkingen tusschen de reeks der $b^{(m)}$ en die der $b^{(n)}$ onderling zou opleveren. Dat deze betrekkingen evenwel al spoedig, — niet alleen voor de algemeene combinatie (m, n), maar zelfs bijv. voor de meer bijzondere combinatiën $(1, n)$, $(2, n)$ en $(3, n)$, niettegenstaande alsdan de getallencoëfficiënten $b^{(1)}$, $b^{(2)}$ en $b^{(3)}$ weldra zullen blijken zeer eenvoudig te zijn, en evenzeer bijv. voor de bijzondere combinatie $(n-1, n)$, — niet gemakkelijk meer te overzien zullen zijn, noch wat de teekens noch wat de optredende binomiaal-coëfficiënten betreft, valt in het oog: reden waarom zij dan ook hier niet zullen worden uitgeschreven. Alleen moge, zoolang p kleiner dan of hoogstens gelijk aan het kleinste der beide getallen $m-1$ en $n-1$ genomen wordt, de eenvoudige uit de gelijkstelling der coëfficiënten van $x^{\frac{m}{2}} . x^{\frac{n+2p-1}{2}} = x^{\frac{n}{2}} . x^{\frac{m+2p-1}{2}}$ (of, wat hetzelfde

is, uit de eerste toepassing, namelijk die voor $q=0$, van (4')) voortvloeijende betrekking $\frac{b^{(m)}_{m-1}}{(m-1)!}\cdot\frac{b^{(n)}_{n+2p-1}}{(n+2p-1)!}=$ $=\frac{b^{(n)}_{n-1}}{(n-1)!}\cdot\frac{b^{(m)}_{m+2p-1}}{(m+2p-1)!}$ worden opgemerkt, waaruit, omdat hier in ieder lid de eerste factor reeds gelijk $\frac{1}{2}$ gebleken is, $b^{(n)}_{n+2p-1}=\frac{(n+2p-1)!}{(m+2p-1)!}\,b^{(m)}_{m+2p-1}$ en dus bijv. voor $m=n-1$ als bijzonder geval: $b^{(n)}_{n+2p-1}=(n+2p-1)\,b^{(n-1)}_{n+2p-2}$ volgt.

Van meer belang dan deze betrekkingen tusschen $b^{(m)}$ en $b^{(n)}$ is de thans op eenigzins gewijzigde manier te vinden algemeene formule, waardoor men in het geval van een even perioden-aanwijzer n de daarbij behoorende coëfficiënten b regtstreeks kan uitdrukken in de bij den, hetzij even of oneven, perioden-aanwijzer $\frac{n}{2}$ behoorende en door b' aan te duiden coëfficiënten. Daartoe merke men op dat wel steeds, ook voor oneven n, het eerste lid van (1') is te beschouwen als ontstaan uit de vermenigvuldiging van het product van al zijne factoren van oneven rangorde met het product van al zijne factoren van even rangorde, maar dat meer in het bijzonder in het thans bedoelde geval van even n ieder dezer producten, namelijk $\cos\frac{\sqrt{x}}{2}\prod_{1}^{\frac{n}{2}-1}{}_k\sin\frac{\sqrt{(\omega^2)^k x}}{2}$ en $\prod_{0}^{\frac{n}{2}-1}{}_k\sin\frac{\sqrt{(\omega^2)^k(\omega x)}}{2}$, uit een zelfde aantal $\frac{n}{2}$ factoren bestaat en, wat meer is, door toepassing van (1') zelve en van (2') op $\frac{n}{2}$ in plaats van op n zich onmiddellijk in de evenbedoelde coëfficiënten b' laat uitdrukken. Immers vooreerst is het eerstgenoemde product niet anders dan het eerste lid van (1') zelf, wanneer men daarin n vervangt door $\frac{n}{2}$ en dus, gelet op $(\omega^2)^{\frac{n}{2}}=1$, gelijk-

tijdig ω moet vervangen door ω^2; en kan men — wat voor het tegenwoordige doel meer geschikt is — bij deze vervanging het tweede lid van (1') ook zoodanig schrijven dat daarin aan den aanwijzer q, in plaats van alle geheele positieve waarden, achtervolgens slechts alle even waarden 0, 2, 4, enz. tot oneindig gegeven worden, mits dan tevens telkenmale, in plaats van $p = 0$ tot en met $\frac{n}{2} - 1$, daarentegen $p = 0$ tot en met $n - 1$ worde genomen en bij $p = 0$ het teeken $+$, bij $p = 1$ tot $\frac{n}{2} - 1$ het teeken $-$, bij $p = \frac{n}{2}$ weder $-$, bij $p = \frac{n}{2} + 1$ tot $n - 1$ weder $+$ worde gebruikt; zoodat men bij deze opvatting q ook kan vervangen door $2q$ (voor $q = 0, 1, 2$, enz. tot oneindig) of liever nog met het oog op het volgende door $2q - r$ en dus aan (1') toegepast op $\frac{n}{2}$ den vorm

$$\cos\frac{\sqrt{x}}{2}\prod_{1}^{\frac{n}{2}-1}{}_{k}\,\sin\frac{\sqrt{(\omega^2)^k x}}{2} = 2\left(\frac{i}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1}\cdot\sum_{0}^{\infty}{}_{q}(-)^{2q-r}\left\{\sum_{0}^{n-1}{}_{p}\left\{\begin{matrix}(p=0) & + \\ (p=1 \text{ tot } \frac{n}{2}) & - \\ (p=\frac{n}{2}+1 \text{ tot } n-1) & +\end{matrix}\right\}\frac{b'_{(4q-2r+1)\frac{n}{2}+2p-1}}{((4q-2r+1)\frac{n}{2}+2p-1)!}\,x^{\frac{(4q-2r+1)\frac{n}{2}+2p-1}{2}}\right\}$$

kan geven, waarin wél te verstaan, omdat het tweede lid met een term in $x^{\frac{\frac{n}{2}-1}{2}}$ moet beginnen, aan de veranderlijke

r alle geheele positieve waarden zijn toe te kennen die den exponent $\frac{(4q-2r+1)\frac{n}{2}+2p-1}{2} \geqq \frac{\frac{n}{2}-1}{2}$ maken, dat is alle geheele positieve waarden $r \leqq 2q + \frac{p}{\frac{1}{2}n}$. En ten andere komt het tweede bovengenoemde product door in het eerste lid van (2′) toegepast op $\frac{n}{2}$ de willekeurige veranderlijke x te vervangen door ωx, waardoor in het laatste lid de algemeene term $(-)^q x^{\frac{(2q+1)n}{2}}$ overgaat in $(-)^q\left(\omega^{\frac{n}{2}}\right)^{q+\frac{1}{2}} x^{\frac{(2q+1)n}{4}}$, dat is wegens $\omega^{\frac{n}{2}} = -1$ in $+ix^{\frac{(2q+1)n}{4}}$, zoodat men, den aanwijzer q hier vervangende door r, verkrijgt:

$$\prod_{0}^{\frac{n}{2}-1} {}_k \sin\frac{\sqrt{(\omega^2)^k(\omega x)}}{2} = \frac{n}{2} i \left(\frac{i}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1} \sum_{0}^{\infty}{}_r \frac{b'_{(2r+1)\frac{n}{2}-1}}{\left((2r+1)\frac{n}{2}\right)!} x^{\frac{(2r+1)\frac{n}{2}}{2}}.$$

Omdat nu zooals werd opgemerkt het eerste lid van (1′) gelijk is aan het product der eerste leden van de beide laatste vergelijkingen, moet ook de coëfficiënt van den algemeenen term $2\left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} x^{\frac{(2q+1)n+2p-1}{2}}$ in het tweede lid van (1′) gelijk zijn aan n maal de som der coëfficiënten van alle termen van den vorm $\left\{2\left(\frac{i}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1} x^{\frac{(4q-2r+1)\frac{n}{2}+2p-1}{2}}\right\}\left\{\frac{n}{2} i \left(\frac{i}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1} x^{\frac{(2r+1)\frac{n}{2}}{2}}\right\}$ die voor de verschillende toe te laten waarden van de veranderlijke r in de ontwikkeling van het product der tweede leden van deze beide laatste vergelijkingen voorkomen. Schrijft men deze gelijkheid neder, vermenigvuldigt men daarbij tevens met $(-)^q((2q+1)n+2p-1)!$ en merkt men op, voor zoover in (1′) en in de eerste der evenbedoelde vergelijkingen de teekens afhangen van p, dat niet alleen voor $p = 0$, maar

evenzeer voor $p = 1$ tot $\frac{n}{2}$ die teekens onderling gelijk, daarentegen voor $p = \frac{n}{2} + 1$ tot $n - 1$ ongelijk zijn, dan verkrijgt men ten slotte de volgende algemeene verdubbelingsformule ter berekening van de bij n behoorende coëfficiënten b door middel van de bij $\frac{n}{2}$ behoorende coëfficiënten b', namelijk:

$$b_{(2q+1)n+2p-1} = \left\{ \begin{matrix} \left(p=0 \text{ tot } \frac{n}{2}\right) & + \\ \left(p=\frac{n}{2}+1 \text{ tot } n-1\right) & - \end{matrix} \right\} n \sum_{0}^{r \leq 2q+\frac{p}{\frac{1}{2}n}} (-)^{q-r} \binom{(2q+1)n+2p-1}{(2r+1)\frac{n}{2}} b'_{(2r+1)\frac{n}{2}-1} \cdot b'_{(4q-2r+1)\frac{n}{2}+2p-1} \quad \ldots (12)$$

Geheel in denzelfden geest zou men zelfs in het meer algemeene geval waarin de aanwijzer n een willekeurig veelvoud, bijv. het k-voud, is van eenig geheel getal, eene formule kunnen opmaken waardoor de bij n behoorende coëffiënten b worden uitgedrukt in de bij $\frac{n}{k}$ behoorende. Deze algemeene formule zou evenwel een veel meer zamengestelden vorm hebben dan de zoo even voor het geval van $k = 2$ gevondene, terwijl daarentegen, indien men zich bijv. wilde bepalen tot het opmaken van eene dergelijke formule alleen voor de coëfficiënten $b_{(2q+1)n-1}$ voorkomende in de door $p = 0$ aangewezen eerste periodieke groep, en meer in het bijzonder nog voor de twee eerste coëfficiënten, namelijk b_{n-1} en b_{3n-1}, van deze groep, ten einde daarvan ter berekening van B_{2n-1} gebruik te maken in de eerste toepassing ($q = 1$) van ($4''_0$), namelijk $\binom{3n}{n} b_{n-1} B_{2n-1} = 2b_{3n-1}$, — in welk geval men die formule voor $b_{(2q+1)n-1}$ zou kunnen afleiden, zonder ($1'$) noodig te hebben, uit ($2'$)

alleen — alsdan zou blijken dat de voor B_{2n-1} komende formule wederom geene andere is dan die onder determinanten-vorm regtstreeks uit de oplossing van de k eerste toepassingen van $(4''_0)$ op $\frac{n}{k}$ in plaats van op n zelf zou volgen op dezelfde wijze als $(5'')$ is gevolgd uit $(4'')$.

Gaan wij na deze meer algemeene beschouwingen thans zooals gezegd voor de zes allereerste waarden van den perioden-aanwijzer n tot de uitgewerkte berekeningen over.

Voor $n = 1$, als wanneer alleen de waarde $p = 0$ in aanmerking komt, neemt de algemeene vergelijking $(1')$ door het laatste lid voorop te stellen en het eerste lid te ontwikkelen den vorm:

$$2\sum_0^\infty (-)^q \frac{b_{2q}}{(2q)!} x^q = \cos\frac{\sqrt{x}}{2} = \sum_0^\infty (-)^q \frac{x^q}{2^{2q}.(2q)!}$$

aan, zoodat men dan onmiddellijk den coëfficiënt

$$b_{2q} = \frac{1}{2^{2q+1}}$$

heeft. Ofschoon men op grond hiervan voor dit geval de betrekking $(4'')$ bij vermenigvuldiging met 2^{2q+1} onder den vorm

$$\sum_0^q (-)^r \binom{2q+1}{2r} 2^{2r} B_{2r-1} = -(2q+1)$$

zou kunnen gebruiken, is het, juist omdat nu slechts de enkele door $p = 0$ aangeduide groep bestaat die nu de gezamenlijke Bernoulliaansche coëfficiënten omvat, meest eigenaardig de enkele groep van terugloopende betrekkingen onder de voor deze $p = 0$ opgemaakte vormen $(4'_0)$ of $(4''_0)$ te schrijven. Bepaalt men zich bijv. tot den tweeden van deze vormen, stelt men ook daarin $n = 1$ en voor b hunne evengevonden

waarden, en vermenigvuldigt men tegelijkertijd met 2^{2q}, dan geeft deze de betrekking

$$\sum_{1}^{q}{}_r (-)^{r-1} \binom{2q+1}{2r} 2^{2r-1} B_{2r-1} = q \,, \ldots . (4''_0 \text{ voor } n = 1)$$

die dan ook, als men ze niet uit het algemeene geval van eene willekeurige n had willen te voorschijn doen komen, maar zich van den beginne af tot het onderzoek voor $n = 1$ had willen bepalen, dadelijk zou gevonden zijn hetzij door in de ontwikkeling van de identiteit

$$\sin x \,.\, \frac{1}{2} \cot x = \frac{1}{2} \cos x \,, \text{ dat is}$$

$$\left\{\sum_{0}^{\infty}{}_{q-r} (-)^{q-r} \frac{x^{2q-2r+1}}{(2q-2r+1)!}\right\} \left\{\frac{1}{2x} - \sum_{1}^{\infty}{}_r \frac{2^{2r-1} B_{2r-1}}{(2r)!} x^{2r-1}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{0}^{\infty}{}_q (-)^q \frac{x^{2q}}{(2q)!} ,$$

de coëfficiënten van x^{2q} in beide leden onderling gelijk te stellen en de uitkomst met $(-)^q (2q+1)!$ te vermenigvuldigen, hetzij door — wat in wezenlijkheid op hetzelfde nederkomt — in de formule (4_1) van GIRARD en NEWTON, bij vervanging van $q+1$ door q geschreven onder den vorm $\sum_{1}^{q}{}_r a_{q-r}\, s_r = -\, q\, a_q$ en toegepast op de grootheden $\alpha_1 = \frac{1}{\pi^2}$, $\alpha_2 = \frac{1}{(2\pi)^2}$, $\alpha_3 = \frac{1}{(3\pi)^2}$, enz., te substitueren $a_{q-r} = \frac{(-1)^{q-r}}{(2q-2r+1)!}$ (blijkens de ontbinding van de functie $\frac{\sin x}{x}$ in haar oneindig aantal factoren) en $s_r = \frac{2^{2r-1} B_{2r-1}}{(2r)!}$ en de uitkomst met $(-)^{q-1} (2q+1)!$ te vermenigvuldigen.

Hetzij door deze laatste substitutie tevens te verrigten in (5_1) en daarna eene kleine herleiding toe te passen, hetzij door het stelsel der q zoo even gevonden vergelijkingen ($4''_0$ voor

$n = 1$) voor $q = 1$, 2, enz. tot en met q regtstreeks op te lossen ten opzigte van $(-)^{q-1}\, 2^{2q-1}\, B_{2q-1}$, welke oplossing weder zamenhangt met de vroeger ter gelegenheid van (5') enz. besproken mogelijkheid van het invoeren der magten van eenigen factor λ bij b en B, (hier liefst $\lambda = 2$, ten einde alle bovendien verdubbelde coëfficiënten b tot de eenheid te brengen), komt men aanstonds tot de volgende determinantenformule van den q^{den} graad:

$$\prod_0^q{}^r (2r+1)\,.\,2^{2q-1}\,B_{2q-1} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \binom{3}{2} & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 2 & \binom{5}{2} & \binom{5}{4} & 0 & \vdots & 0 \\ 3 & \binom{7}{2} & \binom{7}{4} & \binom{7}{6} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q-1 & \binom{2q-1}{2} & \binom{2q-1}{4} & \binom{2q-1}{6} & \vdots & \binom{2q-1}{2q-2} \\ q & \binom{2q+1}{2} & \binom{2q+1}{4} & \binom{2q+1}{6} & \vdots & \binom{2q+1}{2q-2} \end{vmatrix}, \quad (5_0'' \text{ voor } n = 1)$$

die alleen een klein verschil in vorm vertoont met de door H. NÄGELSBACH, *Zur independenten Darstellung der Bernoullischen Zahlen*, in SCHLÖMILCH's *Zeitschrift für Mathematik etc.*, 19er Jahrg., 1874, pag. 229, formule (42), gegeven oplossing van zijne op geheel andere wijze verkregen formule (34) (zie ook GÜNTHER, *Determinanten-Theorie*, pag. 127—130). Door de tweede kolom te verminderen met driemaal de eerste, vereenvoudigt zich de vorenstaande formule wegens $\binom{2q+1}{2} - 3q = 2^2\binom{q}{2}$ nog tot de volgende van den $(q-1)^{en}$ graad, namelijk:

$$\prod_{0}^{q} {}^{r}(2r+1) \, . \, 2^{2q-3} B_{2q-1} =$$

$$= \left| \begin{array}{cccccc} \binom{2}{2} & \binom{5}{4} & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ \binom{3}{2} & \binom{7}{4} & \binom{7}{6} & 0 & \vdots & 0 \\ \binom{4}{2} & \binom{9}{4} & \binom{9}{6} & \binom{9}{8} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \binom{q-1}{2} & \binom{2q-1}{4} & \binom{2q-1}{6} & \binom{2q-1}{8} & \vdots & \binom{2q-1}{2q-2} \\ \binom{q}{2} & \binom{2q+1}{4} & \binom{2q+1}{6} & \binom{2q+1}{8} & \vdots & \binom{2q+1}{2q-2} \end{array} \right| ;$$

maar verder kan men eene dergelijke bewerking niet herhalen zonder sommige elementen van den komenden lageren determinant een minder eenvoudigen vorm te zien aannemen.

Ofschoon niet regtstreeks uit de toepassing van de voorgaande algemeene methode voortvloeijende moge, alvorens het geval van $n=1$ te verlaten, bij deze gelegenheid nog in eenige uitweiding worden getreden. In de eerste plaats zij opgemerkt dat nog eene betrekking van nagenoeg denzelfden vorm als ($4''_0$ voor $n=1$) komt door gelijkstelling der coëfficiënten van x^{2q-1} in de ontwikkelde identiteit

$$(1+\cos x) \, . \, \frac{1}{2} \cot x = \frac{1}{2} \, \frac{\cos x + 1 - \sin^2 x}{\sin x} = \frac{1}{2} \cot \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sin x$$

of

$$\left\{ 2 + \sum_{1}^{q-r} {}^{q-r} (-)^{q-r} \frac{x^{2q-2r}}{(2q-2r)!} \right\} \left\{ \frac{1}{2x} - \sum_{1}^{\infty} {}^{r} \frac{2^{2r-1} B_{2r-1}}{(2r)!} x^{2r-1} \right\} =$$

$$= \frac{1}{x} - \sum_{1}^{\infty} {}^{q} \frac{B_{2q-1}}{(2q)!} x^{2q-1} - \frac{1}{2} \sum_{1}^{\infty} {}^{q} (-)^{q-1} \frac{{}^{2q-1}}{(2q-1)!} ;$$

de bedoelde betrekking namelijk, waarvoor men na eene kleine herleiding vindt

$$\sum_{1}^{q-1}{}_r(-)^{r-1}\binom{2q}{2r}2^{2r-1}B_{2r-1}+(-)^{q-1}(2^{2q}-1)B_{2q-1}=\frac{2q-1}{2},$$

is dezelfde die bij NÄGELSBACH voorkomt op pag. 228 als formule (35). Maar van meer belang, in zooverre men dan terugloopende betrekkingen aantreft waarin ieder der opvolgende Bernoulliaansche coëfficiënten is ontdaan van de in beide vóorgaande betrekkingen telkens daarbij voorkomende gelijknamige magt van het getal 2, is de opmerking dat op dezelfde wijze als thans ($5''_0$) uit ($4''_0$) is afgeleid, eene nog eenvoudiger determinantenformule van den q^{den} graad te vinden is uit de terugloopende betrekking die o. a. dadelijk te. voorschijn komt door in de ontwikkelde identiteit

$$sin\, x \,.\, \frac{1}{2}\, cot\, \frac{x}{2} = \frac{1}{2}\,(1 + cos\, x) \text{ of}$$

$$\left\{\sum_{0}^{\infty}{}_{q-r}(-)^{q-r}\frac{x^{2q-2r+1}}{(2q-2r+1)!}\right\}\left\{\frac{1}{x}-\sum_{1}^{\infty}{}_r\frac{B_{2r-1}}{(2r)!}x^{2r-1}\right\}=$$

$$=1+\frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty}{}_q(-)^q\frac{x^{2q}}{(2q)!}$$

de wederzijds gelijkgestelde coëfficiënten van x^{2q} met $(-)^q\,(2q+1)!$ te vermenigvuldigen, namelijk

$$\sum_{1}^{q}{}_r(-)^{r-1}\binom{2q+1}{2r}B_{2r-1}=\frac{2q-1}{2} \quad \ldots\ldots (4^*)$$

Deze terugloopende betrekking — voorzeker wel eene der eenvoudigste onder degenen die alle opvolgende Bernoulliaansche coëfficiënten bevatten — is geene andere dan die men veelal (bijv. door G. S. KLÜGEL, *Mathematisches Wörterbuch*, 1e Abth., 1er Theil, 1803, pag. 253, en *Supplemente*, 1e Abth., 1833, pag. 55—80; door S. F. LACROIX, *Calcul différentiel et calcul intégral*, 2e Ed., T. 3, 1819, pag. 84; door R. LOBATTO, *Integraal-rekening*, 1852, pag. 357, noot) opgegeven vindt als het eerst door A. DE MOIVRE, *Miscellanea analytica*, 1730, *Supplem.* pag. 6, te zijn opgemerkt; maar komt mij vóór door JAC. BERNOULLI zelf op pag. 97—98 van zijne *Ars conjectandi*,

1713, niet alleen voor de berekening van zijne vijf eerste coëfficiënten te zijn gebruikt, maar in wezenlijkheid reeds in het algemeen te zijn vermeld, zij het ook, evenals trouwens door DE MOIVRE, zonder bewijs. Die betrekking nu geeft:

$$\prod_{0}^{q}{}^{r}(2r+1) \,.\, 2B_{2q-1} = \text{(†)}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \binom{3}{2} & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 3 & \binom{5}{2} & \binom{5}{4} & 0 & \vdots & 0 \\ 5 & \binom{7}{2} & \binom{7}{4} & \binom{7}{6} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2q-3 & \binom{2q-1}{2} & \binom{2q-1}{4} & \binom{2q-1}{6} & \vdots & \binom{2q-1}{2q-2} \\ 2q-1 & \binom{2q+1}{2} & \binom{2q+1}{4} & \binom{2q+1}{6} & \vdots & \binom{2q+1}{2q-2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \binom{2}{2} & \binom{5}{4} & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ \binom{4}{2} & \binom{7}{4} & \binom{7}{6} & 0 & \vdots & 0 \\ \binom{6}{2} & \binom{9}{4} & \binom{9}{6} & \binom{9}{8} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \binom{2q-4}{2} & \binom{2q-1}{4} & \binom{2q-1}{6} & \binom{2q-1}{8} & \vdots & \binom{2q-1}{2q-2} \\ \binom{2q-2}{2} & \binom{2q+1}{4} & \binom{2q+1}{6} & \binom{2q+1}{8} & \vdots & \binom{2q+1}{2q-2} \end{vmatrix},$$

waarbij de laatste of $(q-1)^e$ graads-determinant weder kon worden achtergevoegd op grond van $\binom{2q+1}{2} - 3(2q-1) = \binom{2q-2}{2}$, en welke beide determinanten zich van de beide vorigen alleen onderscheiden in de eerste kolommen, terwijl thans in het eerste lid staat de enkele factor 2 in plaats van 2^{2q-1} of 2^{2q-3} van zoo even. Gaat men verder op overeenkomstige wijze te werk met de identiteit

$$(1 - \cos x) \,.\, \frac{1}{2} \cot \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \sin x \text{ of}$$

$$\left\{ \sum_{0}^{\infty}{}^{q-r} (-)^{q-r} \frac{x^{2q-2r+2}}{(2q-2r+2)!} \right\} \left\{ \frac{1}{x} - \sum_{1}^{\infty}{}^{r} \frac{B_{2r-1}}{(2r)!} x^{2r-1} \right\} = \frac{1}{2} \sum_{0}^{\infty}{}^{q} (-)^{q} \frac{x^{2q+1}}{(2q+1)!}$$

dan geeft deze de volgende terugloopende betrekking — dezelfde trouwens die zou verkregen zijn indien men de in den aanhef verworpen toepassing van de algemeene methode op

(†) Alleen om ruimte te sparen zijn hier, en verder in eenige dergelijke gevallen, de determinanten in kleiner type afgedrukt.

de functie $-\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}$ in plaats van op $f(x) = -\dfrac{\cot\frac{\sqrt{x}}{2}}{4\sqrt{x}}$ werkelijk, en wél voor $n = 2$, had uitgevoerd en daartoe had geschreven $-\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2} = -\frac{1}{2}\dfrac{\cos\frac{x}{2}\sin\left(-\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}\sin\left(-\frac{x}{2}\right)}$, — namelijk

$$\sum_{1}^{q}{}_{r}\,(-)^{r-1}\binom{2q+2}{2r}B_{2r-1} = q\,, \quad \ldots\ldots \quad (4^{**})$$

waaruit

$$\prod_{0}^{q}{}_{r}(2r+1)\,.\,((q+1)!)\,B_{2q-1} =$$

$$\begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ q-1 \\ q \end{array}\begin{vmatrix} \binom{4}{2} & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ \binom{6}{2} & \binom{6}{4} & 0 & \vdots & 0 \\ \binom{8}{2} & \binom{8}{4} & \binom{8}{6} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \binom{2q}{2} & \binom{2q}{4} & \binom{2q}{6} & \vdots & \binom{2q}{2q-2} \\ \binom{2q+2}{2} & \binom{2q+2}{4} & \binom{2q+2}{6} & \vdots & \binom{2q+2}{2q-2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \binom{3}{2} & \binom{6}{4} & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ \binom{5}{2} & \binom{8}{4} & \binom{8}{6} & 0 & \vdots & 0 \\ \binom{7}{2} & \binom{10}{4} & \binom{10}{6} & \binom{10}{8} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \binom{2q-3}{2} & \binom{2q}{4} & \binom{2q}{6} & \binom{2q}{8} & \vdots & \binom{2q}{2q-2} \\ \binom{2q-1}{2} & \binom{2q+2}{4} & \binom{2q+2}{6} & \binom{2q+2}{8} & \vdots & \binom{2q+2}{2q-2} \end{vmatrix},$$

zijnde de laatste of verlaagde determinant weder verkregen op grond van $\binom{2q+2}{2} - 6q = \binom{2q-1}{2}$. En trekt men eindelijk van de terugloopende betrekking (4**) de voorgaande (4*) af, dan heeft men wegens $\binom{2q+2}{2r} - \binom{2q+1}{2r} = \binom{2q+1}{2r-1}\left\{\frac{2q+2}{2r} - \frac{2q-2r+2}{2r}\right\} = \binom{2q+1}{2r-1}$ onmiddellijk

$$\sum_{1}^{q}{}_{r}\,(-)^{r-1}\binom{2q+1}{2r-1}B_{2r-1} = \frac{1}{2}\,,$$

dat is de eenvoudige door NÄGELSBACH op pag. 229 op ge-

heel andere wijze gevonden formule (41), die trouwens ook, onafhankelijk van (4*) en (4**), regtstreeks te voorschijn komt door slechts de onderling gelijkgestelde coëfficiënten van x^{2q+1} in beide leden der ontwikkelde identiteit

$$(1-\cos x)\cdot\frac{d\left(-\frac{x}{2}\cot\frac{x}{2}\right)}{dx}=2\sin^2\frac{x}{2}\left\{-\frac{1}{2}\left(\cot\frac{x}{2}-\frac{x}{2\sin^2\frac{x}{2}}\right)\right\}=\frac{1}{2}(-\sin x$$

dat is

$$\left\{\sum_0^{\infty}{}_{q-r}(-)^{q-r}\frac{x^{2q-2r+2}}{(2q-2r+2)!}\right\}\left\{\sum_1^{\infty}{}_r\frac{B_{2r-1}}{(2r-1)!}x^{2r-1}\right\}=\frac{1}{2}\sum_1^{\infty}{}_q(-)^{q+1}\frac{x^{2q}}{(2q+}$$

met $(-)^{q+1}(2q+1)!$ te vermenigvuldigen. Deze formule nu geeft de oplossing

$$\prod_0^q{}_r(2r+1)\cdot(q!)\,2\,B_{2q-1}=$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & \binom{3}{1} & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 1 & \binom{5}{1} & \binom{5}{3} & 0 & \vdots & 0 \\ 1 & \binom{7}{1} & \binom{7}{3} & \binom{7}{5} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \binom{2q-1}{1} & \binom{2q-1}{3} & \binom{2q-1}{5} & \vdots & \binom{2q-1}{2q-3} \\ 1 & \binom{2q+1}{1} & \binom{2q+1}{3} & \binom{2q+1}{5} & \vdots & \binom{2q+1}{2q-3} \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 1 & \binom{5}{3} & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 2 & \binom{7}{3} & \binom{7}{5} & 0 & \vdots & 0 \\ 3 & \binom{9}{3} & \binom{9}{5} & \binom{9}{7} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q-2 & \binom{2q-1}{3} & \binom{2q-1}{5} & \binom{2q-1}{7} & \vdots & \binom{2q-}{2q-} \\ q-1 & \binom{2q+1}{3} & \binom{2q+1}{5} & \binom{2q+1}{7} & \vdots & \binom{2q+}{2q-} \end{vmatrix}$$

waarvan de eerste vorm in wezenlijkheid niet onderscheiden is van NÄGELSBACH's formule (45) en zich tot den tweeden vorm laat herleiden op grond van $\binom{2q+1}{1}-3.1=2(q-1)$.

Zoo even is gebruik gemaakt van het differentiaal-quotient van $\left(-\frac{x}{2}\cot\frac{x}{2}\right)$ ten opzigte van x. Gaat men nog op dezelfde wijze te werk met dat van $\left(-\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}\right)$ zelf, dan heeft men:

$$(1 - \cos x) . \frac{d\left(-\frac{1}{2} \cot \frac{x}{2}\right)}{dx} = 2 \sin^2 \frac{x}{2} . \frac{1}{4 \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{2},$$

dat is

$$\left\{ \sum_{0}^{\infty}{}_{q-r} (-)^{q-r} \frac{x^{2q-2r+2}}{(2q-2r+2)!} \right\} \left\{ \frac{1}{x^2} + \sum_{1}^{\infty}{}_{r} \frac{(2r-1)B_{2r-1}}{(2r)!} x^{2r-2} \right\} = \frac{1}{2},$$

gevende door voor $q \overline{\gtrless} 1$ den coëfficiënt van x^{2q} gelijk nul te stellen:

$$\sum_{1}^{q}{}_{r} (-)^{r-1} (2r-1) \binom{2q+2}{2r} B_{2r-1} = 1,$$

eene uitkomst die, evenals de voorgaande gevonden werd door (4*) af te trekken van (4**), ook verkregen wordt door $(2q + 2)$ maal (4*) af te trekken van $(2q + 1)$ maal (4**).

Nog kunnen, door dezelfde formulen (4*) en (4**) op geschikte wijze met elkander in verband te brengen, daaruit zonder veel moeite de opmerkelijke door M. A. STERN, *Beiträge zur Theorie der Bernoulli'schen und Euler'schen Zahlen*, in *Abhandl. der Kön. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 23ter Band, 1878, pag. 7—8, medegedeelde betrekkingen worden afgeleid, die zich van alle overigen van dezelfde soort onderscheiden doordien zij ter berekening van eenigen Bernoulliaanschen coëfficiënt niet teruggloopen over alle voorgaande, maar slechts over een zeker aantal aan den bedoelden onmiddellijk voorafgaande Bernoulliaansche coëfficiënten. Vervangt men namelijk in (4*) den aanwijzer q door $q—l$, dan gaat zij over in

$$\sum_{1}^{q}{}_{r} (-)^{r-1} \binom{2q-2l+1}{2r} B_{2r-1} = \frac{2q-2l-1}{2}, \quad . . \ (4_l^*)$$

waarbij wel te verstaan q als bovengrens voor r bij het Σ-teeken zonder bezwaar onveranderd kon aanblijven omdat, al moet ook deze grens in werkelijkheid $q-l$ worden, toch voor elken door $r \geqq q-l+1$ aangeduiden term de binomiaal-coëfficiënt $\binom{2q-2l+1}{2r}$ wegens $2r > 2q-2l+1$ nul wordt en al dergelijke termen dus reeds daardoor van zelf verdwijnen. Dezelfde vervanging toegepast op (4**) doet deze om dezelfde reden, behoudens alleen dat nu voor $r = q-l+1$ de binomiaal-coëfficiënt $\binom{2q-2l+2}{2r}$ gelijk 1 wordt, overgaan in

$$\sum_{1}^{q} r (-)^{r-1} \binom{2q-2l+2}{2r} B_{2r-1} - (-)^{q-l} B_{2q-2l+1} = \frac{2q-2l}{2} \quad ..(4_l^{**})$$

Stelt men zich nu voor dat, k een willekeurig oneven of even getal zijnde, alle op deze wijze van $l=0$ tot en met $l = \frac{k-1}{2}$ of $\frac{k}{2}$ te verkrijgen $k+1$ betrekkingen in de navolgende orde naast elkander geplaatst worden, namelijk:

$$(4^{**}), (4^{*}), (4_1^{**}), (4_1^{*}), (4_2^{**}), (4_2^{*}), (4_3^{**}) \ldots (4_{\frac{k-1}{2}}^{*}) \text{ of } (4_{\frac{k}{2}}^{**}),$$

waarbij dus zoowel de boven-aanwijzers of zoogenaamde bases van de in de eerste leden bij een zelfden B_{2r-1} voorkomende binomiaal-coëfficiënten alsook de tweede leden zelve eene gewone afdalende rekenkundige reeks vormen, en past men, evenals hierboven de formule (41) van NÄGELSBACH reeds als het verschil van de beide eerste dezer betrekkingen werd opgemaakt, thans meer in het algemeen op alle $k+1$ betrekkingen de bewerking toe waardoor men, bij herhaling iedere volgende van de voorgaande aftrekkende, den eersten term der rij van hare verschillen van de k^{de} orde verkrijgt, dan heeft men volgens eene der hoofdformulen uit de leer der reeksen de betrekking:

$$\sum_{1}^{i}(-)^{r-1}\left\{\binom{2q+2}{2r}-\binom{k}{1}\binom{2q+1}{2r}+\binom{k}{2}\binom{2q}{2r}-\text{enz.}+\right.$$

$$\left.+(-)^{k}\binom{k}{k}\binom{2q-k+2}{2r}\right\}B_{2r-1}+(-)^{q}\left[\binom{k}{2}B_{2q-1}-\right.$$

$$\left.-\binom{k}{4}B_{2q-3}+\binom{k}{6}B_{2q-5}-\text{enz.}+\left\{\begin{matrix}(-)^{\frac{k-1}{2}-1}\binom{k}{k-1}B_{2q-k+2}\\ \text{of}(-)^{\frac{k}{2}-1}\binom{k}{k}B_{2q-k+1}\end{matrix}\right\}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{2q-\binom{k}{1}(2q-1)+\binom{k}{2}(2q-2)-\text{enz.}+(-)^{k}\binom{k}{k}(2q-k)\right\}.$$

Hierin komt, stellende $\Delta\binom{2q+2}{2r}=\binom{2q+2}{2r}-\binom{2q+1}{2r}=$ $=\binom{2q+1}{2r-1}$, de coëfficiënt van $(-)^{r-1}B_{2r-1}$ in den eersten term vóór als $\Delta^{k}\binom{2q+2}{2r}=\Delta^{k-1}\binom{2q+1}{2r-1}=\Delta^{k-2}\binom{2q}{2r-2}=$ $=\text{enz.}=\binom{2q-k+2}{2r-k}$, terwijl het tweede lid als k^{de} verschil eener reeks van de eerste orde steeds gelijk nul, behalve alleen voor $k=1$ gelijk $\frac{1}{2}$ is, zoodat men de evengevonden betrekking ook aldus kan schrijven:

$$\sum(-)^{r-1}\binom{2q-k+2}{2r-k}B_{2r-1}+(-)^{q}\sum_{1}^{q}(-)^{r-1}\binom{k}{2r}B_{2q-2r+1}=\left\{\begin{matrix}(\text{voor }k=1)\frac{1}{2}\\ (\text{voor }k>1)\,0\end{matrix}\right\},$$

(waarin om dezelfde reden als boven weder q als bovengrens van den tweeden term kon worden toegelaten), of beknopter nog, indien men in den eersten term den veranderlijken aanwijzer r door de notatie $q-r+1$ vervangt,

$$\sum_{1}^{i}(-)^{r-1}\left\{\binom{2q-k+2}{2r}-\binom{k}{2r}\right\}B_{2q-2r+1}=\left\{\begin{matrix}(\text{voor }k=1)\;(-)^{q-1}\cdot\frac{1}{2}\\ (\text{voor }k>1)\qquad 0\end{matrix}\right\}.$$

Gaat men thans geheel dezelfde handelwijze nog eens herhalen voor de reeks van $k+1$ betrekkingen (4_i^*) en (4_i^{**}) die men verkrijgt door van de zoo even gebruikte reeks de allereerste betrekking, namelijk (4^{**}), weg te laten, maar daarentegen aan het slot nog eene volgende betrekking $\left(4_{\frac{k+1}{2}}^{**}\right)$ of $\left(4_{\frac{k}{2}}^{*}\right)$ toe te voegen; óf — wat volgens de natuur dezer reeksen en van de daarop toegepaste bewerking op hetzelfde moet nederkomen, maar voor de uitvoering veel gemakkelijker is — vermindert men de laatst gevonden uitkomst met degene waarin zij overgaat bij vervanging van k door $k+1$ en voor wier tweede lid dus in allen gevalle nul moet worden genomen, dan verkrijgt men nog de nagenoeg gelijkvormige:

$$\sum_{1}^{q}(-)^{r-1}\left\{\binom{2q-k+1}{2r-1}+\binom{k}{2r-1}\right\}B_{2q-2r+1}=\begin{cases}(\text{voor } k=1)\ (-)^{q-1}.\\(\text{voor } k>1)\quad 0\end{cases}$$

Dat de twee aldus gevonden betrekkingen werkelijk, uitgaande van eenigen Bernoulliaanschen coëfficiënt B_{2q-1}, niet alle voorgaande coëfficiënten bevatten en dat men ze dus zou kunnen noemen gedeeltelijk of onvolledig of afgebroken terugloopende betrekkingen, is duidelijk tengevolge van het nul worden van eenige der daarin voorkomende binomiaalcoëfficiënten; en dat zij overigens dezelfde zijn als de aangehaalde van STERN, blijkt door slechts in de eerste te vervangen $2q-k+2$ en k door n en m, en in de tweede $2q-k+1$ en k door n en m, en door te letten op het onderscheid in de notatie der Bernoulliaansche coëfficiënten zelve.

Na nog in het voorbijgaan de uit

$$\frac{\sin 2x}{2}\cdot\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1+\cos 2x}{2}+\cos x\right\}$$

voortvloeijende formule

$$\sum_{1}^{q}(-)^{r-1}\binom{2q+1}{2r}2^{2q-2r}B_{2r-1}=\frac{(2q+1)(2^{2q-1}+1)-2^{2q+1}}{2}$$

…meld, kunnen ten slotte van deze op den …ijzer $n = 1$ betrekking hebbende beschouwin… …paalde verbindingen van de boven gevonden …vormen nog andere worden afgeleid. O. a. verdie… …cht de beiden van den q^{den} graad die men verkrijgt …viervoud, óf het dubbel van ($5''_0$ voor $n = 1$) te …met den eersten vorm van (5*), namelijk:

$$\prod_0^q r(2r+1) \,.\, 2\,(2^{2q}-1)\, B_{2q-1} -$$

$$\begin{vmatrix} & \binom{3}{2} & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ \ldots) & \binom{5}{2} & \binom{5}{4} & 0 & \vdots & 0 \\ \ldots 1) & \binom{7}{2} & \binom{7}{4} & \binom{7}{6} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \binom{\ldots -1}{1} & \binom{2q-1}{2} & \binom{2q-1}{4} & \binom{2q-1}{6} & \vdots & \binom{2q-1}{2q-2} \\ \binom{\ldots +1}{1} & \binom{2q+1}{2} & \binom{2q+1}{4} & \binom{2q+1}{6} & \vdots & \binom{2q+1}{2q-2} \end{vmatrix}$$

en $$\prod_0^q r(2r+1) \,.\, 2\,(2^{2q-1}-1)\, B_{2q-1} =$$

$$\begin{vmatrix} \binom{3}{0} & \binom{3}{2} & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ \binom{5}{0} & \binom{5}{2} & \binom{5}{4} & 0 & \vdots & 0 \\ \binom{7}{0} & \binom{7}{2} & \binom{7}{4} & \binom{7}{6} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & \binom{2q-1}{2} & \binom{2q-1}{4} & \binom{2q-1}{6} & \vdots & \binom{2q-1}{2q-2} \\ & \binom{2q+1}{2} & \binom{2q+1}{4} & \binom{2q+1}{6} & \vdots & \binom{2q+1}{2q-2} \end{vmatrix}$$

die evenwel geen van beiden, de eerste wegens $\binom{2q+1}{2}$ — — $\binom{2q+1}{1} = (2q+1)(q-1)$ en de tweede wegens $\binom{2q+1}{2} - 3\binom{2q+1}{0} = (2q+3)(q-1)$, vatbaar zijn om op overeenkomstige wijze als boven tot eenvoudige determinanten van den $(q-1)^{en}$ graad herleid te worden. Gelet op

$$tg\frac{x}{2} = \frac{cos^2\frac{x}{2} - cos\,x}{sin\frac{x}{2}\,cos\frac{x}{2}} = cot\frac{x}{2} - 2\,cot\,x = \sum_0^\infty{}_q \frac{2(2^{2q}-1)B_{2q-1}}{(2q)!}x^{2q-1}$$

en

$$cosec\,x = \frac{cos^2\frac{x}{2} + sin^2\frac{x}{2}}{2\,sin\frac{x}{2}\,cos\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}cot\frac{x}{2} + \frac{1}{2}tg\frac{x}{2} = \sum_0^\infty{}_q \frac{2(2^{2q-1}-1)B_{2q-1}}{(2q)!}x^{2q-1}$$

geeft de eerste dezer determinanten de tangenten-, de tweede de cosecanten-coëfficiënten (vergelijk hiermede ook het aan het slot omtrent deze coëfficiënten aangevoerde). De tweede is dezelfde die onder meer andere dergelijke formulen voorkomt op pag. 12, N⁰. 4, bij J. HAMMOND, *On the relation between* BERNOULLI's *numbers and the binomial coëfficiënts*, in *Proceedings of the London mathematical society*, Vol. 7, 1875—1876, pag. 9—14.

In het geval van $n = 2$ of $\omega^2 - 1 = 0$, als wanneer $\omega = e^{\pi i} = cos\,\pi + i\,sin\,\pi = -1$, dus $\sqrt{\omega} = i$ te nemen is en alleen $p = 0$ en $p = 1$ in aanmerking komen, geeft de algemeene vergelijking (1'):

$$\ldots \Big\} =$$

$$\ldots \sin\frac{(1-i)\sqrt{x}}{2}\Big\} =$$

$$\ldots \frac{\ldots r+1}{\ldots !}\, x^{\frac{2r+1}{2}} =$$

$$\ldots \frac{\ldots)^{q+1}\, x^{\frac{4q+3}{2}}}{\ldots 2^{2q+1}\,(4q+3)\,!}\Big\} ,$$

…on worden bijgeschreven om-
$\pm\, 2i$, de teller $(1+i)^{2r+1}$ —
— $(1-i)(-2i)^r$ in het voor-
$r = 2q$ is, gelijk $2i\;(2i)^{2q} =$
…rden, daarentegen telkens wanneer
$2i)^{2q+1} = (-)^q\, 2^{2q+2}\, i$. En de ge-
…nkomstige coëfficiënten in het eerste
vorenstaande vergelijking doet alzoo
… $= 2$ geldende waarden

$$b_{4q+1} = \frac{1}{2^{2q+1}},$$

$$b_{4q+3} = \frac{1}{2^{2q+2}}$$

…substitutie voor $p = 0$ en voor $p = 1$ in (4″)
…vuldiging met 2^{2q+1} en met 2^{2q+2} geeft de beide
…de betrekkingen:

$$\left.\begin{aligned} &\ldots \binom{4q+2}{4r} 2^{2r} B_{4r-1} = -\frac{4q+2}{2}, \\ &\ldots -)^r \binom{4q+4}{4r+2} 2^{2r+1} B_{4r+1} = \frac{4q+4}{2}, \end{aligned}\right\} \ldots (4'' \text{ voor } n=2)$$

die ook onder den enkelen vorm

$$\sum_{0\text{ of }1}^{q}{}_{r}(-)^{\frac{r}{2}\text{ of }\frac{r+1}{2}}\binom{2q+2}{2r}2^r B_{2r-1}=-\frac{2q+2}{2}$$

zouden zijn zamen te vatten, mits dan hierin voor r alleen óf de opvolgende even óf de opvolgende oneven getallen nemende. Overigens is de eerste van deze betrekkingen volgens ($4''_0$) bij vermenigvuldiging met 2^{2q} ook te vervangen door

$$\sum_{1}^{q}{}_{r}(-)^{r-1}\binom{4q+2}{4r}2^{2r-1}B_{4r-1}=q,$$

terwijl de tweede wel in beide leden door 2 deelbaar is, maar in verband ook met de overeenkomstige formulen voor $n=1$, 3, 4, 5, 6 regelmatigheidshalve onder den voorgestelden vorm is aangehouden.

Deze beide betrekkingen, en wel die voor B_{4r-1} onder den laatst geschreven vorm, kwamen, evenals verschillende der boven voor $n=1$ beschouwde, met eenige wijzigingen in de notatie reeds vóór in eene door mij in de vergadering van 30 September 1876 van de Kon. Akademie van Wetenschappen ingezonden bijdrage, die evenwel niet werd uitgegeven, daar zij kort daarna teruggenomen werd ten einde zooals thans geschiedt het laatste en op de Bernoulliaansche coëfficiënten betrekking hebbende gedeelte daarvan, waarin toen alleen de perioden $n=1$ en $n=2$ waren onderzocht, ook op perioden van hoogere orden uit te breiden. In die bijdrage werden op het voetspoor van het boven voor $n=1$ verrigte o. a. buitendien nog voor $n=2$ uit de herleiding van de identiteiten

$$\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}\pm\frac{i}{2}\cot\frac{ix}{2}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1+\cos x}{\sin x}\pm\frac{i(1+\cos ix)}{\sin ix}\right\}=$$

$$=\frac{2(\sin ix\pm i\sin x)+(1\pm i)\sin(1+i)x-(1\mp i)\sin(1-i)x}{2\{\cos(1-i)x-\cos(1+i)x\}}$$

de beide volgende eenigzins meer zamengestelde terugloopende betrekkingen

$$\sum_0^q (-)^r \binom{4q+2}{4r} 2^{2q-2r} B_{4r-1} = -\frac{4q+2}{4}\{2^{2q}+(-1)^q\}$$

en

$$\sum_0^q (-)^r \binom{4q+4}{4r+2} 2^{2q-2r} B_{4r+1} = \frac{4q+4}{4}\{2^{2q+1}-(-1)^q\}$$

tusschen dezelfde coëfficiënten B_{4r-1} en B_{4r+1} van zoo even afgeleid, betrekkingen die in verband met de beide voorgaande, bijv. door optelling en door aftrekking, nog weder nieuwe opleveren; terwijl er aldaar ten slotte op werd gewezen dat dezelfde behandeling toegepast op de identiteiten

$$\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2} \pm \frac{i}{2}\cot\frac{ix}{2} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\sin x}{1-\cos x} \pm \frac{i\sin ix}{1-\cos ix}\right\} =$$

$$= \frac{2(\sin x \pm i\sin ix) - (1\pm i)\sin(1+i)x - (1\mp i)\sin(1-i)x}{2\{2(1-\cos x-\cos ix)+\cos(1+i)x+\cos(1-i)x\}}$$

betrekkingen van nog meer zamengestelden vorm zou opleveren. Voor deze laatste betrekkingen namelijk vindt men:

$$(-)^r\binom{4q+4}{4r}\{2^{2q-2r+1}+(-1)^{q-r}\}B_{4r-1} = -\frac{4q+4}{4}\{2^{2q+1}+(-1)^q\}$$

en

$$(-)^r\binom{4q+6}{4r+2}\{2^{2q-2r+1}+(-1)^{q-r}\}B_{4r+1} = \frac{4q+6}{4}\{2^{2q+2}+(-1)^q\};$$

zij zijn weder dezelfde die zouden gekomen zijn door voor $n=4$ te werken met $-\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}$ in plaats van voor $n=2$ met

$-\frac{\cot\frac{\sqrt{x}}{2}}{4\sqrt{x}}$, dat wil zeggen door de identiteit

$$-\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}=-\frac{1}{2}\frac{\cos\frac{x}{2}\sin\frac{ix}{2}\sin\left(-\frac{x}{2}\right)\sin\left(-\frac{ix}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}\sin\frac{ix}{2}\sin\left(-\frac{x}{2}\right)\sin\left(-\frac{ix}{2}\right)}=-\frac{1}{2}\,\frac{\sin x(1-\cos ix)}{(1-\cos x)(1-\cos ix)}$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin x-\frac{1}{2}\{\sin(1+i)x+\sin(1-i)x\}}{1-(\cos x+\cos ix)+\frac{1}{2}\{\cos(1+i)x+\cos(1-i)x\}}$$

op te stellen en verder te ontwikkelen; en, lettende op den vrij zamengestelden vorm van de laatst medegedeelde betrekkingen in vergelijking van de beide betrekkingen (4″ voor $n=2$), heeft men vooral hier een sprekend bewijs van het voordeel dat het gebruik der functie $-\frac{\cot\frac{\sqrt{x}}{2}}{4\sqrt{x}}$ in tegenstelling van $-\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}$ oplevert.

Bepaalt men zich dus tot de twee evengenoemde betrekkingen (4″ voor $n=2$) en past men evenals vroeger in het algemeen thans ieder van deze weder achtervolgens toe voor $q=0, 1, 2$, enz. tot en met q, dan kan men uit dit eerste stelsel de onbekende $(-)^q\, 2^{2q}\, B_{4q-1}$ en uit het tweede stelsel de onbekende $(-)^q\, 2^{2q}\, B_{4q+1}$ oplossen; welke oplossingen men ook desverkiezende regtstreeks uit de algemeene oplossing (5″) zou kunnen afschrijven, daarbij denkende aan de aldaar besproken invoering der magten van een factor λ bij b en B, waarvoor dan in dit geval te nemen $\lambda=\sqrt{2}$, ten einde alle coëfficiënten b na voorafgaande vermenigvuldiging met $\sqrt{2}$ tot de eenheid te brengen. Hoe het zij, men verkrijgt op deze wijze voor den algemeenen Bernoulliaanschen coëfficiënt B_{4q-1} van even en B_{4q+1} van oneven rang de volgende onafhankelijke formulen:

$$\prod_0^q {}_r \binom{4r+2}{2} \cdot 2^{2q} B_{4q-1} =$$

$$\left|\begin{array}{cccccc} 1 & \binom{2}{0} & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 3 & \binom{6}{0} & \binom{6}{4} & 0 & \vdots & 0 \\ 5 & \binom{10}{0} & \binom{10}{4} & \binom{10}{8} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ 2q-1 & \binom{4q-2}{0} & \binom{4q-2}{4} & \binom{4q-2}{8} & \vdots & \binom{4q-2}{4q-4} \\ 2q+1 & \binom{4q+2}{0} & \binom{4q+2}{4} & \binom{4q+2}{8} & \vdots & \binom{4q+2}{4q-4} \end{array}\right| = 2 \left|\begin{array}{cccccc} 1 & \binom{6}{4} & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 2 & \binom{10}{4} & \binom{10}{8} & 0 & \vdots & 0 \\ 3 & \binom{14}{4} & \binom{14}{8} & \binom{14}{12} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ q-1 & \binom{4q-2}{4} & \binom{4q-2}{8} & \binom{4q-2}{12} & \vdots & \binom{4q-2}{4q-4} \\ q & \binom{4q+2}{4} & \binom{4q+2}{8} & \binom{4q+2}{12} & \vdots & \binom{4q+2}{4q-4} \end{array}\right|$$

en $$\prod_0^q {}_r \binom{4r+4}{2} \cdot 2^{2q} B_{4q+1} =$$

$$\left|\begin{array}{cccccc} 1 & \binom{4}{2} & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 2 & \binom{8}{2} & \binom{8}{6} & 0 & \vdots & 0 \\ 3 & \binom{12}{2} & \binom{12}{6} & \binom{12}{10} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ q & \binom{4q}{2} & \binom{4q}{6} & \binom{4q}{10} & \vdots & \binom{4q}{4q-2} \\ q+1 & \binom{4q+4}{2} & \binom{4q+4}{6} & \binom{4q+4}{10} & \vdots & \binom{4q+4}{4q-2} \end{array}\right| = 2^4 \left|\begin{array}{cccccc} \binom{2}{2} & \binom{8}{6} & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ \binom{3}{2} & \binom{12}{6} & \binom{12}{10} & 0 & \vdots & 0 \\ \binom{4}{2} & \binom{16}{6} & \binom{16}{10} & \binom{16}{14} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ \binom{q}{2} & \binom{4q}{6} & \binom{4q}{10} & \binom{4q}{14} & \vdots & \binom{4q}{4q-2} \\ \binom{q+1}{2} & \binom{4q+4}{6} & \binom{4q+4}{10} & \binom{4q+4}{14} & \vdots & \binom{4q+4}{4q-2} \end{array}\right|,$$

die ieder eerst als $(q+1)^e$ graads-, maar daarnaast als slechts q^{de} graads-determinant zijn nedergeschreven, welk laatste mogelijk was, voor B_{4q-1} hetzij door te letten op $\binom{4q+2}{0} - (2q+1) = -2(q)$, hetzij door, wat op hetzelfde nederkomt, regtstreeks van de boven voor $n=2$ uit $(4''_0)$ gevonden terugloopende betrekking gebruik te maken voor $q = 1, 2$, enz. tot en met q; en voor B_{4q+1} door te letten op $\binom{4q+4}{2} - 6(q+1) = 2^4 \binom{q+1}{2}$.

Overgaande tot het geval van $n=3$ of $\omega^3 - 1 = 0$, waarvoor $p = 0$, 1 en 2 te nemen is, herleidt zich de ver-

gelijking (1'), indien men let op $\sqrt{\omega} = -\omega^2$ en $\sqrt{\omega^2} = \omega$ en op $\omega^2 + \omega + 1 = 0$, achtervolgens tot:

$$2\left(\frac{i}{2}\right)^2 \sum_0^\infty {}_q (-)^q \left\{ + \frac{b_{6q+2}}{(6q+2)!} x^{3q+1} - \frac{b_{6q+4}}{(6q+4)!} x^{3q+2} - \frac{b_{6q+6}}{(6q+6)!} x^{3q+3} \right\}$$

$$= \cos\frac{\sqrt{x}}{2} \sin\frac{\sqrt{\omega x}}{2} \sin\frac{\sqrt{\omega^2 x}}{2} = -\cos\frac{\sqrt{x}}{2} \sin\frac{\omega^2\sqrt{x}}{2} \sin\frac{\omega\sqrt{x}}{2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\cos\frac{\sqrt{x}}{2} . \left\{ \cos\frac{(\omega-\omega^2)\sqrt{x}}{2} - \cos\frac{\sqrt{x}}{2} \right\} =$$

$$= -\frac{1}{4}\left\{ \cos\frac{(1+\omega-\omega^2)\sqrt{x}}{2} + \cos\frac{(1-\omega+\omega^2)\sqrt{x}}{2} - (1+\cos\sqrt{x}) \right\}$$

$$= \frac{1}{4}\{1 + \cos\sqrt{x} - \cos\omega\sqrt{x} - \cos\omega^2\sqrt{x}\} = \frac{1}{4}\left\{1 + \sum_0^\infty {}_r \frac{1-\omega^{2r}-(\omega^2)^{2r}}{(2r)!}(-x)^r\right.$$

$$= \frac{1}{4}\left\{ \sum_0^\infty {}_q \frac{2(-x)^{3q+1}}{(6q+2)!} + \sum_0^\infty {}_q \frac{2(-x)^{3q+2}}{(6q+4)!} - \sum_0^\infty {}_q \frac{(-x)^{3q+3}}{(6q+6)!} \right\},$$

waarin namelijk het laatste lid verkregen is doordien de teller in het voorlaatste lid, dat is $1-\omega^r-\omega^{2r}$, telkens zoowel voor $r = 3q+1$ als voor $r = 3q+2$ gelijk wordt aan $1-\omega-\omega^2 = 2$, daarentegen telkens zoowel voor $r = 0$ als voor $r = 3q+3$ gelijk wordt aan $1-1-1 = -1$. De onderlinge vergelijking van het eerste en het laatste lid leert nu dat in dit geval de coëfficiënten b de zeer eenvoudige waarden

$$b_{6q+2} = 1,$$

$$b_{6q+4} = 1,$$

$$b_{6q+6} = \frac{1}{2}$$

hebben, op grond waarvan de algemeene terugloopende betrekking (4'') achtervolgens voor $p = 0$, $p = 1$, $p = 2$ geeft:

$$\sum_{0}^{q} {}_{r} (-)^{r} \binom{6q+3}{6r} B_{6r-1} = -\frac{6q+3}{3},$$

$$\sum_{0}^{q} {}_{r} (-)^{r} \binom{6q+5}{6r+2} B_{6r+1} = \frac{6q+5}{3},$$

$$\sum_{0}^{q} {}_{r} (-)^{r} \binom{6q+7}{6r+4} B_{6r+3} = \frac{1}{2}\,\frac{6q+7}{3}.$$

dat zijn de drie zelfde betrekkingen — van nog eenvoudiger vorm dan de boven op gelijke wijze voor $n = 1$ en $n = 2$ gevondene — die ik voor $n = 3$ voorloopig reeds zonder bewijs mededeelde in het proces-verbaal der vergadering van 30 November 1878 van de afdeeling Natuurkunde der Kon. Akademie van Wetenschappen; aldaar heeft men namelijk slechts de notatiën s door q en t door r te vervangen en, ten einde liever de thans gebezigde reeds door EULER (*de mirabilibus proprietatibus unciarum, etc.* in *Acta Petropolitana* pro 1781, Pars I, pag. 89) ingevoerde en ook naauwer met den vorm der binomiaal-coëfficiënten zelve overeenstemmende notatie aan te houden, telkens de beide binomiaal-aanwijzers met elkander te verwisselen, om de drie evengevonden betrekkingen te voorschijn te doen komen. Zooals aldaar ook werd opgemerkt, kan de eerste dezer betrekkingen volgens ($4''_0$) weder onder den vorm

$$\sum_{1}^{q} {}_{r} (-)^{r-1} \binom{6q+3}{6r} B_{6r-1} = 2q$$

gebragt worden. En overigens moet, zooals ook bij onderlinge vergelijking van de twee gelijkwaardige algemeene betrekkingen ($4'$) en ($4''$) blijkt, de ter aangehaalde plaats vermelde deeling van de tweede en de derde bovenstaande betrekking opvolgend door $6q + 5$ en door $6q + 7$ in dien zin worden verstaan dat deze deeling in het algemeen slechts kan plaats hebben in algebraïschen vorm, dat is zoolang

men q onbepaald laat; maar werkelijk in geheele getallen slechts dan, wanneer $6q+5$ of $6q+7$ een ondeelbaar getal is.

Eindelijk geeft oplossing volgens ieder der drie betrekkingen, in denzelfden geest als boven eerst in het algemeen en later voor $n=1$ en voor $n=2$ geschied is, de volgende drie onafhankelijke formulen:

$$\prod_0^q r \binom{6r+3}{3} . B_{6q-1} =$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & \binom{3}{0} & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 3 & \binom{9}{0} & \binom{9}{6} & 0 & \vdots & 0 \\ 5 & \binom{15}{0} & \binom{15}{6} & \binom{15}{12} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2q-1 & \binom{6q-3}{0} & \binom{6q-3}{6} & \binom{6q-3}{12} & \vdots & \binom{6q-3}{6q-6} \\ 2q+1 & \binom{6q+3}{0} & \binom{6q+3}{6} & \binom{6q+3}{12} & \vdots & \binom{6q+3}{6q-6} \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & \binom{9}{6} & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 2 & \binom{15}{6} & \binom{15}{12} & 0 & \vdots & 0 \\ 3 & \binom{21}{6} & \binom{21}{12} & \binom{21}{18} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q-1 & \binom{6q-3}{6} & \binom{6q-3}{12} & \binom{6q-3}{18} & \vdots & \binom{6q-\ldots}{6q-\ldots} \\ q & \binom{6q+3}{6} & \binom{6q+3}{12} & \binom{6q+3}{18} & \vdots & \binom{6q\ldots}{6q\ldots} \end{vmatrix}$$

$$\prod_0^q r \binom{6r+5}{3} . B_{6q+1} =$$

$$= \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 5 & \binom{5}{2} & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 11 & \binom{11}{2} & \binom{11}{8} & 0 & \vdots & 0 \\ 17 & \binom{17}{2} & \binom{17}{8} & \binom{17}{14} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 6q-1 & \binom{6q-1}{2} & \binom{6q-1}{8} & \binom{6q-1}{14} & \vdots & \binom{6q-1}{6q-4} \\ 6q+5 & \binom{6q+5}{2} & \binom{6q+5}{8} & \binom{6q+5}{14} & \vdots & \binom{6q+5}{6q-4} \end{vmatrix}$$

$$\text{en} \quad \prod_{0}^{q}{}_{r} \binom{6r+7}{3} . B_{6q+8} =$$

$$= \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 7 & \binom{7}{4} & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 13 & \binom{13}{4} & \binom{13}{10} & 0 & \vdots & 0 \\ 19 & \binom{19}{4} & \binom{19}{10} & \binom{19}{16} & \vdots & 0 \\ \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \vdots & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ 6q+1 & \binom{6q+1}{4} & \binom{6q+1}{10} & \binom{6q+1}{16} & \vdots & \binom{6q+1}{6q-2} \\ 6q+7 & \binom{6q+7}{4} & \binom{6q+7}{10} & \binom{6q+7}{16} & \vdots & \binom{6q+7}{6q-2} \end{vmatrix},$$

waarvan de eerste eene herleiding van den $(q + 1)^{en}$ graads- tot den q^{den} graads-determinant kon ondergaan op grond van $\binom{6q+3}{0} - (2q + 1) = -2\,(q)$, terwijl daarentegen eene dergelijke herleiding voor de tweede en de derde met behoud van een eenvoudigen vorm niet mogelijk is.

Neemt men $n = 4$ of $\omega^4 - 1 = 0$, zoodat dan $\omega = i$ is en de waarden $p = 0,\ 1,\ 2$ en 3 in aanmerking komen, dan gaat de algemeene vergelijking (1') over in:

$$\cos \frac{\sqrt{x}}{2} \prod_{1}^{3}{}_{k} \sin \frac{\sqrt{i^k}\, x}{2} = 2 \left(\frac{i}{2}\right)^3 \sum_{0}^{\infty}{}_{q} (-)^q \left\{ + \frac{b_{8q+3}}{(8q+3)!} x^{\frac{8q+3}{2}} - \right.$$

$$\left. - \frac{b_{8q+5}}{(8q+5)!} x^{\frac{8q+5}{2}} - \frac{b_{8q+7}}{(8q+7)!} x^{\frac{8q+7}{2}} - \frac{b_{8q+9}}{(8q+9)!} x^{\frac{8q+9}{2}} \right\}$$

en levert (4'') de vier volgende terugloopende betrekkingen op:

$$\sum_{0}^{q}{}_{r}(-)^{r}\binom{8q+4}{8r}b_{8q-8r+3}B_{8r-1}=-\frac{8q+4}{4}b_{8q+3}\ ,$$

$$\sum_{0}^{q}{}_{r}(-)^{r}\binom{8q+6}{8r+2}b_{8q-8r+3}B_{8r+1}=\frac{8q+6}{4}b_{8q+5}\ ,$$

$$\sum_{0}^{q}{}_{r}(-)^{r}\binom{8q+8}{8r+4}b_{8q-8r+3}B_{8r+3}=\frac{8q+8}{4}b_{8q+7}\ ,$$

$$\sum_{0}^{q}{}_{r}(-)^{r}\binom{8q+10}{8r+6}b_{8q-8r+3}B_{8r+5}=\frac{8q+10}{4}b_{8q+9}\ ,$$

waarvan de eerste volgens $(4''_0)$ ook onder den vorm:

$$\sum_{1}^{q}{}_{r}(-)^{r-1}\binom{8q+4}{8r}b_{8q-8r+3}B_{8r-1}=2q\,b_{8q+3}$$

kan gebragt worden. Nadat vroeger de algemeene determinanten-oplossingen (5') en (5'') zijn medegedeeld, en nadat de toepassing van deze laatste op de gevallen $n=1$, $n=2$, $n=3$ min of meer uitvoerig is besproken, schijnt het thans minder noodig deze toepassing voor $n=4$ of voor de nog volgende gevallen $n=5$ en $n=6$ weder te herhalen, zoodat voor deze drie gevallen de overeenkomstige determinanten-formulen kortheidshalve niet zullen worden uitgeschreven.

Wat overigens de berekening der getallenwaarden van de tegenwoordige coëfficiënten b betreft, is men, nu de berekening voor $n=2$ is voorafgegaan, thans in de gelegenheid de verdubbelingsformule (12) toe te passen, waarin men op grond van de bij $n=2$ voor b_{4q+1} en b_{4q+3} gevonden waarden slechts heeft te substitueren $b'_{(2r+1)\frac{n}{2}-1}=b'_{4r+1}=\frac{1}{2^{2r+1}}$ en, hetzij p even of oneven is, $b'_{(4q-2r+1)\frac{n}{2}+2p-1}=$ $=b'_{8q-4r+2p+1}=\frac{1}{2^{4q-2r+p+1}}$, om dadelijk te vinden:

$$_{p+3} = \left\{ \begin{matrix} (p=0 \text{ tot } 2)+ \\ (p=3) \quad - \end{matrix} \right\} \frac{1}{2^{4q+p}} \sum_{0}^{\leqq 2q+\frac{p}{2}} {}_r \, (-)^{q-r} \binom{8q+2p+3}{4r+2} \ldots\ldots (12 \text{ voor } n=4)$$

Evenwel, naarmate q grooter wordt, gaat het gebruik van deze formule uithoofde van het toenemend aantal termen in het tweede lid met meer bezwaren gepaard, en het schijnt dus wel de moeite waard te trachten de formule met het oog hierop op geschikte wijze te vervormen.

Ten einde eene dergelijke vervorming eens en vooral dienstbaar te kunnen maken voor al zoodanige gevallen waarin, zooals thans voor $n = 4$ plaats heeft en zooals weldra ook voor $n = 6$ zal blijken, in de formule (12) het product der beide coëfficiënten b' onafhankelijk is van den rangwijzer r en dus vóór het Σ-teeken kan worden gebragt, zal die vervorming thans voor willekeurige even n, daarbij ter bekorting de basis van den binomiaal-coëfficiënt in (12) tijdelijk voorstellende door $s = (2q+1)n + 2p - 1$, verrigt worden

ten aanzien van $\sum_{0}^{\leqq 2q+\frac{p}{\frac{1}{2}n}} {}_r \, (-)^{q-r} \binom{s}{(2r+1)\frac{n}{2}}$. Dit gelukt door

in $\sum_{0}^{\frac{n}{2}-1} {}_k \left(1 + \omega^{\frac{4k+1}{2}}\right)^s = \sum_{0}^{\frac{n}{2}-1} {}_k \left(1 + e^{\frac{(4k+1)\pi i}{n}}\right)^s$, zijnde wegens

$\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ eene identiteit, het eerste lid volgens het binomium, het tweede lid daarentegen goniometrisch te ontwikkelen. Het eerste lid wordt dan achtervolgens gelijk aan

$$\left\{ \sum_{0}^{s} {}_t \binom{s}{t} \omega^{\frac{(4k+1)t}{2}} \right\} = \sum_{0}^{s} {}_t \left\{ \binom{s}{t} \omega^{\frac{t}{2}} \sum_{0}^{\frac{n}{2}-1} {}_k \, \omega^{2kt} \right\} = \sum_{0}^{s} {}_t \binom{s}{t} \cdot \omega^{\frac{t}{2}} \cdot \frac{1-\omega^{nt}}{1-\omega^{2t}} =$$

$$= \frac{n}{2} \left\{ \sum_{0}^{\leqq \frac{s}{n}} {}_r (-)^r \binom{s}{2r \cdot \frac{n}{2}} + i \sum_{0}^{\leqq \frac{s}{n}-\frac{1}{2}} {}_r (-)^r \binom{s}{(2r+1)\frac{n}{2}} \right\},$$

waarin namelijk deze laatste waarde gevonden werd doordien

in de voorlaatste de breuk $\dfrac{1-\omega^{nt}}{1-\omega^{2t}}$ wegens $\omega^{n}=1$ voor iedere t gelijk nul is, behalve alleen wanneer $2t$ zelf een veelvoud van n is, als wanneer die breuk als som van $\dfrac{n}{2}$ alsdan gelijke termen ω^{2kt} of 1 overgaat in $\dfrac{n}{2}$, terwijl men dan tegelijkertijd

$$\text{voor}\quad 2t \left\{\begin{matrix} = 2r\,.\,n \\ =(2r+1)n \end{matrix}\right\} \leqq 2s \text{ heeft } \omega^{\frac{t}{2}} \left\{\begin{matrix} =\left(\omega^{\frac{n}{2}}\right)^{r} = (-1)^{r}\,. \\ =\left(\omega^{\frac{n}{2}}\right)^{r+\frac{1}{2}} = (-)^{r} i\,. \end{matrix}\right.$$

Voor het tweede lid der identiteit kan men schrijven:

$$\sum_{0}^{\frac{n}{2}-1}{}_{k}\, e^{\frac{(4k+1)s\pi i}{2n}} \left(e^{-\frac{(4k+1)\pi i}{2n}} + e^{\frac{(4k+1)\pi i}{2n}}\right)^{s} =$$

$$= \sum_{0}^{\frac{n}{2}-1}{}_{k} \left\{ \cos\frac{(4k+1)s\pi}{2n} + i\sin\frac{(4k+1)s\pi}{2n} \right\} \left(2\cos\frac{(4k+1)\pi}{2n}\right)^{s}.$$

Stelt men nu voor het tegenwoordige doel de coëfficiënten van i in de voor ieder lid verkregen ontwikkeling aan elkander gelijk, neemt men daarbij, $s=(2q+1)n+2p-1$ weder substituerende, in aanmerking dat $\sin\dfrac{(4k+1)s\pi}{2n} =$

$$= \sin\left\{2k(2q+1)\pi + (2q+1)\frac{\pi}{2} + \frac{(4k+1)(2p-1)\pi}{2n}\right\} =$$

$= (-)^{q}\cos\dfrac{(4k+1)(2p-1)\pi}{2n}$ is, voert men ter bekorting de notatie

$$\theta_k = 2\cos\frac{(4k+1)\pi}{2n}$$

in en vermenigvuldigt men tegelijkertijd met $(-1)^{q}$, dan is hiermede bewezen dat

$$\frac{n}{2}\sum_{0}^{\leq 2q+\frac{p}{\frac{1}{2}n}+\frac{n-2}{2n}} {}_r (-)^{q-r} \binom{(2q+1)n+2p-1}{(2r+1)\frac{n}{2}} =$$

$$= \sum_{0}^{\frac{n}{2}-1} {}_k \, . \left(\cos \frac{(4k+1)(2p-1)\pi}{2n} \right) \theta_k^{(2q+1)n+2p-1} \ldots\ldots (13)$$

is, waarin, omdat $\cos\left(n \, Boog \cos \frac{\theta_k}{2}\right) = \cos \frac{(4k+1)\pi}{2} = 0$ is,

$\theta_k^2 \left(k = 0, 1, 2, \text{enz.}, \frac{n}{2}-1\right)$ niet anders zijn dan de wortels van de $\left(\frac{n}{2}\right)^e$ magtsvergelijking in θ^2 die men verkrijgt door de bekende uitdrukking voor den cosinus van het (hier even) n-voud van een boog in functie der magten van den cosinus van den boog zelf gelijk nul te stellen, namelijk (zie ook de Aanteekening aan het slot):

$$\theta^n + n \sum_{1}^{\frac{n}{2}} {}_l \frac{(-)^l}{l} \binom{n-l-1}{l-1} \theta^{n-2l} = 0 \,, \; . \; . \; . \; (14)$$

terwijl overigens bij het gebruik van (13) wél moet worden gelet op het onderscheid tusschen de in haar eerste lid voorkomende bovengrens $r \leq 2q + \frac{p}{\frac{1}{2}n} + \frac{n-2}{2n}$ en de bovengrens $r \leq 2q + \frac{p}{\frac{1}{2}n}$ die men in (12) werkelijk noodig heeft. Dit onderscheid namelijk heeft tengevolge dat, terwijl zoolang $0 \leq p < \frac{n+2}{4}$ genomen wordt beide bovengrenzen in geheele getallen zamenvallen in $2q$, zij daarentegen voor $\frac{n+2}{4} \leq p < \frac{n}{2}$ zijn $2q+1$ en $2q$, zoodat dan de Σ van

(13) gelijk is aan die met bovengrens $r \leqq 2q + \frac{p}{\frac{1}{2}n} = 2q$ vermeerderd met den term voor $r = 2q + 1$, dat is met $(-)^{q+1} \binom{(2q+1)n + 2p-1}{(4q+3)\frac{n}{2}}$; en wederom dat, terwijl zoolang $\frac{n}{2} \leqq p < \frac{3n+2}{4}$ is beide bovengrenzen in geheele getallen zamenvallen in $2q + 1$, zij daarentegen voor $\frac{3n+2}{4} \leqq p \leqq n-1$ zijn $2q + 2$ en $2q + 1$, zoodat dan de Σ van (13) gelijk is aan die met bovengrens $r \leqq 2q + \frac{p}{\frac{1}{2}n} = 2q + 1$ vermeerderd met den term voor $r = 2q + 2$, dat is met $(-)^{q} \binom{(2q+1)n + 2p-1}{(4q+5)\frac{n}{2}}$. Dit waar noodig in acht nemende, is overigens het voordeel dat althans bij groote waarden van q het gebruik van (13) voor de berekening der coëfficiënten b oplevert hierin gelegen dat, terwijl (12) eene sommatie van $2q + 1$ of van $2q + 2$ termen zou vorderen, deze sommatie volgens (13) door eene van slechts $\frac{n}{2}$ termen wordt vervangen. Ook zou men nog wel in het algemeen in het tweede lid van (13) door middel van de zoo even herinnerde uitdrukking voor den cosinus van het (thans oneven) $(2p - 1)$-voud van een boog den factor $\cos (2p-1) \frac{(4k+1)\pi}{2n}$ volgens de magten van θ_k, en daarmede dit tweede lid zelf volgens de sommen van gelijknamige magten van alle $\frac{n}{2}$ wortels θ_k^2 van (14) kunnen ontwikkelen; maar deze ontwikkeling, waardoor dit tweede lid, behoudens voor $p = 0$ den vorm $\frac{1}{2} \sum_{0}^{\frac{n}{2}-1} {}_k\, \theta_k^{(2q+1)n}$ en voor

$p = 1$ den vorm $\frac{1}{2}\sum_{0}^{\frac{n}{2}-1} k\, \theta_k^{(2q+1)n+2}$, overigens een meer zamengestelden vorm zou aannemen, kan hier te meer achterwege blijven omdat toch slechts de toepassingen op $n = 4$ en $n = 6$ beoogd worden en in deze beide gevallen andere geschikte herleidingen regtstreeks mogelijk zullen blijken.

Tot zoover dus voor een willekeurigen even periodenaanwijzer n. Thans meer in het bijzonder terugkeerende tot het in behandeling zijnde geval van $n = 4$, als wanneer voor $p = 0$, 1, 2 en 3 de bovengrenzen in (12 voor $n = 4$) en in het eerste lid van (13) steeds dezelfde zijn, heeft de substitutie van deze laatste formule in de eerste tot uitkomst:

$$b_{8q+2p+3} = \left\{ \begin{matrix} (p=0 \text{ tot } 2)+ \\ (p=3) \quad - \end{matrix} \right\} \frac{1}{2^{4q+p+1}} \left\{ \left(\cos \frac{(2p-1)\pi}{8} \right) \theta_0^{8q+2p+3} + \right.$$
$$\left. + \left(\cos \frac{5(2p-1)\pi}{8} \right) \theta_1^{8q+2p+3} \right\},$$

waarin de vierkanten van

$$\theta_0 = 2 \cos \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} \left(1 + \cos \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{(2+\sqrt{2})}$$

en $\theta_1 = 2 \cos \frac{5\pi}{8} = -\sqrt{2} \left(1 + \cos \frac{5\pi}{4} \right) = -\sqrt{(2-\sqrt{2})}$

de beide wortels zijn van

$$\theta^4 - 4\theta^2 + 2 = 0, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (14 \text{ voor } n = 4)$$

terwijl in het tweede lid de beide cosinussen voor $p = 0$ tot waarde hebben $\frac{\theta_0}{2}$ en $\frac{\theta_1}{2}$; voor $p = 1$, $\frac{\theta_0}{2}$ en $\frac{\theta_1}{2}$; voor $p = 2$, $-\frac{\theta_1}{2}$ en $\frac{\theta_0}{2}$; voor $p = 3$, $\frac{\theta_1}{2}$ en $-\frac{\theta_0}{2}$; zoodat men, deze waarden substituerende en lettende op $\theta_0 \theta_1 = -\sqrt{2}$, zou hebben ter onafhankelijke berekening van b de vier eenvoudige formulen

$$b_{8q+3}=\frac{\theta_0^{8q+4}+\theta_1^{8q+4}}{2^{4q+2}},\quad b_{8q+5}=\frac{\theta_0^{8q+6}+\theta_1^{8q+6}}{2^{4q+3}},$$

$$b_{8q+7}=\frac{\left(\theta_0^{8q+6}-\theta_1^{8q+6}\right)\sqrt{2}}{2^{4q+4}},\quad b_{8q+9}=\frac{\left(\theta_0^{8q+8}-\theta_1^{8q+8}\right)\sqrt{2}}{2^{4q+5}}.$$

Nog gemakkelijker evenwel dan deze formulen zullen voor de getallen-berekening de navolgende terugloopende bevonden worden. Voert men namelijk, ten einde daarbij met zoo klein mogelijke geheele getallen te doen te hebben, naarmate de aanwijzer even of oneven is de notatiën

$$\mu_{2t}=\frac{\theta_0^{4t}+\theta_1^{4t}}{2^{t+1}} \text{ en } \mu_{2t+1}=\frac{\theta_0^{4t+2}+\theta_1^{4t+2}}{2^{t+2}}$$

in, dan vindt men vooreerst, door (14 voor $n=4$) na vermenigvuldiging met θ^{4t-4} of ook met θ^{4t-2} afzonderlijk toe te passen op θ_0 en op θ_1 beiden en telkens de som der beide uitkomsten te nemen, dat deze coëfficiënten μ onderling zamenhangen volgens de twee beurtelings te gebruiken terugloopende betrekkingen

$$\mu_{2t}=4\mu_{2t-1}-\mu_{2t-2}$$

$$\text{en } \mu_{2t+1}=2\mu_{2t}-\mu_{2t-1},$$

die gevoegd bij $\mu_0=\dfrac{\theta_0^0+\theta_1^0}{2}=1$ en $\mu_1=\dfrac{\theta_0^2+\theta_1^2}{2^2}=1$ niet alleen leeren dat al deze coëfficiënten geheele getallen zijn, maar ook in staat stellen ze onmiddellijk uit elkander neder te schrijven, terwijl deze op hunne beurt weder de verlangde coëfficiënten b bepalen door middel van de vier formulen

$$b_{8q+3}=\frac{\mu_{4q+2}}{2^{2q}},\quad b_{8q+5}=\frac{\mu_{4q+3}}{2^{2q}},$$

$$b_{8q+7}=\frac{\mu_{4q+4}-2\mu_{4q+3}}{2^{2q+1}},\quad b_{8q+9}=\frac{\mu_{4q+5}-\mu_{4q+4}}{2^{2q+1}},$$

waarvan de derde gevonden is door te letten op
$\left(\theta_0^{8q+6}-\theta_1^{8q+6}\right)\sqrt{2}=\theta_0^{8q+6}\left(\theta_0^2-2\right)-\theta_1^{8q+6}\left(2-\theta_1^2\right)=$
$=\left(\theta_0^{8q+8}+\theta_1^{8q+8}\right)-2\left(\theta_0^{8q+6}+\theta_1^{8q+6}\right)$, en evenzoo voor de vierde.

Wil men eindelijk nog terugloopende betrekkingen regtstreeks tusschen de coëfficiënten b zelve hebben, dan leidt men daartoe uit de voorgaande zonder moeite de vier volgende, evenwel van minder eenvoudigen vorm, af, namelijk:

$$2\,b_{8q+7} = 2\,b_{8q+5} - b_{8q+8},$$

$$2\,b_{8q+9} = 2\,b_{8q+7} + b_{8q+5},$$

$$2\,b_{8q+11} = 10\,b_{8q+9} - 3\,b_{8q+7},$$

$$6\cdot b_{8q+13} = 10\,b_{8q+11} + b_{8q+9},$$

of, wat de laatste betreft, ten einde te doen zien dat ook hier de getallencoëfficiënt 6 in het eerste lid tot slechts 2 is te herleiden, zij het ook dat dan de in het tweede lid optredende coëfficiënten b niet meer de onmiddellijk aan b van het eerste lid voorafgaande blijven,

$$2\,b_{8q+13} = 17\,b_{8q+9} - 5\,b_{8q+7}.$$

Wordt niet verlangd alle coëfficiënten $b_s = b_{(2q+1)n+2p-1} =$ $= b_{8q+2p+3}$ in geregelde volgorde uit elkander af te leiden, maar wil men ook deze coëfficiënten, evenals de Bernoulliaansche coëfficiënten zelve tot wier berekening zij moeten dienen, door periodieke terugloopende betrekkingen bepalen en wel volgens vier overeenkomstige door $p = 0$, 1, 2 en 3 aangeduide groepen, dan treden daarbij wel is waar grootere getallenfactoren op dan in de zoo even voor b_{8q+7}, b_{8q+9}, b_{8q+11} en b_{8q+13} nedergeschreven formulen, maar heeft men daarentegen het voordeel dat nu éene en dezelfde formule blijkt dienst te kunnen doen in plaats van de onderling verschil-

lende van zoo even. Immers door, de notatie $s = 8q + 2p + 3$ weder invoerende, de boven voor $b_{8q+2p+3}$ gevonden goniometrische formule te schrijven

$$2^{\frac{s-1}{2}} b_s = \left\{ \begin{matrix} (p=0 \text{ tot } 2) + \\ (p=3) \quad - \end{matrix} \right\} \left\{ \left(\cos\frac{(2p-1)\pi}{8} \right) \theta_0^s + \left(\cos\frac{5(2p-1)\pi}{8} \right) \theta_1^s \right\},$$

door hierin voor onveranderde p, maar voor $q-1$ en $q-2$ in plaats van q, s achtervolgens te vervangen door $s-8$ en door $s-16$, en door er op bedacht te zijn dat (14 voor $n = 4$) geeft voor θ^4 als onbekende de vergelijking $(\theta^4 + 2)^2 = 16\,\theta^4$ en dus voor θ^8 de vergelijking $(\theta^8 + 4)^2 = 144\,\theta^8$, zoodat voor willekeurige s steeds de betrekking $\theta^s = 136\,\theta^{s-8} - 16\,\theta^{s-16}$ geldt voor ieder der wortels θ_0 en θ_1 op zich zelf, vindt men dadelijk, onverschillig voor welke der vier waarden van p, de bedoelde algemeene periodieke terugloopende betrekking

$$16\,b_s = 136\,b_{s-8} - b_{s-16},$$

die dus meer in het bijzonder zou kunnen dienen wanneer voor een of ander doel slechts ééne der vier groepen van Bernoulliaansche coëfficiënten $B_{8q+2p-1}$ mogt vereischt worden, als wanneer behalve de steeds noodige b_{8q+3} slechts de overeenkomstige $b_{8q+2p+3}$ bekend zouden behoeven te zijn.

Met deze betrekking tusschen de coëfficiënten b is overigens de algemeene betrekking $\mu_t = 34\,\mu_{t-4} - \mu_{t-8}$ tusschen de coëfficiënten μ gelijkwaardig.

Ten slotte de opmerking dat men deze coëfficiënten μ, in plaats van ze hetzij volgens de evengenoemde betrekking of volgens de twee voor elke drie opvolgende μ boven medegedeelde betrekkingen uit elkander te berekenen, nog wel zoo eenvoudig kan vinden door op grond van de twee laatstbedoelde betrekkingen zelve als nieuwe coëfficiënten in te voeren hetzij het stelsel

$$\nu_{2t-1} = \mu_{2t} - 2\mu_{2t-1} = 2\mu_{2t-1} - \mu_{2t-2} = \frac{(\theta_0^{4t-2} - \theta_1^{4t-2})\sqrt{2}}{2^{t+1}}$$

of liever nog het stelsel

$$\nu_{2t} = \mu_{2t+1} - \mu_{2t} = \mu_{2t} - \mu_{2t-1} = \frac{(\theta_0^{4t} - \theta_1^{4t})\sqrt{2}}{2^{t+2}},$$

welke stelsels dan ieder voor zich wegens $(\theta^4 + 2)^2 = 16\theta^4$ of $\theta^t = 12\theta^{t-4} - 4\theta^{t-8}$ gemakkelijk te berekenen zijn volgens de zoowel voor oneven als voor even t geldende teruglоopende betrekking

$$\nu_t = 6\nu_{t-2} - \nu_{t-4}$$

in verband met de aanvangstermen $(\nu_1 = 1, \nu_3 = 7)$ of $(\nu_0 = 0, \nu_2 = 2)$. Is dus eenmaal $\mu_0 = 1$ bekend, dan volgen hieruit, zonder het stelsel ν_{2t-1} noodig te hebben, alle verdere μ dadelijk door iederen term van het stelsel ν_{2t} tweemaal achtereen als verschil van twee opvolgende μ te gebruiken. Of wil men thans, zonder tusschenkomst van de coëfficiënten μ, onmiddellijk tot de coëfficiënten b zelve besluiten, dan heeft men daartoe

$$b_{8q+3} = \frac{2\nu_{4q+2} - \nu_{4q+1}}{2^{2q}}, \quad b_{8q+5} = \frac{\nu_{4q+4} - \nu_{4q+3}}{2^{2q}},$$

$$b_{8q+7} = \frac{\nu_{4q+3}}{2^{2q+1}}, \quad b_{8q+9} = \frac{\nu_{4q+4}}{2^{2q+1}}.$$

Tusschen drie opvolgende coëfficiënten μ van oneven rangorde, en evenzoo voor even rangorde, bestaat overigens dezelfde betrekking als voor de coëfficiënten ν, namelijk $\mu_t = 6\mu_{t-2} - \mu_{t-4}$; en ook deze zou dus kunnen dienen ter berekening van de opvolgende μ_{2t-1}, waartusschen dan μ_{2t} telkens als gemiddelde is in te vullen.

In het geval van $n = 5$ of $\omega^5 - 1 = 0$, waarvoor de waarden $p = 0, 1, 2, 3$ en 4 in aanmerking komen, geeft de algemeene vergelijking (1')

$$2\left(\frac{i}{2}\right)^4 \sum_0^{\infty}{}_q (-)^q \left\{ \div \frac{b_{10q+4}}{(10q+4)!} x^{5q+2} - \frac{b_{10q+6}}{(10q+6)!} x^{5q+3} - \right.$$

$$\left. - \frac{b_{10q+8}}{(10q+8)!} x^{5q+4} - \frac{b_{10q+10}}{(10q+10)!} x^{5q+5} - \frac{b_{10q+12}}{(10q+12)!} x^{5q+6} \right\} =$$

$$= cos \frac{\sqrt{x}}{2} \prod_1^4{}_k \; sin \frac{\sqrt{\omega^k x}}{2} = cos \frac{\sqrt{x}}{2} \prod_1^4{}_k \; sin \frac{\omega^k \sqrt{x}}{2},$$

waarin namelijk het laatste lid kon worden bijgeschreven op grond van de boven, onmiddellijk vóór de formule $(8'_a)$, voor het geval van willekeurige oneven n gemaakte opmerking; en levert dan (4″) de vijf volgende teruglopende betrekkingen op:

$$\sum_0^q{}_r (-)^r \binom{10q+5}{10r} b_{10q-10r+4} B_{10r-1} = -\frac{10q+5}{5} b_{10q+4},$$

$$\sum_0^q{}_r (-)^r \binom{10q+7}{10r+2} b_{10q-10r+4} B_{10r+1} = \frac{10q+7}{5} b_{10q+6},$$

$$\sum_0^q{}_r (-)^r \binom{10q+9}{10r+4} b_{10q-10r+4} B_{10r+3} = \frac{10q+9}{5} b_{10q+8},$$

$$\sum_0^q{}_r (-)^r \binom{10q+11}{10r+6} b_{10q-10r+4} B_{10r+5} = \frac{10q+11}{5} b_{10q+10},$$

$$\sum_0^q{}_r (-)^r \binom{10q+13}{10r+8} b_{10q-10r+4} B_{10r+7} = \frac{10q+13}{5} b_{10q+12},$$

waarvan de eerste volgens $(4''_0)$ ook te vervangen is door

$$\sum_1^q{}_r (-)^{r-1} \binom{10q+5}{10r} b_{10q-10r+4} B_{10r-1} = 2q\, b_{10q+4}.$$

Wat nu de berekening van de hierin voorkomende getallen-coëfficiënten b betreft, daartoe kan men de zoo even herinnerde, voor oneven n geldende, formule $(8'_a)$, dat is thans

$$2^4 cos \frac{\sqrt{x}}{2} \prod_1^4{}_k \; sin \frac{\omega^k \sqrt{x}}{2} = 1 - \sum cos\, x_1 + \sum cos\,(x_1 + x_2) =$$

$= 1 - C_1 + C_2$, gebruiken in verband met de herleidingsformulen (9_a) en (9_b) die wegens $C_0 = 1$ en $S_0 = 0$ achtervolgens geven: $C_1 = c_1 C_0 - s_1 S_0 = c_1$, $S_1 = c_1 S_0 + s_1 C_0 = s_1$ en $2C_2 = (c_1 C_1 - s_1 S_1) - (c_2 C_0 - s_2 S_0) = (c_1^2 - s_1^2) - c_2$, en in verband ook met de formulen (10_a) en (10_b), gevende

$$c_1 = -2\cos\sqrt{x} + \sum_0^4{}^k \cos\omega^k\sqrt{x}, \quad s_1 = -2\sin\sqrt{x} + \sum_0^4{}^k \sin\omega^k\sqrt{x},$$

(zoodat de twee eerste termen in $c_1^2 - s_1^2$ zijn te vereenigen tot $4(\cos^2\sqrt{x} - \sin^2\sqrt{x}) = 4\cos 2\sqrt{x}$) en $c_2 = \sum_0^4{}^k \cos 2\omega^k\sqrt{x}$, terwijl tevens te letten is op hetgeen (11_a) geeft voor $q = 1$ en $q = 2$, en (11_b) voor $q = 1$. Zoodoende en met 2^3 vermenigvuldigende, vindt men achtervolgens:

$$\sum_0^\infty{}^q (-)^q \left\{ \sum_0^4{}^p \left\{ \begin{matrix} (p=0) & + \\ (p=1 \text{ tot } 4) & - \end{matrix} \right\} \frac{b_{10q+2p+4}}{(10q+2p+4)!} x^{5q+p+2} \right\} =$$

$$= 2^3 \cos\frac{\sqrt{x}}{2} \prod_1^4{}^k \sin\frac{\omega^k\sqrt{x}}{2} = \frac{1 - C_1 + C_2}{2} = \frac{1}{2} - \frac{c_1}{2} + \frac{c_1^2 - s_1^2}{4} - \frac{c_2}{4} =$$

$$= \frac{1}{2} + (\cos\sqrt{x} + \cos 2\sqrt{x}) - \left(\frac{1}{2} + \cos\sqrt{x}\right) \sum_0^4{}^k \cos\omega^k\sqrt{x} + \sin\sqrt{x} \,.\, \sum_0^4{}^k \sin\omega^k\sqrt{x} +$$

$$+ \frac{1}{4}\left(\sum_0^4{}^k \cos\omega^k\sqrt{x}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\sum_0^4{}^k \sin\omega^k\sqrt{x}\right)^2 - \frac{1}{4}\sum_0^4{}^k \cos 2\omega^k\sqrt{x} =$$

$$\frac{1}{2} + \left[(1+1) - \frac{1+2^2}{2!}x + \sum_0^\infty{}^q (-)^q \left\{ \sum_0^4{}^p \left\{ \begin{matrix} (p=0,2,4) + \\ (p=1,3) - \end{matrix} \right\} \frac{1+2^{10q+2p+4}}{(10q+2p+4)!} x^{5q+p+2} \right\}\right] -$$

$$-5\left[\frac{3}{2} - \frac{x}{2!} + \sum_0^\infty{}^{q-r} (-)^{q-r} \left\{ \sum_0^4{}^p \left\{ \begin{matrix} (p=0,2,4) + \\ (p=1,3) - \end{matrix} \right\} \frac{x^{5q-5r+p+2}}{(10q-10r+2p+4)!} \right\}\right]\left[\sum_0^\infty{}^r (-)^r \frac{x^{5r}}{(10r)!}\right] +$$

$$+5\left[\sum_0^\infty{}^{q-r} (-)^{q-r} \left\{ \sum_0^4{}^p \left\{ \begin{matrix} (p=0,2,4) - \\ (p=1,3) + \end{matrix} \right\} \frac{x^{\frac{10q-10r+2p-1}{2}}}{(10q-10r+2p-1)!} \right\}\right]\left[\sum_0^\infty{}^r (-)^r \frac{x^{\frac{10r+5}{2}}}{(10r+5)!}\right] +$$

$$+\frac{25}{4}\left\{\sum_0^\infty{}^r (-)^r \frac{x^{5r}}{(10r)!}\right\}^2 - \frac{25}{4}\left\{\sum_0^\infty{}^r (-)^r \frac{x^{\frac{10r+5}{2}}}{(10r+5)!}\right\}^2 - \frac{5}{4}\left\{1 - \sum_0^\infty{}^q (-)^q \frac{2^{10q+10}}{(10q+10)!} x^{5q+5}\right\},$$

waarin de algemeene term in den eersten factor van den vierden term van het laatste lid onder den eenigzins ongewonen vorm $\dfrac{x^{\frac{10q-10r+2p-1}{2}}}{(10q-10r+2p-1)!}$ geschreven is alleen met het doel om, evenals bij den derden term van dat lid het geval is, bij vermenigvuldiging met den tweeden factor juist den in het eerste lid voorkomenden algemeenen term in x^{5q+p+2} te voorschijn te doen komen; zijnde in verband hiermede nog op te merken dat in den eerstgenoemden algemeenen term de allereerste substitutie $(q-r=0,\ p=0)$, waardoor die term zou worden $\dfrac{x^{-\frac{1}{2}}}{(-1)!}$, niet mag worden toegelaten en de substitutie dus hier bij uitzondering eerst mag beginnen met $(q-r=0,\ p=1)$. Werkt men nu het laatste lid verder uit, dan vindt men gemakkelijk, vooreerst dat daarin werkelijk, zooals het eerste lid laat verwachten, zoowel de term zonder x als de term in x zelf komen te ontbreken; ten tweede dat, voor een oogenblik den bij $p=3$ behoorenden term in x^{5q+5}, die op andere wijze dan alle overigen is zamengesteld, daarlatende, daarentegen voor $p=0,1,2$ en 4 komt door gelijkstelling der coëfficiënten van den algemeenen term in x^{5q+p+2} na vermenigvuldiging met $(-)^q\,(10q+2p+4)!$ de formule

$$\left\{\begin{matrix}(p=0) & + \\ (p=1,2,4) & -\end{matrix}\right\} b_{10q+2p+4} = \left\{\begin{matrix}(p=0,2,4) & + \\ (p=1) & -\end{matrix}\right\} \left\{1 + 2^{10q+2p+4} - 5\sum_{0}^{<q+\frac{2p+4}{10}} {}_r \binom{10q+2p+4}{10r} - 5\sum_{0}^{<q+\frac{2p-1}{10}} {}_r \binom{10q+2p+4}{10r+5}\right\},$$

of, de beide laatste termen onder één gemeenschappelijken vorm zamenvattende,

$$b_{10q+2p+4} = \left\{\begin{matrix}(p=0,1) & + \\ (p=2,4) & -\end{matrix}\right\} \left\{1 + 2^{10q+2p+4} - 5\sum_{0}^{<2q+\frac{2p+4}{5}} {}_r \binom{10q+2p+4}{5r}\right\}; \ldots (1$$

ten derde dat voor $p = 3$ evenzoo komt door gelijkstelling der coëfficiënten van den evenbedoelden uitzonderingsterm in x^{5q+5} de formule

$$b_{10q+10} = -(1 + 2^{10q+10}) + \frac{15}{2} + 5 \sum_{0}^{q}{}_r \binom{10q+10}{10r} +$$

$$+ 5 \sum_{0}^{q}{}_r \binom{10q+10}{10r+5} - \frac{25}{4} \sum_{0}^{q+1}{}_r \binom{10q+10}{10r} - \frac{25}{4} \sum_{0}^{q}{}_r \binom{10q+10}{10r+5} + \frac{5}{4} \cdot 2^{10q+10},$$

of, omdat hier in het tweede lid de derde term $5 \sum_{0}^{q}{}_r \binom{10q+10}{10r} =$

$= 5 \sum_{0}^{q+1}{}_r \binom{10q+10}{10r} - 5$ is, na herleiding

$$b_{10q+10} = -\frac{1}{4} \left\{ 6 + 2^{10q+10} - 5 \sum_{0}^{2q+2}{}_r \binom{10q+10}{5r} \right\} \ldots (15_b)$$

En hiermede zijn dus de bij de vijf verschillende waarden van p behoorende coëfficiënten b gevonden. Evenwel, om dezelfde reden als boven voor het geval van $n = 4$ zullen wij het ook thans niet bij de gevonden vormen laten, maar weder in denzelfden geest eene goniometrische herleiding uitvoeren. Daarbij althans aanvankelijk de zaak wederom voor een willekeurigen, mits nu oneven, perioden-aanwijzer n opvattende en als vroeger de notatie $s = (2q+1)n + 2p - 1$ aannemende, is het thans dienstig van de identiteit $\sum_{0}^{n-1}{}_k (1 + \omega^k)^s =$

$= \sum_{0}^{n-1}{}_k \left(1 + e^{\frac{2k\pi i}{n}}\right)^s$ uit te gaan. Hierin laat zich het eerste lid achtervolgens herleiden tot:

$$\sum_{0}^{n-1}{}_k \left\{ \sum_{0}^{s}{}_t \binom{s}{t} \omega^{kt} \right\} = \sum_{0}^{s}{}_t \left\{ \binom{s}{t} \sum_{0}^{n-1}{}_k \omega^{kt} \right\} = \sum_{0}^{s}{}_t \binom{s}{t} \cdot \frac{1 - \omega^{nt}}{1 - \omega^t} = n \sum_{0}^{\leq \frac{s}{n}}{}_r \binom{s}{rn},$$

zijnde namelijk de laatste waarde gevonden doordien wegens $\omega^n = 1$ de breuk $\frac{1-\omega^{nt}}{1-\omega^t}$ voor iedere waarde van t gelijk nul is, behalve alleen voor $t = rn$, als wanneer die breuk of $\sum_0^{n-1}{}_k \omega^{kt} = \sum_0^{n-1}{}_k 1^{kr} = n$ wordt. Het tweede lid der identiteit neemt, indien men den voor $k = 0$ komenden eersten term 2^s vooropstelt en verder telkens ieder paar bij k en $n-k$ behoorende termen bijeenvoegt, daarbij lettende op $e^{\frac{2(n-k)\pi i}{n}} = e^{-\frac{2k\pi i}{n}}$, den vorm:

$$2^s + \sum_1^{\frac{n-1}{2}}{}_k \left\{\left(1 + e^{\frac{2k\pi i}{n}}\right)^s + \left(1 + e^{-\frac{2k\pi i}{n}}\right)^s\right\} =$$

$$= 2^s + \sum_1^{\frac{n-1}{2}}{}_k \left(e^{\frac{ks\pi i}{n}} + e^{-\frac{ks\pi i}{n}}\right)\left(e^{-\frac{k\pi i}{n}} + e^{\frac{k\pi i}{n}}\right)^s =$$

$$= 2^s + \sum_1^{\frac{n-1}{2}}{}_k \left(2\cos\frac{ks\pi}{n}\right)\left(2\cos\frac{k\pi}{n}\right)^s$$ aan. Voert men nu weder de waarde van s voluit in en neemt men in aanmerking dat daardoor $2\cos\frac{ks\pi}{n} = 2\cos\left\{k(2q+1)\pi + \frac{k(2p-1)\pi}{n}\right\} = (-)^k . 2\cos\frac{k(2p-1)\pi}{n}$ wordt, dan is alzoo bewezen dat voor oneven n steeds

$$n \sum_0^{\leq 2q+1+\frac{2p-1}{n}}{}_r \binom{(2q+1)n + 2p-1}{rn} = 2^{(2q+1)n+2p-1} +$$

$$+ \sum_1^{\frac{n-1}{2}}{}_k (-)^k \left(2\cos\frac{k(2p-1)\pi}{n}\right)\left(2\cos\frac{k\pi}{n}\right)^{(2q+1)n+2p-1} \quad ..(16)$$

is, en dan ziet men reeds in, door het verschil tusschen het eerste lid en den eersten term van het tweede lid te vergelijken met de tweede leden der evengevonden formulen (15_a)

en (15_b), dat indien men, (hetgeen evenwel voor oneven $n > 5$ niet meer het geval is), steeds met formulen van geen anderen dan dezen zelfden vorm te maken had, op deze wijze de mogelijkheid zou bestaan om de coëfficiënten b, volgens die formulen bestaande uit een met q en p steeds toenemend aantal termen, te berekenen als algebraïsche sommen van niet meer dan $1 + \frac{n-1}{2} = \frac{n+1}{2}$ termen. Alvorens nu voor $n = 5$ werkelijk tot deze berekening over te gaan, eerst nog eene aanwijzing hoe de $\frac{n-1}{2}$ daarbij voorkomende goniometrische factoren $2\cos\frac{k\pi}{n}$ in het algemeen te bepalen. Die bepaling schijnt het meest geschikt te kunnen plaats hebben door ze terug te brengen tot die van de $\frac{n-1}{2}$ door

$$\theta_k = 2\cos\frac{(2k+1)\pi}{n}$$

voor te stellen dubbele cosinussen van de beneden π blijvende oneven veelvouden van den boog $\frac{\pi}{n}$ voor $k = 0, 1, 2,$ enz., $\frac{n-3}{2}$, en wél bij voorkeur oneven veelvouden ten einde, — hetgeen bij aanname van even veelvouden niet het geval zou zijn — voor de straks in te voeren coëfficiënten μ geene andere dan positieve waarden te verkrijgen. En werkelijk is het niet moeijelijk de $\left(\frac{n-1}{2}\right)^e$ magtsvergelijking neder te schrijven die al deze θ_k tot wortels heeft: daartoe is de opmerking voldoende dat uit $\frac{n+1}{2} \cdot \frac{(2k+1)\pi}{n} + \frac{n-1}{2} \cdot \frac{(2k+1)\pi}{n} =$ $=(2k+1)\pi$ volgt $\sin\frac{n+1}{2} \cdot \frac{(2k+1)\pi}{n} - \sin\frac{n-1}{2} \cdot \frac{(2k+1)\pi}{n} = 0$, zoodat men door de bekende uitdrukking voor den sinus van het veelvoud van een boog als product van den sinus van den boog zelf en van eene functie der magten van zijn cosinus (zie ook de Aanteekening aan het slot) toe te passen

op het $\left(\frac{n+1}{2}\right)$-voud en op het $\left(\frac{n-1}{2}\right)$-voud, dadelijk voor die vergelijking heeft

$$\sum_{0}^{\frac{n-1}{4}\text{ of }\frac{n-3}{4}} {}_{l}(-)^{l}\binom{\frac{1}{2}(n-1)-l}{l}\theta^{\frac{n-1}{2}-2l}-\sum_{0}^{\frac{n-5}{4}\text{ of }\frac{n-3}{4}} {}_{l}(-)^{l}\binom{\frac{1}{2}(n-3)-l}{l}\theta^{\frac{n-3}{2}-2l}=0,\ldots$$

zijnde hierin de ongelijke eerste of de gelijke tweede bovengrenzen te nemen naarmate $\frac{n+1}{2}$ oneven of even is. In het voorbijgaan zij nog opgemerkt dat wegens $\theta_k = 2\cos\frac{(2k+1)\pi}{n} = -2\cos\frac{(n-2k-1)\pi}{n} = -\left(e^{\frac{(n-2k-1)\pi i}{n}} + e^{-\frac{(n-2k-1)\pi i}{n}}\right) = -\left(\omega^{\frac{n-2k-1}{2}} + \omega^{\frac{n+2k+1}{2}}\right)$ deze vergelijking behoudens omkeering der teekens van alle wortels geene andere is dan die men op de bekende wijze door $\theta = \omega + \frac{1}{\omega}$ te stellen zou verkrijgen als de herleide van de wederkeerige vergelijking $\frac{\omega^n - 1}{\omega - 1} = \sum_{n-1}^{0} {}_{l}\,\omega^{l} = 0$; terwijl bovendien na diezelfde omkeering der teekens het met den eersten-magtsfactor $\theta - 2$ vermenigvuldigde vierkant der vergelijking zou blijken naar behooren geene andere te zijn dan de n^{de} magtsvergelijking in θ die men, — indien het niet zaak geweest was de hier mogelijke verlaging tot den $\left(\frac{n-1}{2}\right)^{en}$ graad dadelijk te bewerkstelligen, — uit $\cos\left(n\,Boog\cos - \frac{\theta_k}{2}\right) = \cos(n-2k-1)\pi = 1$ had kunnen opschrijven in denzelfden trant als (14) hierboven. En wat nu betreft de wijze waarop de $\frac{n-1}{2}$ te bepa-

len waarden van $2\cos\frac{k\pi}{n}$ afhangen van de $\frac{n-1}{2}$ wortels van (16), heeft men dadelijk:

r oneven k: $$2\cos\frac{k\pi}{n} = 2\cos\frac{\left(2\,.\,\frac{k-1}{2}+1\right)\pi}{n} = \theta_{\frac{k-1}{2}}$$

voor even k: $$2\cos\frac{k\pi}{n} = -2\cos\frac{\left(2\,.\,\frac{n-k-1}{2}+1\right)\pi}{n} = -\theta_{\frac{n-k-1}{2}}.$$

Na deze meer algemeene beschouwingen voor willekeurige oneven n thans terugkeerende tot het in behandeling zijnde geval $n = 5$, verkrijgt men door van (16) voor dat geval gebruik te maken ter goniometrische vervorming van (15_a) en (15_b), daarbij lettende dat voor $k = 1$ en voor $k = 2$ volgens het even gevondene $2\cos\frac{\pi}{5} = \theta_0$ en $2\cos\frac{2\pi}{5} = -\theta_1$ is, de beide formulen:

r $p = 0,\ 1,\ 2$ en 4: $b_{10q+2p+4} =$

$$= \left|\begin{matrix}(p=0,1)\ + \\ (p=2,4)\ -\end{matrix}\right\} \left\{1 + \left(2\cos\frac{(2p-1)\pi}{5}\right)\theta_0^{10q+2p+4} - \left(2\cos\frac{2(2p-1)\pi}{5}\right)\theta_1^{10q+2p+4}\right\}$$

voor $p = 3$: $$b_{10q+10} = -\frac{1}{4}\left\{6 - 2\,\theta_0^{10q+10} - 2\,\theta_1^{10q+10}\right\},$$

arin

$$= 2\cos\frac{\pi}{5} = \sqrt{2\left(1+\cos\frac{2\pi}{5}\right)} = \sqrt{\left(2+\text{koorde}\frac{2\pi}{10}\right)} = \sqrt{\left(2+\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\theta_1 = 2\cos\frac{3\pi}{5} = -\text{koorde}\,\frac{2\pi}{10} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

de beide wortels zijn van

$$\theta^2 - \theta - 1 = 0,\ \ldots\ldots\ (17 \text{ voor } n = 5)$$

terwijl in het tweede lid van de eerste dezer formulen de beide dubbele cosinussen voor $p = 0$ tot waarde hebben θ_0 en $-\theta_1$; voor $p = 1$, θ_0 en $-\theta_1$; voor $p = 2$, θ_1 en $-\theta_0$; voor $p = 4$, θ_1 en $-\theta_0$; zoodat men, lettende op $\theta_0\,\theta_1 = -1$ en invoerende de notatie

$$\mu_t = \theta_0^t + \theta_1^t$$

en herstellende de doorgaande volgorde van $p = 0$ tot $p = 4$, vindt ter berekening van de coëfficiënten b de vijf formulen:

$$b_{10q+4} = 1 + \mu_{10q+5}, \qquad b_{10q+6} = 1 + \mu_{10q+7},$$

$$b_{10q+8} = -1 + \mu_{10q+7}, \qquad b_{10q+10} = \frac{-3 + \mu_{10q+10}}{2},$$

$$b_{10q+12} = -1 + \mu_{10q+11}.$$

Die berekening vindt echter, gemakkelijker dan door regtstreeksche bepaling van iederen coëfficiënt μ op zich zelf, plaats door middel van de zeer eenvoudige uit (17 voor $n = 5$) volgende teruglloopende betrekking

$$\mu_t = \mu_{t-1} + \mu_{t-2}$$

die, in verband met $\mu_0 = \theta_0^0 + \theta_1^0 = 2$ en $\mu_1 = \theta_0 + \theta_1 = 1$, in staat stelt alle opvolgende μ dadelijk uit elkander af te schrijven. Zelfs zou men, door op grond daarvan in de formule voor b_{10q+10} in plaats van μ_{10q+10} te schrijven $\mu_{10q+11} - \mu_{10q+9}$, kunnen volstaan met de uitrekening, en dan ook in de later voor $n = 1$ tot en met 6 volgende tabel de opname, alleen van die coëfficiënten μ die oneven aanwijzers hebben, waartoe de uit $(\theta^2 - 1)^2 = \theta^2$ volgende terugloopende betrekking $\mu_t = 3\,\mu_{t-2} - \mu_{t-4}$, gevoegd bij de aanvangstermen $\mu_1 = \theta_0 + \theta_1 = 1$ en $\mu_3 = \theta_0^3 + \theta_1^3 = 4$, zou kunnen dienen: eene handelwijze die evenwel niet boven de zoo even omschrevene te verkiezen schijnt.

Was het, zonder tevens de coëfficiënten b volgens de for-

mulen (15_a) en (15_b) als sommen van binomiaal-coëfficiënten uitgedrukt te willen vinden, alleen om de vijf thans verkregen eindformulen voor deze b te doen geweest, dan had de bewerking, zonder de algemeene herleidingsformulen (9_a) en (9_b) noodig te hebben, eenigzins kunnen worden bekort door van den beginne af de notatiën:

$$-\theta_0 = -2\cos\frac{\pi}{5} = 2\cos\frac{4\pi}{5} = e^{\frac{4\pi i}{5}} + e^{-\frac{4\pi i}{5}} = \omega^2 + \omega^3 =$$
$$= \frac{\omega^3+\omega^4}{\omega} = \frac{\omega^4+1}{\omega^2} = \frac{1+\omega}{\omega^3} = \frac{\omega+\omega^2}{\omega^4}$$

$$\text{en } -\theta_1 = -2\cos\frac{3\pi}{5} = 2\cos\frac{2\pi}{5} = e^{\frac{2\pi i}{5}} + e^{-\frac{2\pi i}{5}} = \omega + \omega^4 =$$
$$= \frac{\omega^2+1}{\omega} = \frac{\omega^3+\omega}{\omega^2} = \frac{\omega^4+\omega^2}{\omega^3} = \frac{1+\omega^3}{\omega^4}$$

als de beide negatief genomen wortels van $\theta^2 - \theta - 1 = 0$ in te voeren, die dus de gelegenheid geven om ieder der bij toepassing van ($8'_a$) voorkomende tien sommen twee aan twee van de wortels $1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4$ van $\omega^5 - 1 = 0$ eenvoudig als producten van deze $-\theta_0$ en $-\theta_1$ met die wortels zelve uit te drukken. Het schijnt intusschen minder noodig de berekening langs dezen weg in bijzonderheden te dezer plaatse nog eens te herhalen.

Het eenvoudige verband $b_{10q+8} = b_{10q+6} - 2$ springt hier in het oog; maar overigens schijnen de verschillende coëfficiënten b onderling geene eenvoudige betrekkingen te vertoonen. Wel is waar zou men ook hier, in denzelfden geest als boven voor $n = 4$, nog wel uit $\theta^2 - \theta - 1 = 0$ de vergelijking $\theta^{20} - 123\,\theta^{10} + 1 = 0$ kunnen afleiden die θ_0^{10} en θ_1^{10} tot wortels heeft, en daaruit eerst de periodieke teruglooopende betrekking $\mu_s = 123\mu_{s-10} - \mu_{s-20}$ en vervolgens de overeenkomstige tusschen b_s, b_{s-10}, b_{s-20} kunnen opmaken: maar dadelijk blijkt dan dat deze laatste althans in zooverre meer zamengesteld is dan de overeenkomstige voor $n = 4$ gevondene, dat zij, in tegenstelling met de dáár geldende een-

vormigheid, drie verschillende vormen aanneemt al naarmate men ze voor coëfficiënten van den vorm b_{10q+4} of b_{10q+6}, dan wel b_{10q+5} of b_{10q+12}, dan wel b_{10q+10}, noodig heeft.

Voor $n=6$ of $\omega^6-1=0$, waarbij dus $p=0,1,2,3,4$ en 5 te gebruiken, geeft de algemeene vergelijking (1'):

$$\cos\frac{\sqrt{x}}{2}\cdot\prod_1^5 k \sin\frac{\sqrt{\omega^k x}}{2}=2\left(\frac{i}{2}\right)^5\sum_0^\infty q(-)^q\left\{+\frac{b_{12q+5}}{(12q+5)!}x^{\frac{12q+5}{2}}-\right.$$

$$-\frac{b_{12q+7}}{(12q+7)!}x^{\frac{12q+7}{2}}-\frac{b_{12q+9}}{(12q+9)!}x^{\frac{12q+9}{2}}-\frac{b_{12q+11}}{(12q+11)!}x^{\frac{12q+11}{2}}-$$

$$\left.-\frac{b_{12q+13}}{(12q+13)!}x^{\frac{12q+13}{2}}-\frac{b_{12q+15}}{(12q+15)!}x^{\frac{12q+15}{2}}\right\},$$

terwijl in (4'') de zes volgende teruglopende betrekkingen bevat zijn:

$$\sum_0^q r(-)^r\binom{12q+6}{12r}b_{12q-12r+5}\,B_{12r-1}=-\frac{12q+6}{6}b_{12q+5},$$

$$\sum_0^q r(-)^r\binom{12q+8}{12r+2}b_{12q-12r+5}\,B_{12r+1}=\frac{12q+8}{6}b_{12q+7},$$

$$\sum_0^q r(-)^r\binom{12q+10}{12r+4}b_{12q-12r+5}\,B_{12r+3}=\frac{12q+10}{6}b_{12q+9},$$

$$\sum_0^q r(-)^r\binom{12q+12}{12r+6}b_{12q-12r+5}\,B_{12r+5}=\frac{12q+12}{6}b_{12q+11},$$

$$\sum_0^q r(-)^r\binom{12q+14}{12r+8}b_{12q-12r+5}\,B_{12r+7}=\frac{12q+14}{6}b_{12q+13},$$

$$\sum_0^q r(-)^r\binom{12q+16}{12r+10}b_{12q-12r+5}\,B_{12r+9}=\frac{12q+16}{6}b_{12q+15},$$

waarvan weder de eerste volgens ($4''_0$) ook te schrijven is onder den vorm:

$$\sum_{1}^{q}{}_{r}(-)^{r-1}\binom{12q+6}{12r} b_{12q-12r+5}\, B_{12r-1} = 2q\, b_{12q+5}.$$

Evenals voor $n=4$ kunnen nu ook weder de hierin voorkomende coëfficiënten b gevonden worden door de algemeene verdubbelingsformule (12), waarin men slechts op grond van hetgeen bij $n=3$ gebleken is te substitueeren heeft $b'_{6r+2}=1$ en $b'_{12q-6r+2p+2}=b'_{2p+2}$ om te verkrijgen

$$_{p+5} = \left\{\begin{matrix}(p=0 \text{ tot } 3)+\\(p=4 \text{ tot } 5)-\end{matrix}\right\} 6b'_{2p+2} \sum_{0}^{\leqq 2q+\frac{p}{3}}{}_{r}(-)^{q-r}\binom{12q+2p+5}{6r+3}, \ldots (12 \text{ voor } n=6)$$

zijnde hierin verder voor $p=0, 1, 3$ en 4 te nemen $b'_{2p+2}=1$, daarentegen voor $p=2$ en 5, $b'_{2p+2}=\frac{1}{2}$. En wat vervolgens de goniometrische herleiding van deze uitdrukking betreft, daartoe geeft de algemeene formule (13) toegepast op $n=6$:

$$3\sum_{0}^{\leqq 2q+\frac{p+1}{3}}{}_{r}(-)^{q-r}\binom{12q+2p+5}{6r+3} = \left(\cos\frac{(2p-1)\pi}{12}\right)\theta_0^{12q+2p+5} +$$

$$+\left(\cos\frac{5(2p-1)\pi}{12}\right)\theta_1^{12q+2p+5} + \left(\cos\frac{9(2p-1)\pi}{12}\right)\theta_2^{12q+2p+5},$$

waarin namelijk de vierkanten van

$$\theta_0 = 2\cos\frac{\pi}{12} = \sqrt{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{(2+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2},$$

$$\theta_1 = 2\cos\frac{5\pi}{12} = \sqrt{2}\left(1+\cos\frac{5\pi}{6}\right) = \sqrt{(2-\sqrt{3})} = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$$

en $\theta_2 = 2\cos\frac{9\pi}{12} = -\sqrt{2}$

uit elkander gemakkelijk zijn af te leiden door middel van de terugloopende betrekking

$$\mu_t = 6\,\mu_{t-1} - 9\,\mu_{t-2} + 2\,\mu_{t-3},$$

indien men namelijk eerst regtstreeks $\mu_0 = \frac{\theta_0^0 + \theta_1^0 + \theta_2^0}{6} = \frac{1}{2}$, $\mu_1 = \frac{\theta_0^2 + \theta_1^2 + \theta_2^2}{6} = 1$ en $\mu_2 = \frac{\theta_0^4 + \theta_1^4 + \theta_2^4}{6} = 3$ heeft uitgerekend, zoodat hier tevens de juistheid blijkt van het reeds gezegde dat, uitgezonderd μ_0, al deze coëfficiënten μ geheele getallen zijn.

Men zou nog wel, lettende dat de voor θ_0 en θ_1 gevonden waarden aan elkander toegevoegd zijn en dat die voor θ_2 meer op zich zelve staat, in de formulen voor b overal de termen in $\theta_2 = -\sqrt{2}$ afzonderlijk en daarentegen die in θ_0 en in θ_1 met elkander verbonden kunnen houden, hetgeen dus zou nederkomen op het gebruik van den tweeden of gesplitsten vorm van (14 voor $n = 6$), en bij vervanging van de zoo even gebezigde coëfficiënten μ door andere, die op dezelfde wijze afhangen alleen van de beide wortels θ_0^2 en θ_1^2 van $\theta^4 - 4\,\theta^2 + 1 = 0$, eene meer eenvoudige terugloopende betrekking tusschen deze nieuwe coëfficiënten zou opleveren; maar eensdeels schijnt het regelmatiger de drie wortels te zamen in te voeren, en ten andere zou op deze nieuwe wijze de deelbaarheid van alle coëfficiënten b door 6 niet zoo gemakkelijk blijken. Die deelbaarheid overigens, in verband met de reeds in den aanvang gemaakte opmerking dat bij de werkelijke berekening van de Bernoulliaansche coëfficiënten zelve de coëfficiënten b alleen door hunne onderlinge verhoudingen van invloed zijn, geeft nog gereede aanleiding om voor dit doel de voor $\frac{b}{6}$ gevonden waarden in de plaats van die van b zelve te stellen.

Ev

ciënt

want

$n =$	1	2	3	
				$\mu_0 = 1$
b_0	$\frac{1}{2}$			
b_1		$\frac{1}{2}$		$\mu_1 = 1$
b_2	$\frac{1}{2^3}$		1	
b_3		$\frac{1}{2^2}$		$\mu_2 = 3$
b_4	$\frac{1}{\ldots}$		1	

onden

Zooals gezegd zal na de verrigte uitvoerige berekeningen voor de gevallen $n = 1$ tot en met 6 niet met de overeenkomstige berekening voor hoogere waarden van den periodenaanwijzer n worden voortgegaan. Wanneer men intusschen de gevonden uitkomsten overziet en bepaaldelijk let op de wijze waarop voor $n = 4$, $n = 5$, $n = 6$ de getallenwaarden der wortels θ, waarin de coëfficiënten b zijn uitgedrukt, afhangen van $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{3}$, dan rijst de vraag of ook niet voor grootere waarden van n die coëfficiënten min of meer eenvoudig in de bij de overeenkomstige cirkelverdeeling optredende wortelvormen zouden zijn uit te drukken; of bijv., om een bepaald geval te noemen, de oplossing van GAUSS voor den regelmatigen zeventienhoek niet misschien aanleiding zou kunnen geven dat ook tusschen de Bernoulliaansche coëfficiënten, wanneer men ze bij perioden van $n = 17$ indeelt, een betrekkelijk eenvoudig verband te vinden is. Enkele pogingen om eene dergelijke vraag nader te onderzoeken hebben mij evenwel tot geene uitkomst geleid.

Ten slotte moge hier een tabellarisch overzigt volgen van de bij $n = 1$ tot en met 6 behoorende getallenwaarden van eenige der eerste coëfficiënten b, voor $n = 4$, $n = 5$, $n = 6$ voorafgegaan door die van de coëfficiënten μ, en voor $n = 4$ nog bovendien door de coëfficiënten ν, waarin zij boven werden uitgedrukt, zooals een en ander zeer gemakkelijk gevonden wordt uit de medegedeelde terugloopende of onafhankelijke formulen, en waarbij dus deze waarden van b dienst zouden kunnen doen voor de groepsgewijze berekening der Bernoulliaansche coëfficiënten. Omtrent die tabel valt nog op te merken dat blijkens de evenbedoelde formulen niet iedere b berekend wordt uit de juist daarneven staande μ of ν, maar soms uit een wat hooger geplaatste μ of ν, soms uit twee verschillende μ of ν.

Evenals in het voorgaande voor de Bernoulliaansche coëfficiënten geschied is, kan men ook voor andere daarmede verwante coëfficiënten de in den aanvang uiteengezette algemeene

methode voor het vinden van periodieke terugloopende betrekkingen toepassen, en wel bepaaldelijk voor de zoogenaamde tangenten-, cosecanten- en secanten-coëfficiënten. Wij zullen daaromtrent minder uitvoerig zijn en, zonder ons te binden aan eene streng doorgevoerde toepassing der algemeene methode, slechts enkele betrekkingen van dien aard bij wijze van voorbeelden ontwikkelen. Met herhaling van de boven voor de Bernoulliaansche coëfficiënten gebezigde formule zullen als uitgangsformulen voor de berekening genomen worden de volgende vier in vorm vrij naauw overeenstemmende:

$$-\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2} = \sum_0^\infty {}^q \frac{B_{2q-1}}{(2q)!}x^{2q-1}, \quad tg\frac{x}{2} = \sum_0^\infty {}^q \frac{T_{2q-1}}{(2q)!}x^{2q-1},$$

$$\operatorname{cosec} x = \sum_0^\infty {}^q \frac{C_{2q-1}}{(2q)!}x^{2q-1}, \quad \sec x = \sum_0^\infty {}^q \frac{E_{2q}}{(2q)!}x^{2q},$$

waarbij, in denzelfden zin als de in de ontwikkeling niet van $\cot x$ zelf, maar van $-\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}$, voorkomende Bernoulliaansche coëfficiënten B zouden kunnen genoemd worden herleide of verkleinde cotangenten-coëfficiënten, zoo ook de coëfficiënten T, ter onderscheiding van de grootere in $tg\, x$ zelf voorkomende tangenten-coëfficiënten, zijn aan te duiden als herleide of verkleinde tangenten-coëfficiënten, terwijl C de cosecanten- en E de secanten- of zoogenaamde Euleriaansche coëfficiënten voorstellen.

Gelet op de reeds boven aan het slot van het geval $n = 1$ opgemaakte waarden van $tg\frac{x}{2}$ en $\operatorname{cosec} x$ blijken dan deze nieuwe coëfficiënten T en C met de Bernoulliaansche zamen te hangen volgens de eenvoudige formulen

$$T_{2q-1} = 2(2^{2q}-1)B_{2q-1} \quad \text{en} \quad C_{2q-1} = 2(2^{2q-1}-1)B_{2q-1},$$

dus ook $T_{2q-1} = 2(B_{2q-1} + C_{2q-1})$, (die o. a. voor $q = 0$ en wegens $B_{-1} = -1$ geven $T_{-1} = 0$ en $C_{-1} = 1$, zoodat in de formule voor $tg\frac{x}{2}$ alleen voor de gelijkvormigheid de

benedengrens $q = 0$ in plaats van $q = 1$ is aangehouden); en iedere tusschen de coëfficiënten van eene dezer drie soorten te vinden betrekking is dus tevens door middel van deze substitutiën te beschouwen als eene betrekking tusschen de coëfficiënten van ieder der beïde andere soorten. Daarentegen staan, zooals bekend is, de Euleriaansche coëfficiënten E meer op zich zelve en kunnen zij althans niet dan door formulen van meer zamengestelden, en wél van teruglooppenden aard in de Bernoulliaansche worden uitgedrukt, of omgekeerd. Herinnerd moge nog worden, — en daardoor wordt er tevens gedeeltelijk rekenschap van gegeven waarom juist de vorenstaande coëfficiënten werden gekozen — dat zoowel T als E geheele oneven getallen zijn (zie deze reeds opgegeven in L. EULER's *Differenzial-Rechnung, übersetzt von* J. A. C. MICHELSEN, 2er Theil, 1790, pag. 213—214 en 257—262); de coëfficiënten C daarentegen zijn, evenals B, breuken.

Dit een en ander vooropgesteld zijnde, beginnen wij thans met de coëfficiënten T. Vooreerst geeft dan de identiteit

$$\cos x \,.\, \frac{1}{2} \, tg\, x = \frac{1}{2} \sin x \quad \text{of}$$

$$\left\{\sum_0^{\infty} {}_{t-r} (-)^{q-r} \frac{x^{2q-2r}}{(2q-2r)!}\right\}\left\{\sum_1^{\infty} {}_r \frac{2^{2r-2}\, T_{2r-1}}{(2r)!} x^{2r-1}\right\} = \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} {}_q (-)^{q-1} \frac{x^{2q-1}}{(2q-1)!}$$

de terugloopende betrekking

$$\sum_1^{q} {}_r (-)^{r-1} \binom{2q}{2r} 2^{2r-2}\, T_{2r-1} = q; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

de identiteit

$$(1 + \cos x) \,.\, tg \frac{x}{2} = \sin x \quad \text{of}$$

$$\left\{2 + \sum_1^{\infty} {}_{q-r} (-)^{q-r} \frac{x^{2q-2r}}{(2q-2r)!}\right\}\left\{\sum_1^{\infty} {}_r \frac{T_{2r-1}}{(2r)!} x^{2r-1}\right\} = \sum_1^{\infty} {}_q (-)^{q-1} \frac{x^{2q-1}}{(2q-1)!}$$

de betrekking

$$\sum_1^{q-1} {}_r (-)^{r-1} \binom{2q}{2r} T_{2r-1} + (-)^{q-1}\, 2\, T_{2q-1} = 2q; \quad \ldots \quad (18^*)$$

en de identiteit

$$\sin x \,.\, tg \frac{x}{2} = 1 - \cos x \quad \text{of}$$

$$\left\{\sum_{0}^{\infty} {}_{q-r} (-)^{q-r} \frac{x^{2q-2r+1}}{(2q-2r+1)!}\right\} \left\{\sum_{1}^{\infty} {}_{r} \frac{T_{2r-1}}{(2r)!} x^{2r-1}\right\} = \sum_{1}^{\infty} {}_{q} (-)^{q-1} \frac{x}{(2}$$

de betrekking

$$\sum_{1}^{q} {}_{r} (-)^{r-1} \binom{2q+1}{2r} T_{2r-1} = 2q+1 \ldots\ldots\ldots (18^{**})$$

En hiervan leert (18*), indien men, lettende op $\binom{2q}{2q-2r} =$ $= \binom{2q}{2r}$, den eersten term ingeval van q oneven onder den vorm

$$\sum_{1}^{\frac{q-1}{2}} {}_{r} (-)^{r-1} \binom{2q}{2r} (T_{2r-1} - T_{2q-2r-1}),$$ en ingeval van q even, lettende bovendien op $\binom{2q}{q} = \frac{(2q)!}{q!\,q!} = \frac{2q}{q} \cdot \frac{(2q-1)!}{(q-1)!q!} = 2\binom{2q-1}{q}$,

onder den vorm $$\sum_{1}^{\frac{q}{2}-1} {}_{r} (-)^{r-1} \binom{2q}{2r} (T_{2r-1} + T_{2q-2r-1}) +$$

$$+ (-)^{\frac{q}{2}-1} \,.\, 2\binom{2q-1}{q} T_{q-1}$$ schrijft, dat, als alle voorgaande coëfficiënten T geheele oneven getallen zijn, alsdan ook T_{2q-1} althans een geheel getal is; terwijl het oneven zijn van dien coëfficiënt T_{2q-1} dan kan blijken doordien in (18**) verminderd met (18*), dat is in $\sum_{1}^{q-1} {}_{r} (-)^{r-1} \binom{2q}{2r-1} T_{2r-1} +$ $+ (-)^{q-1} (2q-1)\, T_{2q-1} = 1$, iedere binomiaal-coëfficiënt $\binom{2q}{2r-1}$:

$$= \frac{2q(2q-1)\,.\,2(q-1)(2q-3)\,.\,2(q-2)\ldots(2q-2r+3)\,.\,2(q-r+1)}{1\,.\quad 2(1)\,.\quad 3\,.\quad 2(2)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2(r-1).(2r-1)}:$$

$$= 2\,q \,.\, \frac{\prod_{2}^{r} (2q-2r+3)}{\prod_{2}^{r} (2r-1)} \,.\, \binom{q-1}{r-1}$$ steeds even is: met dat gevolg alzoo, dat werkelijk alle coëfficiënten T geheel oneven zijn.

Maar ten andere verkrijgt men, evenzeer op het voetspoor van het boven voor de Bernoulliaansche coëfficiënten verrigte, uit de identiteit

$$(1 + \cos x) \,.\, \frac{d\left(x\, tg \frac{x}{2}\right)}{dx} = 2 \cos^2 \frac{x}{2} \left(tg \frac{x}{2} + \frac{x}{2 \cos^2 \frac{x}{2}}\right) = \sin x + x$$

$$\left\{2 + \sum_{1}^{\infty}{}_{q-r} (-)^{q-r} \frac{x^{2q-2r}}{(2q-2r)!}\right\} \left\{\sum_{1}^{\infty}{}_{r} \frac{T_{2r-1}}{(2r-1)!} x^{2r-1}\right\} = x + \sum_{1}^{\infty}{}_{q} (-)^{q-1} \frac{x^{2q-1}}{(2q-1)!}$$

de betrekking (mits $q \overline{\overline{>}}\, 2$ zij)

$$\sum_{1}^{q-1}{}_{r} (-)^{r-1} \binom{2q-1}{2r-1} T_{2r-1} + (-)^{q-1}\, 2\, T_{2q-1} = 1\,,$$

en uit de identiteit

$$(1 + \cos x) \,.\, \frac{d\, tg \frac{x}{2}}{dx} = 2 \cos^2 \frac{x}{2} \,.\, \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = 1$$

$$\left\{2 + \sum_{1}^{\infty}{}_{q-r} (-)^{q-r} \frac{x^{2q-2r}}{(2q-2r)!}\right\} \left\{\sum_{1}^{\infty}{}_{r} \frac{(2r-1)\, T_{2r-1}}{(2r)!} x^{2r-2}\right\} = 1$$

de betrekking (voor $q \overline{\overline{>}}\, 2$)

$$\sum_{1}^{q-1}{}_{r} (-)^{r-1} (2r-1) \binom{2q}{2r} T_{2r-1} + (-)^{q-1}\, 2\,(2q-1)\, T_{2q-1} = 0\,,$$

welke beide laatste betrekkingen trouwens ook zouden gekomen zijn door, na in (18**) q te hebben vervangen door $q-1$, deze hetzij op zich zelve af te trekken van (18*), dan wel vermenigvuldigd met $2q$ af te trekken van $(2q-1)$ maal de laatstgenoemde. Nog moge, zonder het verder uit te werken, worden aangestipt dat in plaats van eene enkele aftrekking eene herhaalde aftrekking van dezelfde betrekkingen (18*) en (18**), na daarin voor q achtervolgens te hebben geschreven $q-1$, $q-2$, enz., $q-\frac{k-1}{2}$ of $q-\frac{k}{2}$, ook hier weder tot zoogenaamde afgebroken terugloopende betrekkingen tusschen de coëfficiënten T zou voeren, overeenkomstig met de boven voor de Bernoulliaansche coëfficiënten uit de analoge betrekkingen (4*) en (4**) afgeleide.

Eindelijk worde nog in het voorbijgaan de uit $\frac{\sin 2x}{2} \cdot tg\frac{x}{2} = -\frac{1+\cos 2x}{2} + \cos x$ af te leiden betrekking

$$\sum_{1}^{q}{}_{r} (-)^{r-1} \binom{2q+1}{2r} 2^{2q-2r} T_{2r-1} = (2q+1)(2^{2q-1}-1)$$

vermeld.

Gaan wij thans tot de eigenlijke periodieke terugloopende betrekkingen over. Voor de periode $n=2$ kan men uitgaan van de identiteit

$$\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{ix}{2}\right) tg\frac{x}{2} = \sin\frac{x}{2}\cos\frac{ix}{2},$$

dat is, omdat

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{ix}{2} = \frac{1}{2}\left\{\cos\frac{(1+i)x}{2} + \cos\frac{(1-i)x}{2}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{0}^{\infty}{}_{r} (-)^{r} \frac{(1+i)^{2r} + (1-i)^{2r}}{2^{2r}.(2r)!} x^{2r} = \frac{1}{2}\sum_{0}^{\infty}{}_{r} (-)^{r} \frac{(2i)^{r} + (-2i)^{r}}{2^{2r}.(2r)!} x^{2r}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{0}^{\infty}{}_{q} \frac{2(2i)^{2q}}{2^{4q}.(4q)!} x^{4q} = \sum_{0}^{\infty}{}_{q} (-)^{q} \frac{x^{4q}}{2^{2q}.(4q)!}$$

en $\sin\frac{x}{2}\cos\frac{ix}{2}=\frac{1}{2}\left\{\sin\frac{(1+i)x}{2}+\sin\frac{(1-i)x}{2}\right\}=$

$$=\frac{1}{2}\sum_{0}^{\infty}{}_{r}(-)^{r}\frac{(1+i)^{2r+1}+(1-i)^{2r+1}}{2^{2r+1}.(2r+1)!}x^{2r+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{0}^{\infty}{}_{r}(-)^{r}\frac{(1+i)(2i)^{r}+(1-i)(-2i)^{r}}{2^{2r+1}.(2r+1)!}x^{2r+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\sum_{1}^{\infty}{}_{q}\left(-\frac{2i(2i)^{2q-1}}{2^{4q-1}.(4q-1)!}x^{4q-1}\right.+\sum_{0}^{\infty}{}_{q}\frac{2(2i)^{2q}}{2^{4q+1}.(4q+1)!}x^{4q+1}\right\}=$$

$$=-\sum_{1}^{\infty}{}_{q}(-)^{q}\frac{x^{4q-1}}{2^{2q}.(4q-1)!}+\sum_{0}^{\infty}{}_{q}(-)^{q}\frac{x^{4q+1}}{2^{2q+1}.(4q+1)!}$$

wordt, de identiteit:

$$\sum{}_{r}(-)^{q-r}\frac{x^{4q-4r}}{2^{2q-2r}.(4q-4r)!}\Bigg\}\left\{\sum_{0}^{\infty}{}_{r}\frac{T_{4r-1}}{(4r)!}x^{4r-1}+\sum_{0}^{\infty}{}_{r}\frac{T_{4r+1}}{(4r+2)!}x^{4r+1}\right\}=$$

$$=-\sum_{1}^{\infty}{}_{q}(-)^{q}\frac{x^{4q-1}}{2^{2q}(4q-1)!}+\sum_{0}^{\infty}{}_{q}(-)^{q}\frac{x^{4q+1}}{2^{2q+1}(4q+1)!},$$

gevende dus de twee betrekkingen:

$$\sum_{0}^{q}{}_{r}(-)^{r}\binom{4q}{4r}2^{2r}\,T_{4r-1}=-4q$$

en $$\sum_{0}^{q}{}_{r}(-)^{r}\binom{4q+2}{4r+2}2^{2r+1}\,T_{4r+1}=4q+2,$$

die weder als vroeger in het overeenkomstige geval onder den gemeenschappelijken vorm

$$\sum_{0\text{ of }1}^{q}{}_{r}(-)^{\frac{r}{2}\text{of}\frac{r+1}{2}}\binom{2q}{2r}2^{r}\,T_{2r-1}=-2q$$

zouden zijn zamen te schrijven onder voorwaarde dat daarin

aan r uitsluitend óf de opvolgende even óf de opvolgende oneven waarden worden gegeven.

Voor het geval van $n = 3$ of $\omega^3 - 1 = 0$ of $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ ontwikkele men de identiteit

$$\left(\frac{2^2}{3}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{\omega x}{2}\cos\frac{\omega^2 x}{2}\right) tg\,\frac{x}{2} = \frac{2^2}{3}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{\omega x}{2}\cos\frac{\omega^2 x}{2},$$

waartoe men heeft:

$$2^2\cos\frac{x}{2}\cos\frac{\omega x}{2}\cos\frac{\omega^2 x}{2} = 2\cos\frac{x}{2}\left\{\cos\frac{(\omega+\omega^2)x}{2} + \cos\frac{(\omega-\omega^2)x}{2}\right\} =$$

$$= (1+\cos x) + \left\{\cos\frac{(1+\omega-\omega^2)x}{2} + \cos\frac{(1-\omega+\omega^2)x}{2}\right\} =$$

$$= 1 + \cos x + \cos\omega x + \cos\omega^2 x = 4 + 3\sum_1^\infty{}^q (-)^q \frac{x^{6q}}{(6q)!}$$

en $$2^2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{\omega x}{2}\cos\frac{\omega^2 x}{2} = 2\sin\frac{x}{2}\left\{\cos\frac{(\omega+\omega^2)x}{2} + \cos\frac{(\omega-\omega^2)x}{2}\right\} =$$

$$= \sin x + \left\{\sin\frac{(1+\omega-\omega^2)x}{2} + \sin\frac{(1-\omega+\omega^2)x}{2}\right\} =$$

$$= \sin x - \sin\omega x - \sin\omega^2 x = -\sum_1^\infty{}^q (-)^q \frac{2x^{6q-1}}{(6q-1)!} +$$

$$+ \sum_0^\infty{}^q (-)^q \frac{2x^{6q+1}}{(6q+1)!} + \sum_0^\infty{}^q (-)^q \frac{x^{6q+3}}{(6q+3)!},$$

zoodat men substitueerende verkrijgt:

$$\left\{\frac{4}{3} + \sum_1^\infty{}^{q-r} (-)^{q-r} \frac{x^{6q-6r}}{(6q-6r)!}\right\}\left\{\sum_0^\infty{}^r \frac{T_{6r-1}}{(6r)!} x^{6r-1} +\right.$$

$$\left. + \sum_0^\infty{}^r \frac{T_{6r+1}}{(6r+2)!} x^{6r+1} + \sum_0^\infty{}^r \frac{T_{6r+3}}{(6r+4)!} x^{6r+3}\right\} = \frac{1}{3}\left\{-\sum_1^\infty{}^q (-)^q \frac{2x^{6q-1}}{(6q-1)!}\right.$$

$$\left. + \sum_0^\infty{}^q (-)^q \frac{2x^{6q+1}}{(6q+1)!} + \sum_0^\infty{}^q (-)^q \frac{x^{6q+3}}{(6q+3)!}\right\},$$

en daaruit de drie betrekkingen:

$$\sum_{0}^{q-1} (-)^r \binom{6q}{6r} T'_{6r-1} + (-)^q \frac{4}{3} T'_{6q-1} = -2 . \frac{6q}{3} ,$$

$$\sum_{0}^{q-1} (-)^r \binom{6q+2}{6r+2} T_{6r+1} + (-)^q \frac{4}{3} T_{6q+1} = \quad 2 . \frac{6q+2}{3} ,$$

$$\sum_{0}^{q-1} (-)^r \binom{6q+4}{6r+4} T'_{6r+3} + (-)^q \frac{4}{3} T'_{6q+3} = \quad \frac{6q+4}{3} .$$

Voor de cosecanten-coëfficiënten C heeft men vooreerst uit

$$sin\, x \,.\, cosec\, x = 1$$

of $\left\{ \sum_{0}^{\infty} \sum_{r}^{q} (-)^{q-r} \frac{x^{2q-2r+1}}{(2q-2r+1)!} \right\} \left\{ \sum_{0}^{\infty} {}_r \frac{C_{2r-1}}{(2r)!} x^{2r-1} \right\} \doteq 1$

de gewone terugloopende betrekking

(mits $q \geqq 1$ zij) $\quad \sum_{0}^{q} {}_r (-)^r \binom{2q+1}{2r} C_{2r-1} = 0 ,$

die trouwens, lettende op $C_{2r-1} = 2(2^{2r-1}-1) B_{2r-1}$, blijkt niet anders te zijn dan het dubbel van de overmaat van de vroeger voor de Bernoulliaansche coëfficiënten gevonden betrekking (4*) boven ($4''_0$ voor $n = 1$).

Vervolgens komen als periodieke terugloopende betrekkingen in de eerste plaats in aanmerking de beide uit de identiteit

$$(sin\, x \quad sin\, i\, x) \quad cosec\, x = sin\, i\, x$$

$$\left\{ \sum_{r}^{q} (-)^{q-r} \frac{2^{2q-2r+1} i}{(4q-4r+2)!} x^{4q-4r+2} \right\} \left\{ \sum_{0}^{\infty} {}_r \frac{C_{4r-1}}{(4r)!} x^{4r-1} + \sum_{0}^{\infty} {}_r \frac{C_{4r+1}}{(4r+2)!} x^{4r+1} \right\} =$$

$$= i \left\{ \sum_{0}^{\infty} {}_q \frac{x^{4q+1}}{(4q+1)!} + \sum_{0}^{\infty} {}_q \frac{x^{4q+3}}{(4q+3)!} \right\}$$

voortvloeijende, namelijk:

$$\sum_0^q {}_r (-)^{q-r} \binom{4q+2}{4r} 2^{2q-2r+1} C_{4r-1} = 4q + 2$$

en
$$\sum_0^q {}_r (-)^{q-r} \binom{4q+4}{4r+2} 2^{2q-2r+1} C_{4r+1} = 4q + 4\,,$$

die desverkiezende weder onder den enkelen vorm

$$\sum_{0\,of\,1}^q {}_r (-)^{\frac{q-r}{2}} \binom{2q+2}{2r} 2^{q-r+1} C_{2r-1} = 2q + 2$$

vervat zijn, onder uitdrukkelijke voorwaarde dat hierin r óf alleen even, óf alleen oneven genomen wordt, en die bovendien uit het vroeger gevondene kunnen worden afgeleid, waartoe men slechts opvolgend van 2^{2q} maal de eerste en van 2^{2q+1} maal de tweede der betrekkingen (4″ voor $n = 2$) heeft af te trekken 2 maal de eerste en 2 maal de tweede der in de daarop volgende alinea eerst voorkomende betrekkingen.

Verder blijkt in denzelfden trant als vroeger dat voor $n = 3$ of $\omega^3 - 1 = 0$ de identiteit

$$\left(\frac{2^2}{3} \sin x \sin \omega x \sin \omega^2 x\right) \operatorname{cosec} x = \frac{2^2}{3} \sin \omega x \sin \omega^2 x$$

bij ontwikkeling overgaat in

$$\left\{\sum_0^\infty {}_{q-r} (-)^{q-r} \frac{2^{6q-6r+3}}{(6q-6r+3)!} x^{6q-6r+3}\right\} \left\{\sum_0^\infty {}_r \frac{C_{6r-1}}{(6r)!} x^{6r-1} + \sum_0^\infty {}_r \frac{C_{6r+1}}{(6r+2)!} x^{6r+1}\right.$$

$$\left. + \sum_0^\infty {}_r \frac{C_{6r+3}}{(6r+4)!} x^{6r+3}\right\} = \frac{2}{3} \left\{ - \sum_0^\infty {}_q (-)^q \frac{(-3)^{3q+1} - 1}{(6q+2)!} x^{6q+2}\right.$$

$$+ \sum_0^\infty {}_q (-)^q \frac{(-3)^{3q+2} - 1}{(6q+4)!} x^{6q+4} - \sum_0^\infty {}_q (-)^q \frac{(-3)^{3q+3} - 1}{(6q+6)!} x^{6q+6}$$

en mitsdien geeft de drie betrekkingen:

$$\sum_0^q (-)^r \binom{6q+3}{6r} 2^{6q-6r+3} C_{6r-1} = -\frac{2(6q+3)}{3}\{(-3)^{3q+1}-1\},$$

$$\sum_0^q (-)^r \binom{6q+5}{6r+2} 2^{6q-6r+3} C_{6r+1} = \frac{2(6q+5)}{3}\{(-3)^{3q+2}-1\},$$

$$\sum_0^q (-)^r \binom{6q+7}{6r+4} 2^{6q-6r+3} C_{6r+3} = -\frac{2(6q+7)}{3}\{(-3)^{3q+3}-1\}.$$

Door ook in deze, na deeling door 2, de coëfficiënten C te vervangen door hunne waarden in B, en door ze dan opvolgend af te trekken van 2^{6q+2} maal, 2^{6q+4} maal, 2^{6q+6} maal de vroeger in het geval van $n=3$ verkregen periodieke teruggloopende betrekkingen tusschen de Bernoulliaansche coëfficiënten, blijkt nog dat deze laatste coëfficiënten bovendien onderling zamenhangen volgens

$$\sum_0^q (-)^r \binom{6q+3}{6r} 2^{6q-6r+3} B_{6r-1} = -\frac{6q+3}{3}\{4^{3q+1}-(-3)^{3q+1}+1\},$$

$$\sum_0^q (-)^r \binom{6q+5}{6r+2} 2^{6q-6r+3} B_{6r+1} = \frac{6q+5}{3}\{4^{3q+2}-(-3)^{3q+2}+1\},$$

$$\sum_0^q (-)^r \binom{6q+7}{6r+4} 2^{6q-6r+3} B_{6r+3} = \frac{6q+7}{3}\left\{\frac{1}{2}.4^{3q+3}+(-3)^{3q+3}-1\right\},$$

die ook regtstreeks zouden gevonden zijn indien men, in denzelfden geest als toenmaals in het geval van $n=2$, de identiteit $-\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2} = -\frac{(1+\cos x)(2\sin\omega x\sin\omega^2 x)}{2^2\sin x\sin\omega x\sin\omega^2 x}$ had ontwikkeld. Wilde men in dezen zin nog een stap verder gaan en evenzeer de identiteit $-\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2} = -\frac{\sin x\,(1-\cos\omega x)\,(1-\cos\omega^2 x)}{2(1-\cos x)(1-\cos\omega x)(1-\cos\omega^2 x)}$ ontwikkelen, dan zal het wel niet verwonderen dat de aldus

komende betrekkingen in B nog meer zamengesteld zouden wezen.

Overigens spreekt het van zelf dat door gebruik te maken van het verband $T_{2r-1} = 2(2^{2r}-1)B_{2r-1}$ de verschillende boven regtstreeks opgemaakte betrekkingen tusschen de coëfficiënten T op dezelfde wijze uit die voor B kunnen worden afgeleid als thans voor de coëfficiënten C is aangewezen.

Wat betreft de Euleriaansche coëfficiënten, de eenvoudigste daartusschen bestaande terugloopende betrekking wordt onmiddellijk gevonden uit de identiteit

$$\cos x \cdot \sec x = 1 \quad \text{of} \quad \left\{\sum_0^{\infty}{}_{q-r}(-)^{q-r}\frac{x^{2q-2r}}{(2q-2r)!}\right\}\left\{\sum_0^{\infty}{}_r\frac{E_{2r}}{(2r)!}x^{2r}\right\} = 1$$

$$\text{en is dus: (voor } q \geqq 1) \quad \sum_0^{q}{}_r(-)^r\binom{2q}{2r}E_{2r} = 0;$$

zij werd reeds door EULER zelf op pag. 261—262 van zijne boven aangehaalde *Differenzial-Rechnung* op deze wijze ontwikkeld.

Iets meer zamengesteld zijn de beide volgende betrekkingen, namelijk vooreerst uit:

$$\frac{\sin 2x}{2} \cdot \sec x = \sin x$$

$$\text{of} \quad \left\{\sum_0^{\infty}{}_{q-r}(-)^{q-r}\frac{2^{2q-2r}}{(2q-2r+1)!}x^{2q-2r+1}\right\}\left\{\sum_0^{\infty}{}_r\frac{E_{2r}}{(2r)!}x^{2r}\right\} = \sum_0^{\infty}{}_q(-)^q\frac{x}{(2\ldots}$$

de betrekking

$$\sum_0^{q}{}_r(-)^r\binom{2q+1}{2r}2^{2q-2r}E_{2r} = 1,$$

en ten andere uit:

$$\frac{1 + \cos 2x}{2} \cdot \sec x = \cos x$$

$$\left\{1 + \sum_{1}^{q} (-)^{q-r} \frac{2^{2q-2r-1}}{(2q-2r)!} x^{2q-2r}\right\} \left\{\sum_{0}^{\infty}{}_{r} \frac{E_{2r}}{(2r)!} x^{2r}\right\} = \sum_{0}^{\infty}{}_{q} (-)^q \frac{x^{2q}}{(2q)!}$$

de betrekking

$$\sum_{0}^{q-1}{}_{r} (-)^r \binom{2q}{2r} 2^{2q-2r-1} E_{2r} + (-)^q E_{2q} = 1.$$

Deze laatste is zeker wel de meest geschikte om dadelijk alle coëfficiënten E als geheele oneven getallen te doen kennen.

Voor periodieke terugloopende betrekkingen zullen wij ons ook hier weder bepalen tot de gevallen $n = 2$ en $n = 3$. In het eerste geval vindt men uit de identiteit

$$(\cos x \cos i x) \sec x = \cos i x$$

$$\left\{\sum_{1}^{q} (-)^{q-r} \frac{2^{2q-2r}}{(4q-4r)!} x^{4q-4r}\right\} \left\{\sum_{0}^{\infty}{}_{r} \frac{E_{4r}}{(4r)!} x^{4r} + \sum_{0}^{\infty}{}_{r} \frac{E_{4r+2}}{(4r+2)!} x^{4r+2}\right\} =$$

$$= \sum_{0}^{\infty}{}_{q} \frac{x^{4q}}{(4q)!} + \sum_{0}^{\infty}{}_{q} \frac{x^{4q+2}}{(4q+2)!}$$

de beide betrekkingen

$$\sum_{0}^{q}{}_{r} (-)^{q-r} \binom{4q}{4r} 2^{2q-2r} E_{4r} = 1$$

$$\text{en } \sum_{0}^{q}{}_{r} (-)^{q-r} \binom{4q+2}{4r+2} 2^{2q-2r} E_{4r+2} = 1,$$

of. wil men liever, de enkele mits slechts uitsluitend voor even of uitsluitend voor oneven r te gebruiken betrekking

$$\sum_{0 \text{ of } 1}^{q}{}_{r} (-)^{\frac{q-r}{2}} \binom{2q}{2r} 2^{q-r} E_{2r} = 1.$$

In het tweede geval, of voor $\omega^3-1=0$, is te gebruiken de identiteit

$$\left(\frac{2^2}{3}\cos x\cos\omega x\cos\omega^2 x\right)\sec x=\frac{2^2}{3}\cos\omega x\cos\omega^2 x\,,$$

dat is ontwikkeld

$$\left\{\frac{4}{3}+\sum_1^\infty{}_{q-r}(-)^{q-r}\frac{2^{6q-6r}}{(6q-6r)!}x^{6q-6r}\right\}\left\{\sum_0^\infty{}_r\frac{E_{6r}}{(6r)!}x^{6r}+\sum_0^\infty{}_r\frac{E_{6r+2}}{(6r+2)!}x^{6r}\right.$$

$$\left.+\sum_0^\infty{}_r\frac{E_{6r+4}}{(6r+4)!}x^{6r+4}\right\}=\frac{2}{3}\left\{\sum_0^\infty{}_q(-)^q\frac{(-3)^{3q}+1}{(6q)!}\right.$$

$$-\sum_0^\infty{}_q(-)^q\frac{(-3)^{3q+1}+1}{(6q+2)!}x^{6q+2}+\sum_0^\infty{}_q(-)^q\frac{(-3)^{3q+2}+1}{(6q+4)!}$$

om te komen tot de drie betrekkingen:

$$\sum_0^{q-1}{}_r(-)^r\binom{6q}{6r}2^{6q-6r}E_{6r}\quad+(-)^q\frac{4}{3}E_{6q}\quad=\quad\frac{2}{3}\{(-3)^{3q}\quad+$$

$$\sum_0^{q-1}{}_r(-)^r\binom{6q+2}{6r+2}2^{6q-6r}E_{6r+2}+(-)^q\frac{4}{3}E_{6q+2}=-\frac{2}{3}\{(-3)^{3q+1}+$$

$$\sum_0^{q-1}{}_r(-)^r\binom{6q+4}{6r+4}2^{6q-6r}E_{6r+4}+(-)^q\frac{4}{3}E_{6q+4}=\quad\frac{2}{3}\{(-3)^{3q+2}+$$

Ten opzigte zoowel van de cosecanten- als van de secanten-coëfficiënten zullen wij overigens met stilzwijgen voorbijgaan de wijze waarop ook hier weder soortgelijke afgebroken terugloopende betrekkingen zouden kunnen worden opgemaakt als boven voor de Bernoulliaansche coëfficiënten gevonden werden.

Evenmin zullen wij ons bezig houden met de oplossing der coëfficiënten T, C en E in determinanten-vorm uit de voor deze coëfficiënten gevonden betrekkingen, op dezelfde wijze als dit almede vroeger voor de Bernoulliaansche coëfficiënten heeft plaats gehad.

En evenmin eindelijk zullen wij, bij de uitbreiding die deze bijdrage reeds verkregen heeft, thans nog treden in een nader onderzoek van de functie $sec\, x + tg\, x$, ten einde daaruit, zooals o. a. door SCHERK, STERN, SCHLÖMILCH, CATALAN, in hunne straks aan te halen stukken geschied is, betrekkingen af te leiden waardoor de secanten- en de tangentencoëfficiënten, zoo even ieder afzonderlijk door middel van $sec\, x$ en van $tg \frac{x}{2}$ onderzocht, als het ware aan elkander gekoppeld worden.

In den loop der voorgaande beschouwingen bestond reeds aanleiding om eenige op de Bernoulliaansche en verwante coëfficiënten betrekking hebbende werken of verhandelingen aan te halen. Hier moge thans nog eene opgave volgen van verschillende andere dergelijke stukken, eene opgave die evenwel in de verte geene aanspraak maakt op volledigheid ten aanzien der zoo uitgebreide litteratuur over dit onderwerp; van enkele dezer na te noemen stukken ben ik niet in de gelegenheid geweest kennis te nemen.

L. EULER, in *Novi Commentarii Academiae scientiarum Petropolitanae*, T. 14, pro anno 1759 (moet zijn 1769), Pars I, pag. 129—167.

DE LA PLACE, in *Mémoires de l'Académie royale des sciences, Paris*, Année 1777, pag. 99—122.

L. EULER, *Differenzial-Rechnung*, *übersetzt von* J. A. C. MICHELSEN, 2er Theil, 1790, pag. 125—158, 211—216, 256—262.

H. A. ROTHE, in C. F. HINDENBURG's *Sammlung combinatorisch-analytischer Abhandlungen*, zweijte Sammlung 1800, pag. 306—340.

C. KRAMP, *Elémens d'arithmétique universelle*, 1808, pag. 361—362.

S. F. LACROIX, *Calcul différentiel et calcul intégral*, 2e Ed., T. 1, 1810, pag. 254—257; T. 3, 1819, pag. 81—85, 107—116, 126 noot, 137, 145—146, 148—151, 443—445, 450, 732.

J. F. W. HERSCHEL, in *Philosophical Transactions of the Royal Society of London for the year* 1816. Part I, pag. 25—45.

EYTELWEIN, in *Abhandlungen mathem. Klasse der Berliner Akademie*, 1816—1817, pag. 28—41.

J. A. GRUNERT, *Mathematische Abhandlungen*, 1822, pag. 57—60, 93.

J. A. EYTELWEIN, *höhere Analysis*, 1824, I, pag. 488.

H. F. SCHERK, *Mathematische Abhandlungen*, 1825.

A. L. CRELLE—C. W. BORCHARDT, *Journal für die Mathematik*: H. F. SCHERK, in 4er Bd., 1829, pag. 299—304; G. LIBRI, in 7er Bd., 1831, pag. 57—67; M. OHM, in 20er Bd., 1840, pag. 11—12; VON STAUDT, in 21er Bd., 1840, pag. 372—374; STERN, in 26er Bd., 1843, pag. 88—91; O. EISENLOHR, in 28er Bd., 1844, pag. 193—212; O. SCHLÖMILCH, in 32er Bd., 1846, pag. 360—364; E. E. KUMMER, in 41er Bd., 1851, pag. 368—372; G. BAUER, in 57er Bd., 1860, pag. 256—272; G. BAUER, in 58er Bd., 1861, pag. 292—300; STERN, in 79er Bd., 1875, pag. 67—98; HERMITE, in 81er Bd., 1876, pag. 93—95; STERN, in id., pag. 290—294; STERN, in 84er Bd., 1878, pag. 267—269; J. C. ADAMS, (*Table of the values of the first sixty-two numbers of Bernoulli*), in 85er Bd., 1878, pag. 269—272; STERN, in 88er Bd., 1880, pag. 85—95; A. RADICKE, in 89er Bd., 1880, pag. 257—261.

DROBISCH, *Observationes analyticae*, 1831, pag. 16.

TH. CLAUSEN, in H. C. SCHUMACHER's *Astronomische Nachrichten*, 17er Bd., 1840, pag. 351—352.

J. A. GRUNERT, *Archiv der Mathematik und Physik*: O. SCHLÖMILCH, in 3er Th., 1843, pag. 9—18; O. SCHLÖMILCH, in 16er Th., 1851, pag. 411—418.

VON STAUDT, *de numeris Bernoullianis*, 1845.

Idem, idem, *commentatio altera*, 1845.

Comptes rendus de l'Académie des sciences, Paris: BINET, in T. 32, 1851, pag. 918—921; F. THOMAN, (*logarithmes des 40 premiers nombres de Bernoulli*), in T. 50, 1860, pag. 905—906; SYLVESTER, in T. 52, 1861, pag. 161—163, 212—214, 307—308; E. CATALAN, in T. 54, 1862, pag. 1030—1033, 1059—1062; LE BESGUE, in T. 58, 1864, pag. 853—856;

E. CATALAN, in id., pag. 902—903; CHASLES, in id., pag. 903—904; LE BESGUE, in id., pag. 937—938; E. CATALAN, in id., pag. 1105—1108; E. CATALAN, in T. 81, 1875, pag. 441—443; C. LE PAIGE, in id., pag. 966—967; E. LUCAS, in T. 83, 1876, pag. 539—541.

B. TORTOLINI—F. BRIOSCHI, *Annali di Matematica:* A. GENOCCHI, 1852; E. LUCAS, in Ser. 2, T. 8, 1877, pag. 56—79.

G. F. MEIJER, *Ueber Bernoullische Zahlen. Inauguraldissertation*, 1859.

J. BERTRAND, *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral. Calcul différentiel*, 1864, pag. 305–307, 325—326, 346–347, 347—354, 389—390, 421. *Calcul intégral*, 1870, pag. 143—145.

E. CATALAN, *Mélanges mathématiques*, 1868, pag. 110—132, 313—334.

E. CATALAN, in *Mémoires de l'Académie royale des sciences etc. de Belgique*, T. 37, 1869, pag. 1—19.

J. W. L. GLAISHER, in *Proceedings of the London mathematical society*, Vol. 4, 1871—1873, pag. 212—214.

J. C. ADAMS, in *Proceedings of the Cambridge philosophical society*, Vol. 2, 1872, pag. 269—270.

The Messenger of mathematics: J. W. L. GLAISHER, in 2d Ser., Vol. 2, (1873?), pag. 190—191; A. CAYLEY, in 2d Ser., Vol. 5, pag. 157—160; E. LUCAS, in 2d Ser., Vol. 7, pag. 139—141.

J. W. L. GLAISHER, (*Tables of the first* 250 *Bernoulli's Numbers* (*to nine figures*) *and their logarithms* (*to ten figures*)), in *Transactions of the Cambridge philosophical society*, Vol. 12, Part. 1, 1873, pag. 384—391.

C. LE PAIGE, in *Annales de la société scientifique de Bruxelles*, T. 1, B, 1875–1876, pag. 43—50.

Nouvelle Correspondance mathématique: E. LUCAS en E. CATALAN, in T. 2, 1876, pag. 328—338; E. LUCAS, in T. 3, 1877, pag. 69—73; CATALAN, in T. 4, 1878, pag. 119; E. LUCAS en H. BROCARD, in T. 5, 1879, pag. 282—285; E. LUCAS en RADICKE, in T. 6, 1880, pag. 69—72.

Nouvelles Annales de mathématiques: WORONTZOFF, in 2e Série, T. 15, 1876, pag. 12—19; E. LUCAS, in id., pag. 497—499; E. LUCAS, in 2e Série, T. 16, 1877, pag. 18—26, 157—160.

Bulletins de l'Académie royale des sciences etc. de Belgique: C. LE PAIGE, in 45e Année, 2e Série, T. 41, 1876, pag. 1017; E. CATALAN, in id., pag. 1018—1019.

Dr. L. SCHENDEL, *Die Bernoulli'schen Functionen und das Taylor'sche Theorem*, etc., 1876.

L. SEIDEL, in *Sitzungsberichte der mathem.-physik. Classe der k. b. Akademie der Wissenschaften zu München*, Band 7, Jahrg. 1877, pag. 157—187.

J. C. ADAMS, in *Report* 47th *meeting British Association in* 1877, pag. 8—14 (Transactions of the sections).

E. LUCAS, in *Bulletin de la société mathématique de France*, T. 6, 1877—1878, pag. 57—68.

GOHIERRE DE LONGCHAMPS, in *Annales scientifiques de l'école normale supérieure*, 2e Série, T. 8, Année 1879, pag. 55—80.

W. KÜTTNER, in SCHLÖMILCH's *Zeitschrift für Mathematik etc.*, 24er Jahrg., 1879, pag. 250—252.

A. RADICKE, *Die Recursionsformeln für die Berechnung der Bernoullischen und Eulerschen Zahlen*, 1880.

AANTEEKENING.

Op verschillende wijzen wordt de boven in het geval van $n = 4$, vergelijking (14), toegepaste formule voor den cosinus van het veelvoud van een boog in functie der magten van den cosinus van den boog zelf bewezen, waaromtrent men o. a. kan nazien:

S. F. LACROIX, *Calcul différentiel et calcul intégral*, 2e Ed., T. 1, 1810, pag. 76—85, 87—93, 263—275; T. 3, 1819, pag. 216—220, 605—611, 616—623.

G. F. W. BAEHR, in *Verslagen en meded. der Kon. Akademie van wetenschappen*, afd. Natuurk., Deel 10, 1860, pag. 86—92.

Nouvelles Annales de mathématiques: A. VACHETTE, in T. 20, 1861, pag. 155—174; KESSLER en L. VERHARNE, in id., pag. 264—266; MOURGUE, in 2e Série, T. 12, 1873, pag. 408—417; V. A. LE BESGUE, in id., pag. 425—431; DESBOVES, in 2e Série, T. 14, 1875, pag. 385—391.

J. BERTRAND, *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral. Calcul différentiel*, 1864, pag. 296—303.

J. A. SERRET, *Algèbre supérieure*, 3e Ed., T. 1, 1866, pag. 235—239.

YVON VILLARCEAU, in *Comptes rendus de l'Académie des sciences, Paris*, T. 82, 1876, pag. 1469—1471.

A. DESBOVES, *Questions de trigonométrie rectiligne*, 2e Ed., 1877, pag. 91—93.

E. CATALAN en RONKAR, in *Nouvelle Correspondance mathématique*, T. 6, 1880, pag. 100—105.

Het is mij niet bekend of ergens een bewijs voorkomt in den geest van het hier volgende, waardoor de bedoelde formule gevonden wordt door de gemakkelijker te betoogen formule voor de magt van den cosinus uitgedrukt in de cosinussen der veelvouden als het ware om te keeren.

Voor deze laatste formule, waarvan boven ter gelegenheid van (8_a) en (8_b) reeds werd opgemerkt hoe zij ook in dezen is vervat, heeft men namelijk onmiddellijk naarmate n oneven of even is:

$$(2\cos\varphi)^n=(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi})^n=\sum_{0}^{\frac{n-1}{2}\text{ of }\frac{n}{2}}{}_r\binom{n}{r}\left(e^{(n-r)i\varphi}.e^{-ri\varphi}+e^{ri\varphi}.e^{-(n-r)i\varphi}\right)=$$

$$=2\sum_{0}^{\frac{n-1}{2}\text{ of }\frac{n}{2}}{}_r\binom{n}{r}\cos(n-2r)\varphi\,,$$

behoudens dat, om overeenkomstige reden als voor (8_b) werd vermeld, in het geval van n even bij den laatsten, door $r=\frac{n}{2}$ bepaalden, term de getallencoëfficiënt $\frac{1}{2}$ moet worden voorgevoegd.

En wil men nu door middel hiervan bewijzen dat wederkeerig de iets meer zamengestelde formule

$$2\cos n\varphi=(2\cos\varphi)^n+n\sum_{1}^{\frac{n-1}{2}\text{ of }\frac{n}{2}}{}_l\frac{(-)^l}{l}\binom{n-l-1}{l-1}(2\cos\varphi)^{n-2l}$$

geldt, dan komt het er slechts op aan te doen zien dat als

men de voorgaande, behalve voor n zelf, ook gebruikt voor alle in aanmerking komende waarden van $n - 2\,l$ en de uitkomsten substitueert in de laatste formule, waardoor men deelende door 2 verkrijgt:

$$\cos n\varphi = \sum_{0}^{\frac{n-1}{2} \text{ of } \frac{n}{2}} {}_r \binom{n}{r} \cos(n-2r)\varphi + n \sum_{1}^{\frac{n-1}{2} \text{ of } \frac{n}{2}} {}_l \left\{ \frac{(-)^l}{l} \binom{n-l-1}{l-1} \sum_{0}^{\frac{n-2l-1}{2} \text{ of } \frac{n-2l}{2}} {}_r \binom{n-2l}{r} \cos(n-2l-2r)\varphi \right\}$$

alsdan dit laatste niet anders dan eene identiteit is. Met dat doel make men den coëfficiënt van een willekeurigen term $\cos(n - 2\,r)\,\varphi$ in het ontwikkelde tweede lid op, waartoe in het tweede gedeelte van dat lid de notatie r voor den veranderlijken aanwijzer slechts te vervangen is door $r - l$, mits gelijktijdig lettende dat, daar de oorspronkelijke grensaanwijzing $r \geqq 0$ alsdan overgaat in $r - l \geqq 0$, ook de grens $l \leqq \frac{n-1}{2}$ of $\frac{n}{2}$ van de eerste sommatie in dat tweede gedeelte behoort ingekort te worden tot $l \leqq r$. Zoodoende verkrijgt men dus voor den volledigen coëfficiënt van $\cos(n - 2r)\,\varphi$ de waarde:

$$\binom{n}{r} + n \sum_{1}^{r} {}_l \frac{(-)^l}{l} \binom{n-l-1}{l-1} \binom{n-2l}{r-l} =$$

$$= \frac{n}{r} \left\{ \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} + \sum_{1}^{r} {}_l (-)^l \frac{r!}{(r-1)!} \cdot \frac{1}{l} \cdot \frac{(n-l-1)!}{(l-1)!(n-2l)!} \cdot \frac{(n-2l)!}{(r-l)!(n-r-l)!} \right\} =$$

$$= \frac{n}{r} \left\{ \binom{n-1}{r-1} + \sum_{1}^{r} {}_l (-)^l \binom{r}{l} \binom{n-l-1}{r-1} \right\} = \frac{n}{r} \sum_{0}^{r} {}_l (-)^l \binom{r}{l} \binom{n-l-1}{r-1},$$

dat is (vergelijk de vroegere afleiding, in het geval van $n = 1$, van afgebroken teruggloopende betrekkingen uit $(4_l{}^{*})$ en $(4_l{}^{**})$): $\frac{n}{r} \Delta^r \binom{n-l-1}{r-1} = \frac{n}{r} \Delta^{r-1} \binom{n-l-2}{r-2} =$

$$= \frac{n}{r} \Delta^{r-2} \binom{n-l-3}{r-3} = \text{enz.} = \frac{n}{r} \Delta \binom{n-l-r}{0} = \frac{n}{r} \Delta\, 1 = 0.$$

Alle termen in het ontwikkelde tweede lid der te bewijzen identiteit komen dus werkelijk te verdwijnen — en deze uitspraak lijdt ook geene uitzondering voor den door $r = \frac{n}{2}$ bepaalden laatsten term in het geval van n even, daar diens coëfficiënt zoowel in het eerste als in het tweede gedeelte van het tweede lid der identiteit moet gehalveerd worden — behoudens alleen, zooals behoort, dat de door $r = 0$ bepaalde eerste term, dat is $\cos n\varphi$, waartoe het tweede gedeelte van het tweede lid wegens $l \overline{\overline{>}} 1$ niet kan bijdragen, tot coëfficiënt verkrijgt $\binom{n}{0}$, dat is de eenheid.

Het vorenstaande is meer eene verificatie dan eene regtstreeksche afleiding van de formule voor $2\cos n\varphi$ uit die voor $(2\cos\varphi)^n$. Evenwel zou het weinig moeite kosten om, de ontwikkeling van $2\cos n\varphi$ volgens de afdalende magten van $2\cos\varphi$ met onbepaalde coëfficiënten nederschrijvende, de bewerking zoodanige wijziging te doen ondergaan dat de waarden dier coëfficiënten achtervolgens uit elkander te voorschijn komen.

Op overeenkomstige wijze, of ook door de voor $2\cos n\varphi$ gevonden formule te differentiëren volgens φ, kan de formule

$$\sin n\varphi = \sin\varphi \sum_{0}^{\frac{n-1}{2} \text{ of } \frac{n-2}{2}} (-)^l \binom{n-l-1}{l} (2\cos\varphi)^{n-2l-1}$$

worden opgemaakt waarvan vroeger ter zake van vergelijking (17) sprake was. En was men omgekeerd met deze laatste formule begonnen, dan zou daaruit, niet alleen door differentiatie, maar ook, hetzij door $2\cos n\varphi = \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi} - \frac{\sin(n-1)\varphi}{\sin\varphi}$, waarbij te letten op $\binom{n-l}{l} + \binom{n-l-1}{l-1} = \frac{n}{l}\binom{n-l-1}{l-1}$, hetzij door $2\cos n\varphi = \frac{\sin(n+2)\varphi}{\sin\varphi \cdot 2\cos\varphi} - \frac{\sin(n-2)\varphi}{\sin\varphi \cdot 2\cos\varphi}$, waarbij te letten op $\binom{n-l+1}{l} - \binom{n-l-1}{l-2} = \frac{n}{l}\binom{n-l-1}{l-1}$, de formule voor $2\cos n\varphi$ weder kunnen worden teruggevonden.

Delft, Junij 1880.

N A S C H R I F T.

Wij zullen te dezer plaatse nog een paar voorbeelden van terugloopende betrekkingen tusschen de Bernoulliaansche coëfficiënten aanhalen, die wel weder als boven in het geval van $n = 1$ al die coëfficiënten in volgorde bevatten, maar zich toch van al de vroeger medegedeelde betrekkingen onderscheiden doordien zij met teekens zijn aangedaan die niet zooals toen telkens, doch thans slechts om den anderen term, afwisselen. Indien men namelijk in de voor willekeurige α en β geldende identiteit:

$$\left\{\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x\right\} . \frac{1}{2} \cot \alpha x = \frac{1}{2}\left\{\cos(\alpha+\beta)x + \cos(\alpha-\beta)x\right\}$$

bij ontwikkeling de coëfficiënten der gelijknamige magten van x gelijk stelt en daarna in de alsdan komende algemeene betrekking neemt $\alpha = 1$ en $\beta = i$, komt men neder op:

voor q oneven: $$\sum_{1}^{q}{}_{r} \left\{ \begin{matrix} (r \text{ oneven})(-)^{\frac{r-1}{2}} \\ (r \text{ even})\ (-)^{\frac{r}{2}} \end{matrix} \right\} \binom{2q+1}{2r} 2^{r} B_{2r-1} = 1,$$

en voor q even: $$\sum_{1}^{q}{}_{r} \left\{ \begin{matrix} (r \text{ oneven})(-)^{\frac{r-1}{2}} \\ (r \text{ even})\ (-)^{\frac{r-2}{2}} \end{matrix} \right\} \binom{2q+1}{2r} 2^{r-1} B_{2r-1} = q;$$

deze zijn de beide bedoelde betrekkingen.

Dezelfde bewerking toegepast op de identiteit:

$$\{cos(\alpha+\beta)x-cos(\alpha-\beta)x\}.\frac{1}{2}cot\alpha x=-\frac{1}{2}\{sin(\alpha+\beta)x-sin(\alpha-\beta)x\}$$

geeft daarentegen zooals te voorzien is de vroegere betrekkingen (4″ voor $n=2$) terug. Behalve de twee voornoemde identiteiten kan men evenzoo behandelen de beide daaruit door verwisseling van α en β voortvloeijende. Neemt men dan in alle vier, voor willekeurige φ, $\alpha=cos\,\varphi$ en $\beta=i\,sin\,\varphi$, dan worden nog vier terugloopende betrekkingen met goniometrische coëfficiënten gevonden, welke betrekkingen, uithoofde de vier oorspronkelijke homogeen zijn in α en β en daarin dus α en β steeds door $\alpha^2-\beta^2=1$ verbonden gedacht kunnen worden, denzelfden graad van algemeenheid bezitten als deze oorspronkelijke; als voorbeeld moge hier alleen de eerste van deze vier betrekkingen, namelijk:

$$\sum_{1}^{q}{}_{r}(-)^{r-1}\binom{2q+1}{2r}(2\,cos\,\varphi)^{2r}cos\,(2q-2r+1)\varphi\,.\,B_{2r-1}=$$
$$=2q\,cos\,\varphi\,cos\,2q\,\varphi+sin\,\varphi\,sin\,2q\,\varphi\,,$$

worden vermeld.

Soortgelijke betrekkingen als de boven in de eerste plaats genoemde, maar iets meer zamengesteld, zijn ook voor $\alpha=1$ en $\beta=i$ te vinden uit de identiteit:

$$\{sin\,(\alpha+\beta)\,x+sin\,(\alpha-\beta)\,x\}\,.\,\frac{1}{2}\,cot\,\frac{\alpha x}{2}=$$
$$=\frac{1}{2}\,\{2\,cos\,\beta\,x+cos\,(\alpha+\beta)\,x+cos\,(\alpha-\beta)\,x\}\,.$$

En eindelijk kan men in de betrekking in α en β, afgeleid uit de eerst aangehaalde identiteit, deze β achtervolgens vervangen door bijv. $\beta+\gamma$ en $\beta-\gamma$ en dan de som en het verschil der uitkomsten nemen, terwijl dezelfde bewerking ook op de tweede aangehaalde identiteit is toe te passen: zoodoende komen vier terugloopende betrekkingen waarin de

coëfficiënten op regelmatige wijze van drie willekeurige groot-hedeu α, β en γ afhangen en die bijv. door, uit $\omega^3 - 1 = 0$, te nemen $\alpha = 1$, $\beta = \omega$ en $\gamma = \omega^2$ soortgelijke beteekenis verkrijgen als de zoo straks besprokene voor twee groothe-den $\alpha = 1$ en $\beta = i$.

Al het hier opgemerkte is ook op de coëfficiënten T, C en E van toepassing te maken.

Delft, December 1880.

MEDEDEELING

BETREFFENDE DE

STERREBEELDEN,

WIER HOOGTE BOVEN DEN HORIZON, OP EEN BEPAALD OOGENBLIK VAN DEN NACHT, DOOR DE JAVANEN TEN BEHOEVE VAN DEN LANDBOUW GERAADPLEEGD WORDT,

DOOR

J. A. C. OUDEMANS.

Op uitnoodiging der Ned. Indische Regeering arbeidende aan eene *Wereldbeschrijving voor de inlandsche scholen*, waarvan reeds twee stukjes uitgegeven en nog twee andere voltooid, maar nog niet gedrukt zijn, tracht ik daarin bij elk onderwerp zooveel mogelijk af te dalen tot, of uit te gaan van de kennis, die de bewoner van Nederlandsch-Indië, hetzij inlander, hetzij Europeaan, van de verschijnselen, die beschreven of verklaard worden, kan geacht worden te bezitten.

Zoo had ik onlangs de verschijnselen te bespreken, die bekend zijn onder den naam van heliasche opkomst en heliaschen ondergang der sterren. Bij Egyptenaren, Grieken en Romeinen werden die verschijnselen steeds gebruikt om den landbouw naar te regelen, zooals in tallooze oude schrijvers beschreven is. Voor zoover mij bekend is doen onze boeren het niet, maar raadplegen den almanak; en in een klimaat, waar de heliasche opkomst of ondergang der sterren wegens betrokkenheid der lucht dikwijls zeer moeilijk waar te nemen is, is dat ook veel eenvoudiger. Het is ook alleen aan te nemen dat volken, bij wie de kalender niet zoo dagelijks in

toepassing komt, als dit bij de tegenwoordige beschaafde natiën het geval is, nog voor het zaaien of planten een kosmisch verschijnsel zullen raadplegen.

Ik vermoedde wel dat sommige volken van den O. Indischen Archipel in dit opzicht op dezelfde hoogte zouden staan als de Grieken en Romeinen. Hoewel het nederlandsch bestuur alleen de gregoriaansche tijdrekening gebruikt, is het toch bekend dat bij de oostersche volken, voor zoover zij Mahomedanen zijn, algemeen de arabische tijdrekening, de Hidjrah, gevolgd wordt, en daar in deze de jaren 354 of 355 dagen lang zijn, is zij voor de regeling van den landbouw ten eenenmale ongeschikt: het Arabische nieuwe jaar bijv. loopt in 33 van onze jaren omtrent het geheele tropische of gregoriaansche jaar door.

Nu dient zich de landbouwer wel in de eerste plaats te houden aan de opvolging der jaargetijden of moessons, maar de overgangen, bij ons van het eene jaargetijde in het andere, daar ginds van de eene moesson in de andere, is zoo moeilijk aan te geven, en wordt door de veranderlijkheid van het weder in zulke mate vervroegd of vertraagd, dat het zeer goed te begrijpen is, dat volken, die nog op eenen lagen trap van beschaving staan, en die niet in het bezit zijn van eene tijdrekening, die de lengte van het tropische jaar ten grondslag heeft, uitzien naar een middel om een bepaald tijdstip van het zonne-, d. i. van het tropische jaar aan te geven.

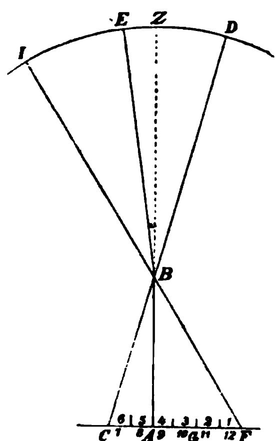
De Javanen maken daartoe gebruik van de schaduwen, die hetzij een vertikaal staande stijl AB, hetzij het menschelijk lichaam op den middag werpt. Java strekt zich uit ongeveer van $5^0 50'$ tot $8^0 30'$ zuiderbreedte, neemt men dus eene gemiddelde breedte van 7^0 en voor de helling der ekliptika $23^1/_2$ aan, dan is de zenithsafstand ZI der zon bij den zomerzonnestilstand, den 21sten Juni, $30^1/_2{}^0$ ten noorden, en bij den winterzonnestilstand, den 22sten December $ZD = 16^1/_2{}^0$ ten zuiden.

Wij hebben dus

Middagschaduw den 21 Juni $= AF = AB\, tg\, 30^1/_2{}^0 = 0{,}5890\, AB$

» » 22 Dec. $= AC = AB\, tg\, 16^1/_2{}^0 = 0{,}2962\, AB$

Men ziet hieruit dat $A\,F$ voor midden-Java nagenoeg $= 2\,A\,C$ is. De Javanen hebben van deze eigenschap der middagschaduwen gebruik gemaakt om hun zonnejaar in twaalf ongelijke maanden, mongso's genaamd, te verdeelen. De lijn $A\,C$ namelijk in 2 en de lijn $A\,F$ in 4 gelijke deelen verdeelende, zijn deze deelen van beide lijnen gelijk, en dus de geheele lijn $C\,F$ in 6 gelijke deelen verdeeld. Nu beweegt zich de schaduw van het punt B in één jaar van F naar C en terug van C tot F, en zij doorloopt dus in een jaar 2 maal die 6, dus 12 deelen. Daarop berust de verdeeling des jaars in 12 mongso's, die, zooals licht te begrijpen is, van ongelijke lengte zijn. Hoe weinig zeker de Javanen in deze hunne *tropische* tijdrekening waren, kan daaruit blijken, dat de mongso's, elk op zich zelf, niet overal even lang werden aangenomen en in de javaansche boeken ook niet altijd dezelfde lengte voor de mongso's werden aangegeven. Ja, als men de dagen die voor de mongso's gewoonlijk opgegeven werden, optelde, dan was de som niet 365 dagen, maar de meeste opgaven kwamen slechts tot 360 of 362 dagen.



Op voorstel van wijlen den heer A. B. COHEN STUART, heeft de Soesoehoenan van Soerakarta, Pakoe Boewono VII, in 1855 het mongso-jaar geregeld, zoodat het ten minste gemiddeld met het juliaansche gelijk loopt. De eerste dag van het mongso-jaar komt nu overeen met den 21sten of 22sten Juni, en de 12 mongso's hebben nu achtereenvolgens de onderstaande lengten: 41, 23, 24, 25, 27, 43, 43, 26, (of in een schrikkeljaar 27) 25, 24, 23, 41 dagen, te zamen 365 of 366 dagen.

De nieuwe indeeling heet in het javaansch Pranato-mongso; de 1e dag van het jaar 1 der Pranato-mongso is geweest de 22ste Juni 1855, en in deze tijdrekening zijn,

evenals in de juliaansche tijdrekening, de jaren 4, 8, 12, 16 enz., schrikkeljaar. Deze schrikkeljaren vallen dus niet met de onze samen, en van daar dat de begindagen der mongo's niet op één vasten dag van ons jaar vallen, maar een of twee dagen kunnen verschillen.

Hoewel ik nu bekend was met deze indeeling, waardoor aan de behoefte van den landbouw tot op eene zekere hoogte voldaan wordt, oordeelde ik het toch niet onwaarschijnlijk, dat, onafhankelijk van de middagschaduwen, en dus onafhankelijk van de mongso-rekening, ook wel voor den landbouw op de heliasche opkómst en ondergang van sterren of sterrebeelden zoude gelet worden.

Te vergeefs trachtte ik daaromtrent hier te lande inlichtingen in te winnen; het eenige, wat ik vond, was eene zinsnede, in het Dajaksche woordenboek, door den zendeling HARDELAND vervaardigd. Prof. VETH had de goedheid, mij daarop opmerkzaam te maken. Die zinsnede, voorkomende op het artikel *bintang*, ster, luidt aldus: »*Salampatar*, oder *bintang patendo*, der Orion. Der Orion (die drei grossen Sterne im Gürtel) bestimmt die Zeit des Reispflanzes, wenn er nämlich Abends mit dem Dunkel werden im Zenith steht."

Neemt men de rechte opklimming van ε Orionis, de middelste ster in den gordel van Orion, aan op $5^u\ 30^m$, en voor het donker worden des avonds half zeven, ware tijd, dan komt er voor den dag, die door den beschreven stand aangewezen wordt, 3 of 4 Maart. Op Java is op dezen tijd van het jaar de padi bijna rijp, de regentijd loopt dan op zijn eind.

Ik heb dus nu rechtstreeks op Java zelf mijne inlichting gezocht en geloofde dit niet beter te kunnen doen dan te schrijven aan den regent van Koedoes, raden Mas Adipati Ario Tjondro Negoro, die eene europeesche opvoeding genoten heeft, en daardoor ook het best in staat is, de bedoeling der gedane vragen te vatten, en een voldoend antwoord te geven; iemand die ook menigmaal, ook mij, zijne welwillendheid voor het geven van inlichtingen getoond heeft.

Ik ontving bij een schrijven, gedateerd 20 Februari jl., van hem het gewenschte antwoord, waaruit mijn vermoeden, dat de Javaansche landbouwer ook sterren raadpleegt, bewaar-

heid werd. In het kort komt het gebruik hierop neder, dat de Javaan van twee sterrebeelden, namelijk: 1°. de gordel en het zwaard van Orion, en 2°. de Pleiaden, de hoogte boven den horizon schat, hetzij bij het vallen van den avond, dus ongeveer een half uur na zonsondergang, hetzij des morgens bij het onzichtbaar worden der meeste sterren, dus ongeveer een half uur voor zonsopkomst, en dat eene zekere maat van die hoogten, door den regent Tjondro Negro aangegeven in graden, maar die, zoo als een nader van hem ontvangen schrijven mij bevestigde, door den landbouwer zelven op de gis geschat worden, de verschillende mongso's aangeeft.

Ik vond het niet onbelangrijk eens na te gaan hoe nauwkeurig deze opgaven met de waarheid overeenstemden, en heb ze daarom aan de berekening getoetst. Daartoe nam ik aan voor de zuidelijke breedte der waarnemingsplaats 7°:

voor ε Orionis R.O. = $5^u\ 30^m$ en $\delta = -\ 1^0\ 17'$,
voor η Tauri $3\ \ 40$ $+\ 23\ \ 44$.

Daar verder in de opgaven van den regent niet duidelijk aangegeven was, of de astronomische hoogten der genoemde sterrebeelden voor het begin of voor het midden voor elke mongso golden, zoo heb ik aangenomen voor het midden, daar dan, door vergelijking van mijne resultaten met de opgaaf, van zelf wel blijken zoude, of die opvatting goed was. Inderdaad gaf deze vergelijking zoowel verschillen in den éénen als in den anderen zin, zoodat het schijnt dat het tijdperk, waarvoor de opgaven gelden, ook niet veel juister is aan te geven, dan ongeveer het midden van elke mongso.

Ten einde nu ook anderen in de gelegenheid te stellen de opgaven van den regent te raadplegen, zal ik een gedeelte van den ontvangen brief en de geheele opgaaf zelve, de laatste woordelijk, mededeelen, (hoewel er ook aanwijzingen in voorkomen betreffende den groei van dieren en planten, die voor ons doel van geen belang zijn), om daarna het resultaat mijner berekening te behandelen.

Koedoes 20 Februari 1880.

Geachte Professor!

Het spijt mij zeer, dat ik u zoo lang heb moeten laten wachten, eer dat ik aan uw verzoek kon voldoen, dewijl ik de zaak eerst nauwkeurig moest onderzoeken, door vragen en wedervragen aan enkele personen in de desa's in mijn regentschap en omstreken, die met de sterrebeelden bekend zijn, welke de inlanders als teekens gebruiken voor den landbouw; daar het zeer natuurlijk is, dat niet iedereen weet uit te leggen, hoe zij die teekens gebruiken in verband met de zonnetijds-rekening, ... , die enkele personen worden door de bevolking *doekoens* genoemd, hetgeen beteekent arts, vroedmeester enz., ook een geleerde, die tot vraagbaak van een ieder dient; zij wijzen den stand der sterrebeelden en andere teekens aan in verband met de mongso's; mijn onderzoek is niet alleen gelukt met de teekens der sterrebeelden, maar ook met andere teekens, die de landbouwer gewoon is te gebruiken om zijn akker te bebouwen, ... ,

NAMEN DER STERREBEELDEN EN ANDERE TEEKENS, WAAROP DE JAVAANSCHE LANDBOUWERS LETTEN BIJ HET PLANTEN VAN PADI EN TWEEDE GEWASSEN.

De Javaansche landbouwer let bij het planten van padi en tweede gewassen op twee voorname sterrebeelden, namelijk de lintang woeloeh, het sterrebeeld der 7 Pleijaden, en de lintang loekoe, het sterrebeeld der drie Koningen *), vereenigd met de onder beschreven 3 kleine en 2 groote sterren in zuid-oostelijke richting van de lintang woeloeh †). Bij de lintang loekoe zijn drie kleine sterren naast elkaar, die eene rigting van noord naar zuid hebben §) en nog twee

*) δ, ϵ en ζ Orionis.

†) Ik gis dat dit de Hyaden moeten zijn, hoewel die in het vervolg niet meer genoemd worden.

§) c, θ en ι Orionis.

groote sterren die zuid-oost en zuid-west van de genoemde kleine sterren staan *).

Bij eene goede beschouwing dier groep sterren ontwaart men hare gelijkenis met een ploeg, de 3 Koningen stelt de ploeg voor, de drie kleine sterren de boom van den ploeg, en in de twee groote ziet de Javaan de karbouwen.

Naar den stand dezer sterrebeelden wordt het zonnejaar verdeeld in 12 mångsås of tijdvakken, gedurende elk welker verschillende waarnemingen worden gedaan. De voornaamste hiervan zullen wij bespreken.

Mångså kaså.

Dit is het eerste tijdperk van het zonnejaar, duurt 41 dagen, en wel ongeveer van 21 Junij tot en met 31 Julij.

De lintang loekoe en lintang woeloeh zijn 's morgens om $^1/_2$6 ure zichtbaar in het oosten op eene hoogte van 25^0 en 45^0 van den horizon.

De zon keert zuidelijk op en om 12 ure is de schaduw van een mensch 4 voet lang zuidwaarts.

De »Iwaks bettik", een kleine soort zoetwatervisch, krijgt een puntje op het hoofd.

Dit is de tijd om tweede gewassen te planten.

Mångså karå.

Het 2e tijdperk duurt 23 dagen, ongeveer van 1 tot en met 23 Augustus.

De lintang woeloeh staat aan het zenith en de lintang loekoe op ongeveer 70^0 aan den oostelijken hemel. De Iwaks bettik hebben twee putjes.

De zon gaat zuidelijk op, de schaduw is om 12 ure 2 voet zuidwaarts.

Mångså kĕtigå.

Dit is het derde tijdperk, duurt ongeveer van 24 Augustus tot en met 17 September, dus 24 dagen.

De lintang woeloeh staat voor zonsopgang ongeveer op

---

*) $\varkappa$ en β Orionis (Rigel).

70^0 aan den westelijken hemel en de lintang loekoe aan het zenith.

De bladeren der vruchtboomen beginnen af te vallen.

De Iwaks bettik hebben 3 putjes.

De zon staat noordwaarts, om 12 ure is de schaduw een voet zuidwaarts.

De tweede gewassen beginnen vruchten te dragen.

Mångså kapat.

Dit tijdperk is het vierde, duurt 25 dagen, ongeveer van 17 September tot en met 11 October.

De lintang woeloeh staat vóór zonsopgang op ongeveer 50^0 en de lintang loekoe op 70^0 aan den westelijken hemel.

De glattiks, rijstvogels, komen bij zwermen op de oro-oro om hun voedsel te zoeken.

De vruchtboomen krijgen nieuwe loten en jonge bladeren.

De randoevruchten worden rijp, de kapok zichtbaar en begint langzamerhand af te vallen.

De zon komt precies in het oosten op, en is dus 's middags de schaduw loodregt.

In dit tijdperk worden de meeste tweede gewassen geoogst.

Mångså kĕlimå.

Dit is het vijfde tijdperk van het zonnejaar, en duurt 27 dagen, ongeveer van 12 October tot en met 7 November.

De landbouwer observeert op den avond van zondag kliwon (bij de Javanen is dit reeds maandag legi, daar de dag begint met zonsondergang; derhalve wordt die avond malem sĕnēn legi genoemd) ongeveer $^1/_2$7 aan het noordoosten van den hemel een der lintang woeloeh, den volgenden malem sĕnēn een tweede; zoo ziet hij er elken volgenden malem sĕnēn een ster bij komen, totdat eindelijk de zesde weder op malem sĕnēn lĕgi zichtbaar is, dit tijdperk wordt selappan genoemd, dat is 35 dagen, het is de kring van eene week van 7 dagen en de pasar week van 5 dagen, op dien tweeden malem sĕnēn legi ziet hij 6 der sterren bij elkaâr, niet duidelijk, maar even als of zij achter een nevel staan, en laag aan den horizon.

In dien tijd valt de »boen oepas", vergiftige dauw, die zeer nadeelig werkt op den aanplant van tweede gewassen, ja zelfs volgens het beweren der landbouwers vernielt die dauw het tweede gewas, omdat de 6e ster slechts flaauw zichtbaar is.

De lempoejang, eene soort van boschplant, met gele wortels, die de Javanen voor medicijn gebruiken en bij de rijst eten, indien ze nog jong zijn, begint nieuwe wortels (boeng) uit te schieten.

De maoeq terik, eene soort van zeemeeuwen, komen op de velden, tegallans en oro-oro aan den voet van het gebergte, om larons of vliegende mieren te zoeken, die tegen dien tijd uitkomen. Door die vogels komen de paddestoelen of djamoer terik, die ontspruiten uit het vuil der vogels en door de inlanders bij de rijst worden gegeten.

De tjekithoets of tjilpvogels, die in andere tijden van het jaar, nooit 's morgens om 5 ure zingen, laten zich in die dagen op genoemd uur hooren; op gewone tijden zingen zij »tjekithoet tjekithoet", doch in die dagen hoort men 's morgens »tjekithoet thèng thèng".

De Iwaks bettik hebben vijf putjes op het hoofd.

De zon begint zuidwaarts te gaan, en om 12 ure 's middags is de schaduw van een mensch één voet lang noordwaarts.

In dien tijd worden de meeste tweede gewassen geoogst en begint men djagoeng te planten, terwijl de landbouwer zijne gereedschappen langzamerhand in orde maakt.

Mångså kanĕm.

Dit is het 6e tijdperk van het zonnejaar, het duurt 43 dagen, van 8 November tot en met 20 December; het begint goed te regenen, de landbouwers maken een aanvang met de bewerking hunner sawahs en strooijen zaadpadi uit.

De zesde ster der lintang woeloeh werd op malem sĕnēn legi flaauw zichtbaar en den volgenden maandag zag men dien duidelijk, allen waren duidelijk te observeren. De Javaansche landbouwer stelt zich te vreden met zes sterren van het beeld »de Pleijaden", aangezien de zevende niet met het bloote oog zichtbaar is.

Te gelijk met de ondergaande zon ziet men 's avonds de lintang loekoe boven den oostelijken horizon.

Die zelfde lintang loekoe wordt in dien tijd ook wel genoemd lintang djåkåtåwå, omdat door zijne verschijning de boen oepas verdwijnt.

De manoeqs blěkék, snippen, die te voren niet te zien waren, komen te voorschijn, om op de waterplassen hun voedsel te zoeken.

De kowangans, een soort langwerpige torren, die voor het invallen der regens niet te zien waren, komen van boven wellicht van het gebergte, en leggen hunne eijeren in het gras, dat half onder water staat.

De kemlandingans, een soort van boomspinnekoppen, die vóór dien tijd hunne webben horizontaal maakten, beginnen die thans in verticale richting te spinnen.

De vruchten beginnen rijp te worden.

De Iwaks bettik krijgen zes putjes.

De zon gaat meer zuidwaarts, en om 12 ure 's middags heeft de schaduw eene lengte van 2 voet.

Mångså kepitoe.

Het zevende tijdperk van het zonnejaar, duurt 43 dagen, ongeveer van 21 December tot en met 2 Februarij.

In dien tijd eindigt het uitstrooijen van zaadpadi, en begint men de oudst gezaaide padi over te planten.

De lintang woeloeh staat op ongeveer 45^0, en de lintang loekoe op 25^0 aan den oostelijken hemel.

De ouvi, een boschklimop, waarvan de knol kan gegeten worden, begint op te schieten, en de knol is rijp om gegeten te worden.

De eijeren der kowangans beginnen te breken, en de jongen, die de Javanen djoedèns noemen, komen te voorschijn.

De Iwak bettik hebben zeven putjes.

De visschen hebben nog geen machtige smaak, hunne koppen zijn nog week.

De jonge vischjes, bontangs genaamd, sterven in grooten getale.

De zon keert noordelijk terug, en om 12 uur is de schaduw drie voet noordwaarts.

Mångså kĕwåloe.

Dit is het achtste tijdperk, loopt ongeveer van 3 tot en met 28 Februarij en duurt dus 26 dagen.

In dien tijd wordt de jonge padi druk overgeplant, — de planttijd loopt ten einde, zoo ook het uitzaaien van padi, die niet overgeplant wordt en sawoer tinggal heet. Een en ander omdat op het einde van dezen mängså de lintang woeloeh en lintang loekoe 's avonds $^1/_2$ 7 ure staan aan het zenith en ongeveer op 70^0.

De Iwak bettik hebben acht putjes.

De djoedèns beginnen te vliegen; zij heeten dan lambangans.

De glagah begint te bloeijen.

De zon komt in het oosten op.

Mångså kĕsångå.

Dit tijdperk, hetwelk ongeveer van 1 tot en met 25 Maart, en dus 25 dagen duurt, is het negende.

De padiaanplant draagt aren, en wanneer daaronder veel ledige zijn, is het een teeken, dat ze te laat geplant hebben, — of de lintang loekoe was reeds aan het zenith, en dus de ploeg omgekeerd.

De lintang woeloeh staat op 70^0 aan den westelijken hemel en de lintang loekoe 's avonds $^1/_2$ 7 ure voorbij het zenith.

De Iwaks bettik hebben negen putjes.

De bloesem der glagah begint af te vallen.

De zon gaat over den evenaar.

Mångså sĕpoeloeh.

Dit is het tiende tijdperk van het zonnejaar, duurt 24 dagen, ongeveer van 25 Maart tot en met 17 April.

De padi komt tot rijpheid en de oogst neemt een aanvang.

De lintang woeloeh en lintang loekoe staan op ongeveer 45° en 65° van den westelijken hemel,

De Iwaks bettik hebben geen putjes meer.

De zon gaat noordelijker op en om 12 ure is de schaduw van 1—2 voet zuidwaarts.

Mångså dèsthå.

Dit is het elfde tijdperk, duurt 23 dagen, en wel ongeveer van 18 April tot en met 10 Mei.

De padioogst wordt algemeen. Het is het begin der korte dagen en koude nachten.

De lintang woeloeh is niet meer zichtbaar, en begint even als in de mångså kĕlimå weder tegen ½ 6 ure 's ochtends in het oosten op te komen.

De lintang loekoe is 's avonds om ½ 7 ure nog op 16° boven den westelijken horizon zichtbaar.

De randoeboomen beginnen te bloeijen.

De zon gaat steeds noordelijker op, en om 12 ure is de schaduw 3 voet zuidwaarts.

Mångså Sådå.

Dit is het twaalfde tijdperk van het zonnejaar, het duurt 41 dagen, ongeveer van 11 Mei tot en met 20 Junij.

Tegen het einde van dien mångså is de padioogst op de vlakte zoo goed als afgeloopen.

Men maakt de padi schoon, ze wordt gebost en in de schuren geborgen.

Men beijvert zich om de langdurende tweede gewassen, als indigo, katoen en djarak te planten.

Ook wordt de kort staande kedelé gezaaid, en wel tusschen de padi stronken in, zonder vooraf den grond te bewerken, terwijl hierna de grond wordt gereed gemaakt voor de teelt van djagoeng.

De lintang woeloeh is 's ochtends om ½ 6 ure in zijn geheel zichtbaar, 10° boven den horizon, kort daarna komt ook de lintang loekoe te voorschijn achter de lintang woeloeh, doch de ploeg staat geheel onderste boven.

De zon komt eindelijk op den noordelijken keerkring en de schaduw van een mensch is 3 voet zuidwaarts.

TJONDRO NEGORO.

Koedoes 2 Februari 1880.

Ik heb nu deze opgaven, voor zoover zij op sterrebeelden betrekking hebben, aan de berekening getoetst, en zal de resultaten dezer vergelijking hieronder mededeelen. Ik berekende dus, zoowel voor ε Orionis als voor Alcyone, de uurhoeken, overeenkomende, voor eene zuiderbreedte van 7°, met de opgegevene zenithsafstanden, en vond het volgende:

ε Orionis.		Alcyone.	
Zenithsafstand.	Uurhoek.	Zenithsafstand.	Uurhoek.
20°	19°18′ = 1u17m	40°	26°14′ = 1u45m
25	24 28 = 1 38	45	33 40 = 2 15
65	65 0 = 4 20	80	75 48 = 5 3
74	74 4 = 4 56	85	81 22 = 5 25 ,5

Het resultaat mijner vergelijking is nu in de volgende tabel begrepen. — Vooraf echter nog eene opmerking betreffende de Pleiaden. Daar Alcyone 23°44′ noorderdeclinatie heeft, culmineert deze ster op 30°44′ afstand van het Zenith eener plaats die 7° zuiderbreedte heeft. Toch wordt er bij de tweede mongso gezegd: de lintang woeloeh staat aan het Zenith, en bij de derde mongso, dat zij voor zonsopgang ongeveer op 70° aan den westelijken hemel staat, terwijl zij niet eens de hoogte van 60° bereikt. Hieruit volgt dus wel, dat die hoogten niet in den gewonen zin moeten aangenomen worden, maar alleen verklaard moeten worden, als bogen gemeten langs de parallel der ster zóó, dat in den horizon de hoogte = 0, in den meridiaan = 90° gerekend wordt. Nu is de halve dagboog voor Alcyone voor eene plaats op 7° zuiderbreedte = 86°54′ of nagenoeg 87°; om dus de opgegevene hoogten in uurhoek te herleiden zal het best zijn, ze met $^1/_{30}$ te verminderen en van de rest het complement te nemen.

Op die wijze verkreeg ik nu de volgende vergelijking:

Mongso.	Aantal dagen.	Grenzen.	Midden.	Hoogte. Loekoe.	Hoogte. Woelooh.	Middag-schaduw.	Berekening volgens Loekoe.	Berekening volgens Woelooh.	Verschil met de opgave, (midden der mongso) Loekoe.	Verschil met de opgave, (midden der mongso) Woelooh.
				te half zes des 's morgens.						
I. Kåsâ. . . .	41	21 Juni — 31 Juli	11 Juli	25^{0} O.	45^{0} O.	4 voet Z.	17 Juli	9 Juli	+ 6d	— 2d
II. Karå'. . .	23	1 Aug. — 23 Aug.	12 Aug.	70	90	2 » »	1 Sept.	24 Aug.	+ 20	+ 12
III. Katigå. .	24	24 Aug. — 16 Sept.	5 Sept.	90	70 W.	1 » »	21 Sept.	13 Sept.	+ 16	+ 8
IV. Kapat . .	25	17 Sept. — 11 Oct.	29 Sept.	70 W.	50 W.	Loodrecht	10 Oct.	3 Oct.	+ 11	+ 4
V. Kalimå. .	27	12 Oct. – 7 Nov.	25 Oct.			1 voet N.	18 Nov. ?			
VI. Kanem. .	43	8 Nov. — 20 Dec.	29 Nov.			2 » »				
				te half zeven des 's avonds.						
VII. Kapitoe.	43	21 Dec. — 2 Febr.	11 Jan.	25^{0} O.	45^{0} O.	3 » »	31 Dec.	24 Dec.	— 11	— 18
VIII. Kawåloe.	26	3 Febr. — 28 Febr.	16 Feb.	70^{0} O.	90^{0}		15 Feb.	7 Feb.	— 1	— 9
IX. Kasångå.	25	1 Mrt. — 25 Mrt.	13 Mrt.	voorbij het zenith.	70 W.		9 Mrt.	27 Feb.	— 4	— 14
X. Sadåså . .	24	25 Mrt. — 17 Apr.	6 April	65^{0} W.	45 W.	$1-1\frac{1}{2}$ v. Z.	1 Apr.	25 Mrt.	— 5	— 12
XI. Desthå. .	23	18 Apr. — 10 Mei	29 Apr.	16 W.	Begint weêr tegen half zes in het oosten op te komen.	3 voet Z.	21 Mei	30 Mei	+ 22	+ 31
				te half zes des 's morgens.						
XII. Sådå. . . .	41	21 Mei — 20 Juni	31 Mei		10^{0} O.	3 » »	8 Juni	4 Juni	+ 8	+ 4

Voor de 5e en 6e mongso wordt in plaats van hoogten de zichtbaarheid des avonds te half zeven opgegeven, en wel:

Zondag	legi,	een der Pleiaden.		Selapan, 35 dagen.
2e	»	avond,	de 2e » »	
3e	»	» ,	» 3e » »	
4e	»	» ,	» 4e » »	
5e	»	» ,	» 5e » »	
6e	»	legi ,	» 6e » »	

Op dezen avond alle zes zichtbaar, niet duidelijk, laag aan den horizon.

Zondag avond legi 6e Pleiade flauw zichtbaar.
volgende » » » » duidelijk »

Van de 20 verschillen, in de twee laatste kolommen der bovenstaande tabel opgegeven, zijn er zes, die grooter zijn dan de halve duur der mongso, waartoe zij behooren, zoodat de opgegevene hoogte eigenlijk op een dag zou passen, die geheel en al buiten de mongso ligt.

Zonderling zijn de opgaven betreffende de 5e mongso. De beteekenis van zondag kliwon, maandag legi, is deze, dat de Javanen gewoon zijn te gelijker tijd bij eene week van zeven en bij eene week van vijf dagen te tellen; de namen der dagen der vijfdaagsche week zijn pahing, pon, wagè, kliwon, legi. Malem sĕnèn beteekent woordelijk maandag avond, maar komt overeen met hetgeen de Europeaan noemt zondag avond, daar bij de Javanen de dag met zonsondergang begint. Malem sĕnèn legi is dus de avond vóór een maandag, die te gelijk in de vijfdaagsche week legi is, een volgende maandag is dus twee dagen verder in de vijfdaagsche week, en het duurt vijf weken, d. i. 35 dagen, eer er weder een maandag legi is. Nu bevat de geheele 5e mongso slechts 27 dagen, het zou dus wel kunnen gebeuren dat er in de geheele mongso niet eens een maandag legi was. En zoo er al een is, dan zou die in het eene jaar op den eersten dag der mongso, in het andere jaar op den laatsten dag

kunnen vallen; het spreekt echter van zelf, dat noch zevendaagsche, noch vijfdaagsche weekdag in eenige betrekking tot de hoogte der sterren op een bepaald uur van den dag staan, en dat deze alleen met den dag van het tropische (of eigenlijk van het siderale) jaar in verband staat.

Letten wij niet op die bijvoeging van weekdagen, dan merken wij op, dat telkens na 7 dagen op hetzelfde avonduur de Pleiaden 7 graden hooger staan; uit de opgaaf zou men dus tot deze gevolgtrekking komen, dát als bijv.: Alcyone, de helderste der Pleiaden, een half uur na zonsondergang zichtbaar wordt op 10° hoogte, de 2e in helderheid der Pleiaden zichtbaar wordt, op hetzelfde uur, dus bij even sterke schemering

	op	17	graden	hoogte
de 3e	»	24	»	»
de 4e	»	31	»	»
de 5e	»	38	»	»
de 6e	»	45	»	»

Het is de vraag of dit werkelijk zoo is. Er is hier geene sprake van heliaschen ondergang, maar van acronychische opkomst, de sterregroep staat dus in het oosten, terwijl de schemering in het westen is, onder die omstandigheden is het verschil in helderheid der lucht bij 17 en bij 45 graden niet zoo groot, dat het opgegevene verschil waarschijnlijkheid bezit. Het is dus te vermoeden, dat de berichtgever van den Regent hier òf zich door plantasie heeft laten meêslepen, of een volkspraatje heeft medegedeeld.

Mijns inziens is het besluit, dat uit deze opgave te trekken is, dit, dat de sterrenmethode, om het landbouwbedrijf naar te regelen, wanneer die met zulke onvolkomene hulpmiddelen wordt aangewend, als bij de Javanen het geval schijnt te zijn, niet zeer nauwkeurig is, en zeer te recht door den kalender vervangen is.

Ik moet hier nog opmerken dat, hoewel de regent van Koedoes deze berichten van eenen doekon in zijn regentschap ontvangen heeft, het niet zeker is, dat in andere residenties dan Japara dezelfde sterregroepen geraadpleegd

worden; daaromtrent bezit ik nog geene gegevens; mochten die mij later geworden, zal ik er, als zij de moeite waard zijn, wellicht later nog iets van mededeelen.

Aanmerking. Het is zeker aan de gemakkelijkheid toe te schrijven, waarmede de Pleiaden te herkennen zijn, dat dezelfde sterregroep door zooveel verschillende volken voor het besprokene doel zijn aangewend geworden, immers reeds HESIODUS zegt in zijne: *Ἔργα καὶ ἡμέραι*, vs. 383.

Πληιάδων Ἀτλαγενέων ἐπιτελλομενάων,
Ἄρχεσθ᾽ ἀμητοῦ ἀρότοιο δὲ δυσομενάων·

hetgeen door D. J. VAN LENNEP aldus vertaald wordt:

Als het zevental Pleiaden opwaarts klimt aan 's hemels baan,
Denk in tijds dan om Uw sikkel; om uw ploeg als ze ondergaan.

De lengte der Pleiaden bedraagt thans 58°; ten tijde van HESIODUS bedroeg zij ongeveer 36° minder dan thans, en dus ongeveer 22°. HESIODIUS zelf zegt, dat de Pleiaden 40 dagen onzichtbaar blijven, hij vervolgt namelijk:

Αἱ δ᾽ ἤτοι νύκτας τε καὶ ἤματα τεσσαράκοντα
κεκρύφαται;

bij het onzichtbaar worden na zonsondergang, (heliaschen ondergang), had de zon dus eene lengte van 2°, bij het zichtbaar worden vóór zonsopkomst (heliasche opkomst) van 42°, maar bij het regelen van het landbouwbedrijf werd ook gelet op het ondergaan vóór zonsopkomst, en het opkomen na zonsondergang.

GEMINUS noemt deze vier verschijnselen:

		Dagen, waarop dit verschijnsel voor de Pleiaden plaats greep.
heliasche ondergang	*κρύψις ἑσπερία*,	22 Maart
heliasche opkomst	*ἐπιτολὴ ἑωθινή*,	2 Mei
opkomen na zonsondergang	*ἐπιτολὴ ἑσπερία*,	4 Nov.
ondergaan voor zonsopkomst	*κρύψις ἑωθινή*,	25 Sept.

HESIODUS bedoelt nu met *Πληιάδων ἐπιτελλομενάων* blijkbaar de *ἐπιτολὴ ἑωθινή*, en met *δυσομενάων* eveneens de *κρύψις ἑωθινή*. Behalve dat koren niet in 40 dagen (van 22 Maart tot 2 Mei) van zaaien tot rijpen komen kan, blijkt het ook daaruit, dat in vers 615, nadat de wijnoogst besproken is, andermaal gezegd wordt:

. . . . *Αὐτὰρ ἐπὴν δὴ*
Πληϊάδες θ' Ὑάδες τε τό τε σθένος Ὠρίωνος
δύνωσιν, τότ' ἔπειτ' ἀρότου μεμνημένος εἶναι
(ὡραίου) . , ...

Van LENNEP verhaalt ook terecht:

Zij u voorts nog dit, mijn broeder! in 't opmerkzaam brein gegrift,
Dat gij als de regenstarren weêr aan 's hemels breede baan,
Met Orion en Pleiaden, *'s morgens* aan de kim vergaan,
Dat gij dan uw ploeggereedschap met der haast weêr voert in 't licht.

Dr. A. STEITZ (*Die Werke und Tage des Hesiodus, nach ihrer Composition geprüft und erklärt*, Leipzig 1869, p. 119) legt het ook zoo uit, en noemt ook Mitte Mai en Anfang November; in plaats van Mitte Mai had hij wellicht beter Anfang Mai kunnen zeggen, althans als het gezegde van HESODIUS waar is, dat de Pleiaden veertig dagen onzichtbaar blijven.

Utrecht, 10 Augustus 1880.

SUR UN THÉORÈME D'ABEL ET SUR LES FORMULES GONIOMÉTRIQUES QUI S'EN DÉDUISENT,

PAR

G. F. W. BAEHR.



Si l'on pose

$$\int_0^x \frac{dx}{\Delta x} = F(x),$$

où

$$\Delta x = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)},$$

on aura d'après un théorème d'Abel (*Oeuvres complètes, tome I, pag.* 355)

$$F(x_1) + F(x_2) + \ldots + F(x_\mu) = C, \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

pour toutes les valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$, dont les carrés x_1^2, $x_2^2 \ldots x_\mu^2$ satisfont à l'équation entière paire, de dégre 2μ,

$$f(x)^2 - \varphi(x)^2 (\Delta x)^2 = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

où, les polynômes entiers $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont quelconques, mais l'un des deux pair l'autre impair, et leurs coefficients supposés variables; C étant une constante, qui ne dépend pas des valeurs arbitraires attribuées à ces coefficients.

Si, en prenant tous ces coefficients égaux à zéro, l'équation (2) prend la forme

$$x^{2\mu} = 0,$$

c'est-à-dire, que toutes ses racines soient nulles, chacun des termes du premier membre de (1) devient zéro, et par suite la constante C sera alors nulle.

Abel a fait voir que l'on peut choisir les polynômes $f(x)$ et $\varphi(x)$ et déterminer leurs coefficients tellement, que $\mu-1$ quantités arbitraires $x_1, x_2 \ldots x_{\mu-1}$ soient racines de l'équation (2), laquelle donnera alors la racine x_μ en fonction algébrique des ces quantités arbitraires.

D'après la notation de Jacobi, posant $F(x) = u$, on a $x = \sin am\, u$, la formule (1) devient

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_{\mu-1} + u_\mu = 0,$$

et l'équation (2) donnera donc $\sin am\, u_\mu$, ou $\pm \sin am\, (u_1 + u_2 + \ldots + u_{\mu-1})$, en fonction algébrique de $\sin am\, u_1$, $\sin am\, u_2 \ldots$ etc.

Si le nombre μ est pair, ou $\mu = 2n$, il faudra poser

$$f(x) = a_0 + a_1 x^2 + a_2 x^4 + \ldots + a_{n-1} x^{2n-2} + x^{2n},$$

$$\varphi(x) = x(b_0 + b_1 x^2 + b_2 x^4 + \ldots + b_{n-2} x^{2n-4}),$$

qui contiennent $2n-1$ coefficients indéterminés, tandis que les quantités arbitraires $x_1, x_2 \ldots x_{2n-1}$ devront satisfaire à

$$a_0 + a_1 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{2n-2} + x^{2n} + (b_0 x + b_1 x^3 + \ldots + b_{n-2} x^{2n-3}) \Delta x = 0,$$

un des deux facteurs dans lesquels on peut décomposer l'équation (2).

On aura donc, entre les inconnues $a_0, a_1, \ldots a_{n-1}, b_0, b_1 \ldots b_{n-2}$ les $2n-1$ équations linéaires, que nous pouvons indiquer par

$$a_0 + a_1 x^2 \ldots + a_{n-1} x^{2n-2} + b_0 x \Delta x + b_1 x \Delta x \ldots + b_{n-2} x^{2n-3} \Delta x = -x^{2n} \left| \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2n-1} \end{matrix} \right.,$$

le signe à la droite du second membre indiquant que l'on considère le groupe de $2n-1$ équations obtenues en donnant à x successivement les indices $1, 2, \ldots, 2n-1$.

Il suffira d'en résoudre a_0, parce que l'équation (2) ordonnée a pour dernier terme a_0^2, et donne ainsi pour le produit des racines

$$x_0^2 \cdot x_1^2 \ldots x_{2n-1}^2 \, x_{2n}^2 = a_0^2,$$

d'où

$$x_{2n} = \pm \frac{a_0}{x_0 \cdot x_1 \ldots x_{2n-1}}.$$

Employant pour les déterminants une notation analogue à celle par laquelle on a représenté le groupe des $2n-1$ équations, on tire de celles-ci

$$a_0 = \frac{-\left| x^{2n} \cdot x^2 \cdot x^4 \ldots x^{2n-2} \cdot x \, \Delta x \cdot x^3 \, \Delta x \ldots x^{2n-3} \, \Delta x \right|_{x_1}^{x_{2n-1}}}{\left| 1 \cdot x^2 \cdot x^4 \ldots x^{2n-2} \cdot x \, \Delta x \cdot x^3 \, \Delta x \ldots x^{2n-3} \, \Delta x \right|_{x_1}^{x_{2n-1}}},$$

donc, divisant les lignes successives du déterminant au numérateur par $x_1, x_2, \ldots x_{2n-1}$, on obtient

$$x_{2n} = \pm \frac{\left| x^{2n-1} \cdot x \cdot x^3 \ldots x^{2n-3} \cdot \Delta x \cdot x^2 \, \Delta x \ldots x^{2n-4} \Delta x \right|_{x_1}^{x_{2n-1}}}{\left| 1 \quad \cdot x^2 \cdot x^4 \ldots x^{2n-2} . x \, \Delta x . x^3 \Delta x \ldots x^{2n-3} \Delta x \right|_{x_1}^{x_{2n-1}}};$$

pour déterminer le signe, on fera $n = 2$ et $x_3 = 0$, ce qui donne

$$x_4 = \pm \begin{vmatrix} x_1^3 \cdot x_1 \cdot \Delta x_1 \\ x_2^3 \cdot x_2 \cdot \Delta x_2 \\ 0 \quad 0 \quad 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 \cdot x_1^2 \cdot x_1 \, \Delta x_1 \\ 1 \cdot x_2^2 \cdot x_2 \, \Delta x_2 \\ 1 \quad 0 \quad 0 \end{vmatrix},$$

ou en développant,

$$x_4 = \pm (x_1^3 \, x_2 - x_2^3 \, x_1) : (x_1^2 \, x_2 \, \Delta x_2 - x_2^2 \, x_1 \, \Delta x_1)$$

et, divisant les deux termes du quotient par $x_1 x_2$,

$$x_4 = \pm \frac{x_1{}^2 - x_2{}^2}{x_1 \Delta x_2 - x_2 \Delta x_1},$$

en sorte que par la formule connue pour *sin am* $(u_1 + u_2)$ on conclut qu'il faut prendre le signe $+$.

Ainsi, transposant la colonne $x_{2n-1} \mid$ entre les colonnes $x_{2n-3} \mid$ et $\Delta x \mid$, c'est à dire, la faisant avancer de $n-1$ places vers la droite, l'on aura

$$x_{2n} = (-1)^{n-1} \frac{\left| x . x^3 \ldots x^{2n-3} . x^{2n-1} . \Delta x . x^2 \Delta x \ldots x^{2n-4} \Delta x \right| \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2n-1} \end{matrix}}{\left| 1 . x^2 \ldots x^{2n-4} . x^{2n-2} . x \Delta x . x^3 \Delta x \ldots x^{2n-3} \Delta x \right| \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2n-1} \end{matrix}} \ldots (3)$$

Si le nombre μ est impair, ou $\mu = 2n + 1$, il faudra poser

$$f(x) = x\,(a_0 + a_1 x^2 + a_2 x^4 + \ldots + a_{n-1} x^{2n-2} + x^{2n})$$

$$\varphi(x) = \quad b_0 + b_1 x^2 + b_2 x^4 + \ldots + b_{n-1} x^{2n-2},$$

et les $2n$ quantités arbitraires $x_1, x_2 \ldots x_{2n}$ devront satisfaire à l'équation

$$a_0 x + a_1 x^3 \ldots + a_{n-1} x^{2n-1} + x^{2n+1} + (b_0 + b_1 x^2 \ldots + b_{n-1} x^{2n-2}) \Delta x = 0,$$

en sorte que l'on aura entre les inconnues $a_0 \ldots a_{n-1}, b_0 \ldots b_{n-1}$ les $2n$ équations

$$a_0 x + a_1 x^3 \ldots + a_{n-1} x^{2n-1} + b_0 \Delta x + b_1 x^2 \Delta x \ldots + b_{n-1} x^{2n-2} \Delta x = -x^{2n+1} \left| \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2n} \end{matrix} \right.$$

d'où il faudra résoudre b_0, ce qui donne

$$b_0 = \frac{- \left| x . x^3 \ldots x^{2n-1} . x^{2n+1} . x^2 \Delta x . x^4 \Delta x \ldots x^{2n-2} \Delta x \right| \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2n} \end{matrix}}{\left| x . x^3 \ldots x^{2n-1} . \Delta x \;\; . x^2 \Delta x . x^4 \Delta x \ldots x^{2n-2} \Delta x \right| \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2n} \end{matrix}},$$

et, parce que l'équation (2) donne pour le produit des racines

$$x_1^2 . x_2^2 \ldots x_{2n}^2 x_{2n+1}^2 = b_0^2,$$

on aura

$$x_{2n+1} = -\frac{\left| 1 . x^2 \ldots x^{2n-2} . x^{2n} . x\Delta x . x^3 \Delta x \ldots x^{2n-3} \Delta x \right| \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2n} \end{matrix}}{\left| x . x^3 \ldots x^{2n-1} . \Delta x . x^2 \Delta x . x^4 \Delta x \ldots x^{2n-2} \Delta x \right| \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2n} \end{matrix}}, \ldots (4)$$

ayant égard que pour $n = 1$ on aurait

$$x_3 = \pm \begin{vmatrix} 1 . x_1^2 \\ 1 . x_2^2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1 . \Delta x_1 \\ x_2 . \Delta x_2 \end{vmatrix}$$

ou

$$x_3 = \pm \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_1 \Delta x_2 - x_2 \Delta x_1},$$

où il faut prendre le signe $-$.

Si l'on fait $x_{2n} = 0$ dans (4), tous les éléments de la $2n^{\text{ième}}$ ligne du déterminant au numérateur sont égaux à zéro, excepté le premier qui reste 1, et ce déterminant se réduit alors à

$$-\left| x^2 \ldots x^{2n-2} . x^{2n} . x \Delta x . x^3 \Delta x \ldots x^{2n-3} \Delta x \right| \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2n-1} \end{matrix};$$

pour le déterminant au dénominateur on peut écrire d'abord

$$(-1)^n \left| \Delta x . x . x^3 \ldots x^{2n-1} . x^2 \Delta x . x^4 \Delta x \ldots x^{2n-2} \Delta x \right| \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2n} \end{matrix}$$

parce qu'on a fait reculer de n places vers la gauche la colonne $\Delta x \mid$; faisant $x_{2n} = 0$, tous les éléments de la

$2n^{ième}$ ligne sont zéro, excepté le premier, qui devient **1**; ce déterminant se réduit donc à

$$(-1)^{n+1}\left| x \,.\, x^3 \ldots x^{2n-1} \,.\, x^2\Delta x \,.\, x^4\Delta x \ldots x^{2n-2}\Delta x \right|\begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2n-1}\end{matrix} \;;$$

chacun des déterminants réduits est divisible par le produit $x_1 \,.\, x_2 \ldots x_{2n-1}$, et remarquant que pour $x_{2n} = 0$ la formule (4) doit donner pour x_{2n+1} la même valeur que la formule (3) donne pour x_{2n}, on voit que les deux formules s'accordent.

Si maintenant, pour passer des fonctions elliptiques aux fonctions goniométriques, on fait $k = 0$, on aura

$$\int_0^x \frac{dx}{\Delta x} = u = arc.\sin x,$$

donc

$$x = \sin u, \qquad \Delta x = \cos u,$$

et les formules (3) et (4) donnent, écrivant a aulieu de u,

$$\sin(a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n-1}) = (-)^{n-1} \times$$

$$\frac{\left| \sin a \,.\, \sin^3 a \ldots \sin^{2n-1} a \,.\, \cos a \,.\, \sin^2 a \cos a \ldots \sin^{2n-4} a \cos a \right|\begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{2n-1}\end{matrix}}{\left| 1 \,.\, \sin^2 a \ldots \sin^{2n-2} a \,.\, \sin a \cos a \,.\, \sin^3 a \cos a \ldots \sin^{2n-3} a \cos a \right|\begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{2n-1}\end{matrix}}, \ldots (5)$$

$$\sin(a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n}) = -$$

$$\frac{\left| 1 \,.\, \sin^2 a \ldots \sin^{2n-2} a \,.\, \sin^{2n} a \,.\, \sin a \cos a \ldots \sin^{2n-3} a \cos a \right|\begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{2n}\end{matrix}}{\left| \sin a \,.\, \sin^3 a \ldots \sin^{2n-1} a \,.\, \cos a \,.\, \sin^2 a \cos a \ldots \sin^{2n-2} a \cos a \right|\begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{2n}\end{matrix}} \ldots (6)$$

Si l'on change a en $\frac{1}{2}\pi - a$, le premier membre de (5) devient

$$\sin\left[\frac{2n-1}{2}\pi - (a_1 + a_2 \ldots + a_{2n-1})\right] = \sin\frac{2n-1}{2}\pi\cos(a_1 + a_2 \ldots + a_{2n-1})$$
$$= (-1)^{n-1}\cos(a_1 + a_2 \ldots + a_{2n-1}),$$

et cette formule se change alors en

$$\cos(a_1 + a_3 \ldots + a_{2n-1}) =$$

$$+\frac{\left| \cos a . \cos^3 a \ldots \cos^{2n-1} a . \sin a . \cos^2 a \sin a \ldots \cos^{2n-4} a \sin a \right| \begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{2n-1} \end{matrix}}{\left| 1 . \cos^2 a \ldots \cos^{2n-2} a . \cos a \sin a . \cos^3 \sin a \ldots \cos^{2n-3} a \sin a \right| \begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{2n-1} \end{matrix}};$$

quand dans le déterminant au dénominateur on change la colonne $\cos^2 a \mid$ en $1 - \sin^2 a \mid$, ce déterminant devient la différence des deux déterminants

$$| 1 . 1 . \cos^4 a \ldots \cos^{2n-2} a . \cos a \sin a \ldots \cos^{2n-3} a \sin a |$$

et

$$| 1 . -\sin^2 a . \cos^4 a \ldots \cos^{2n-2} a . \cos a \sin a \ldots \cos^{2n-3} a \sin a | ,$$

dont le premier, ayant deux colonnes égales, est identiquement nul; donc le dénominateur peut être réduit d'abord au déterminant

$$- | 1 . \sin^2 a . \cos^4 a \ldots \cos^{2n-2} a . \cos a \sin a \ldots \cos^{2n-3} a \sin a | ;$$

ensuite, si dans celui-ci on change la colonne $\cos^4 a|$ en $(1-\sin^2 a)^2|$, ou $1-2\sin^2 a + \sin^4 a\,|$, on voit qu'il peut être partagé en trois déterminants, dont les deux premiers sont identiquement zéro, et continuant ainsi à introduire le sinus au lieu du cosinus, il sera réduit à

$$\pm |1 . \sin^2 a . \sin^4 a \ldots \sin^{2n-2} a . \cos a \sin a . \cos^3 a \sin a \ldots \cos^{2n-3} a \sin a| ;$$

si dans celui-ci on écrit successivement

$$\cos a \sin a (1 - \sin^2 a), \ \cos a \sin a (1 - \sin^2 a)^2, \ \ldots \text{ etc.}$$

au lieu de

$$\cos^3 a \sin a, \ \cos^5 a \sin a, \ \ldots \text{ etc.}$$

il sera enfin réduit à

$$\pm \left| 1.\sin^2 a.\sin^4 a \ldots \sin^{2n-2} a . \sin a \cos a.\sin^3 a \cos a \ldots \sin^{2n-3} a \cos a \right|$$

qui est, au signe près, le même que le dénominateur de (5).

Pour déterminer ce signe, comparons deux à deux les colonnes du déterminant primitif; on voit que s'il change de signe en réduisant certaine colonne $\cos^{2p} a \mid$ il en change aussi par la réduction de la colonne $\cos^{2p+1} a \sin a$; le signe définitif sera donc celui qui est introduit par la réduction de la colonne $\cos^{2n-2} a \mid$, avec laquelle ne correspond plus une colonne $\cos^{2n-1} a \sin a$, et comme le dernier terme du développement de $\cos^{2n-2} a = (1 - \sin^2 a)^{n-1}$ est $(-1)^{n-1} \sin^{2n-1} a$, on voit que ce signe sera $(-1)^{n-1}$.

De la même manière le numérateur peut être réduit à

$$\pm \mid \cos a . \cos a \sin^2 a \ldots \cos a \sin^{2n-2} a . \sin a . \sin^3 a \ldots \sin^{2n-3} a \mid ;$$

les colonnes, qui pendant la réduction font changer le signe, étant comparées deux à deux, il reste celle désignée par $\cos^{2n-1} a \mid$, ce qui, comme dans le cas précédent, fait voir que le signe définitif sera $(-1)^{n-1}$. Ainsi, on aura d'abord

$$\cos(a_1 + a_2 \ldots + a_{2n-1}) = \frac{\left| \cos a . \cos a \sin^2 a \ldots \cos a \sin^{2n-2} a . \sin a . \sin^3 a \ldots \sin^{2n-3} a \right| \begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{2n-1} \end{matrix}}{\left| 1 . \sin^2 a_1 \ldots \sin^{2n-2} a . \sin a \cos a . \sin^3 a \cos a \ldots \sin^{2n-3} a \cos a \right| \begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{2n-1} \end{matrix}};$$

quand au numérateur on échange $(n-1)$ fois deux colonnes entre-elles, savoir les colonnes $\cos a \mid$ et $\sin a \mid$, $\cos a \sin^2 a \mid$ et $\sin^3 a \mid \ldots$, $\cos a \sin^{2n-4} a$ et $\sin^{2n-3} a$, le déterminant devient: $(-1)^{n-1} \times$

$$\left| \sin a . \sin^3 a \ldots \sin^{2n-3} a . \cos a \sin^{2n-2} a . \cos a . \sin^2 a \cos a \ldots \sin^{2n-4} a \cos a \right|,$$

enfin, si dans celui-ci on porte la colonne $\cos a \sin^{2n-2} a \mid$ à la dernière place, c'est-à-dire, si l'on fait avancer cette

colonne de $n - 1$ places vers la droite, il doit être de nouveau multiplié par $(-1)^{n-1}$, et il obtiendra donc le signe $+$, en sorte que l'on aura

$$\cos(a_1 + a_2 \ldots + a_{2n-1}) =$$
$$\frac{\left|\sin a.\sin^3 a \ldots \sin^{2n-3} a . \cos a . \sin^2 a \cos a \ldots \sin^{2n-2} a \cos a\right|\begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{2n-1}\end{matrix}}{\left|1.\sin^2 a \ldots \sin^{2n-4} a . \sin^{2n-2} a . \sin a \cos a \ldots \sin^{2n-3} a \cos a\right|\begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{2n-1}\end{matrix}} \ldots (7)$$

On ne peut de cette manière obtenir $\cos(a_1 + a_2 \ldots + a_{2n})$, le nombre des éléments étant pair. Si l'on change dans ce cas a en $\frac{1}{2}\pi - a$, le premier membre de (6) devient

$$\sin(n\pi - (a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n})) = -\cos n\pi \sin(a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n})$$
$$= (-1)^{n-1} \sin(a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n});$$

donc, en vertu de la formule (6), on aura aussi

$$\sin(a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n}) =$$
$$(-1)^n \frac{\left|1.\cos^2 a \ldots \cos^{2n-2} a . \cos^{2n} a . \cos a \sin a \ldots \cos^{2n-3} a \sin a\right|\begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{2n}\end{matrix}}{\left|\cos a.\cos^3 a \ldots \cos^{2n-1} a . \sin a . \cos^2 a \sin a \ldots \cos^{2n-2} a \sin a\right|\begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{2n}\end{matrix}};$$

en effet, réduisant les déterminants comme dans les cas précédents, cette formule reprend sa forme primitive.

Mais en faisant dans la formule (7) $a_{2n-1} = 0$, tous les éléments de la $(2n-1)^{\text{ième}}$ ligne du déterminant au numérateur deviennent zéro, excepté celui de la $n^{\text{ième}}$ colonne, qui est $\cos a_{2n-1}$ et devient égal à l'unité; ce déterminant deviendra donc égal à celui que l'on obtient en effaçant cette ligne et cette colonne, multiplié par $(-1)^{2n-2} \times (-1)^{n-1} = (-1)^{n-1}$.

Au dénominateur tous les éléments de la dernière ligne deviennent zéro, excepté le premier; il sera donc égal au

déterminant obtenu en rayant cette ligne et cette colonne, et aura le même signe que le déterminant primitif. De plus, les deux déterminants réduits sont divisibles par le produit $\sin a_1 \sin a_2 \ldots \sin a_{2n-2}$, en sorte que l'on aura

$$\cos(a_1 + a_2 \ldots + a_{2n-2}) = (-1)^{n-1} \times$$

$$\frac{\left| 1 \,.\, \sin^2 a \ldots \sin^{2n-4} a \,.\, \sin a \cos a \,.\, \sin^3 a \cos a \ldots \sin^{2n-3} a \cos a \right| \begin{array}{l} a_1 \\ \vdots \\ a_{2n-2} \end{array}}{\left| \sin a \,.\, \sin^3 a \ldots \sin^{2n-3} a \,.\, \cos a \,.\, \sin^2 a \cos a \ldots \sin^{2n-4} a \cos a \right| \begin{array}{l} a_1 \\ \vdots \\ a_{2n-2} \end{array}}$$

ou, changeant n en $n+1$,

$$\cos(a_1 + a_2 \ldots + a_{2n}) = (-1)^{n} \times$$

$$\frac{\left| 1 \,.\, \sin^2 a \ldots \sin^{2n-2} a \,.\, \sin a \cos a \,.\, \sin^3 a \cos a \ldots \sin^{2n-1} a \cos a \right| \begin{array}{l} a_1 \\ \vdots \\ a_{2n} \end{array}}{\left| \sin a \,.\, \sin^3 a \ldots \sin^{2n-1} a \,.\, \cos a \,.\, \sin^2 a \cos a \ldots \sin^{2n-2} a \cos a \right| \begin{array}{l} a_1 \\ \vdots \\ a_{2n} \end{array}} \ldots (8).$$

Delft, Octobre 1880.

VERSLAG

OVER EENE

VERHANDELING DES HEEREN Dr. R. HORST,

GETITELD:

OVER BEVRUCHTING EN ONTWIKKELING VAN HERMELLA ALVEOLATA M. E.

(Uitgebracht in de Verg. der Afd. Nat. van 30 October 1880.)



De ondergeteekenden, uitgenoodigd om der Afddeeling voor Wis- en Natuurkunde der Koninklijke Akademie van Wetenschappen van advies te dienen ten opzichte van een opstel van den heer R. Horst, over bevruchting en ontwikkeling van *Hermella alveolata* M. Edw., hebben de eer hierover het volgende te berichten.

De in het Hollandsch geschreven verhandeling is 8 folio pagina's groot en gaat vergezeld van een elftal afbeeldingen; zij is gewijd, zooals het opschrift reeds aanduidt, aan de bevruchting en ontwikkeling van het ei van Hermella.

De schrijver behandelt eerst het bevruchtingsproces en deelt hierover het volgende mede:

Bij aanraking van spermatozoön en ei ontstaat er tusschen ei-inhoud en eivlies een ruimte, evenals dit waarschijnlijk bij alle bevruchte eieren het geval is. Tegenover de plaats, waar een spermatozoön bezig is met zijn kopje den dooierwand te doorboren, zag schrijver een protoplasma-uitlooper van den eidooier zich verheffen en het spermatozoön te gemoet gaan. Na het dooiervlies doorboord te hebben, dringt het spermatozoön in den protoplasma-uitlooper, die zich daarna weder terugtrekt.

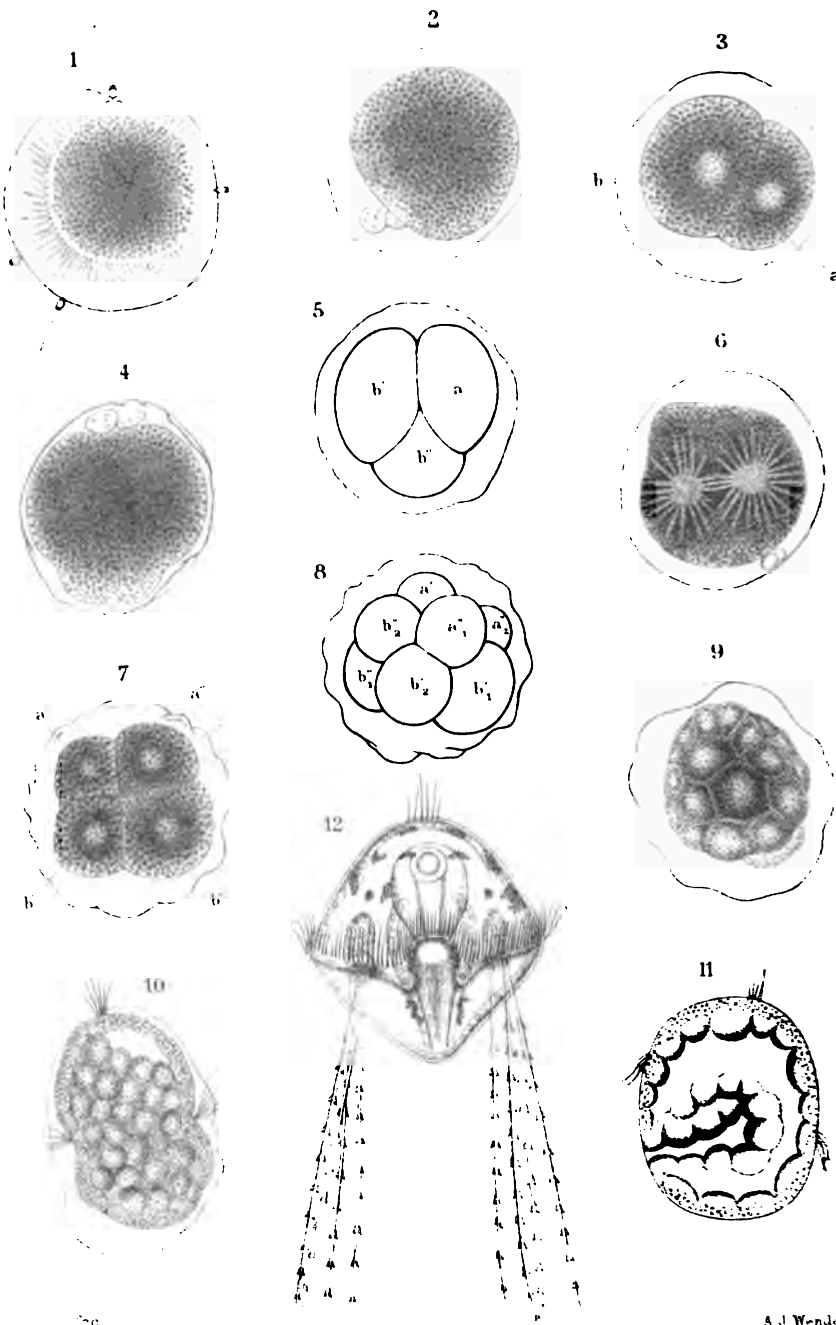
Omtrent het verder lot der spermatozoa kan de schrijver niets mededeelen, uithoofde de ei-inhoud zoo donker en korrelig wordt, dat ten slotte ook van het kiemblaasje niets meer te zien is. Binnen een uur na het indringen der spermatozoa treden de richtingsblaasjes uit.

Het klievingsproces vertoont geheel het karakter der inaequale splijting. Ongeveer 12 uur na de bevruchting is het embryo in een mesotroche larve overgegaan. Later wordt de primordiale lichaamsholte zichtbaar en beginnen zich de eerste sporen van het darmkanaal te vertoonen. Oudere larven bieden geen onbeteekenende verschillen aan met die van andere Kokerwormen.

De mededeeling van den heer Horst bevat dus een niet onbelangrijke bijdrage tot de kennis van de ontogenie der Kokerwormen en Uwe commissie aarzelt dan ook niet voor de opneming daarvan in de Verslagen en Mededeelingen te adviseeren.

Leiden en *Utrecht*, October 1880.

C. K. Hoffmann.
Th. W. Engelmann.


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
b'
a
b''
A. J. Wendel

OVER BEVRUCHTING EN ONTWIKKELING

VAN

HERMELLA ALVEOLATA Miln. Edw.

DOOR

Dr. R. HORST.

Onze kennis omtrent de eerste ontwikkelingstoestanden en larvenvormen der Polychaete Anneliden moet nog steeds vrij gebrekkig genoemd worden. Zij berust namelijk grootendeels op waarnemingen, gedaan aan broed dat uit zee gevischt werd, zonder dat het altijd mogelijk was de herkomst daarvan met zekerheid te bepalen; ook kon natuurlijk op deze wijze geene doorloopende reeks van op elkander volgende stadiën verkregen worden. Onder de eersten, die getracht hebben in deze leemte te voorzien en *ab ovo* de ontwikkeling eener Annelide te volgen, behoort Quatrefages, die in zijne »Mémoire sur l'Embryogénie des Annélides" *) de ontwikkeling der *Hermella alveolata* op uitvoerige wijze beschreven heeft. Twee jaren later heeft hij nogmaals zijne onderzoekingen over het bevruchtingsproces en de voorwaarden van ontwikkeling dezer Annelide in eene afzonderlijke verhandeling †) nedergelegd. Met het oog evenwel op het groot aantal jaren, dat verloopen is sedert deze waarnemingen gedaan werden, kwam mij een hernieuwd onderzoek niet ongewenscht voor. Daartoe werd ik dezen zomer in de gelegenheid gesteld, gedurende een kort verblijf in het Zoölogisch Station te Wi-

*) *Ann. des Scienc. Natur.* 3e Sér. Zoölogie, D. X, 1848, bl. 153.

†) *Ann. des Scienc. Natur.*, D. XIII, bl. 126.

mereux, waar Prof. GIARD met groote gastvrijheid eene plaats ter mijner beschikking stelde *).

De *Hermella alveolata* vormt hier op korten afstand in zee uitgestrekte banken, niet ongelijk aan koraalbanken, die bij lage ebbe gemakkelijk te bereiken zijn. Gelijk bekend is, zijn de geslachten gescheiden en in geslachtsrijpen toestand de wijfjes door haar roseachtige kleur gemakkelijk van de melkwitte mannetjes te onderkennen. Bovendien bieden zij het groote voordeel aan, dat zij den ganschen zomer ter voortplanting geschikt zijn. Om de kunstmatige bevruchting, die ook reeds door QUATREFAGES gedaan is, tot stand te brengen, is het niet noodig de dieren vooraf uit hun harde kokers te bevrijden; het is voldoende hen een weinig te verontrusten en weldra ziet men uit het eene uiteinde van den koker een stroom respectievelijk hetzij van eieren of van sperma te voorschijn komen.

De eieren hebben een diameter van ongeveer 0.08 m.m. met een groot kiemblaasje en duidelijke kiemvlek. De sterk korrelige dooier ligt aanvankelijk dicht tegen het dooiervlies aan, maar ter nauwernood zijn de spermatozoïden met het ei in aanraking gekomen, of de dooier trekt zich een weinig van den eiwand terug en tegelijk heeft er eene concentratie van de deutoplasmakorreltjes plaats, zoodat eene laag van helder doorschijnend korrelvrij protoplasma aan den omtrek zich ophoopt (couche enveloppante van FOL) †). Zeer waarschijnlijk berust de verwijdering tusschen den eiwand en den dooier niet alleen op zamentrekking van dezen laatsten, maar treedt ook water langs osmotischen weg door het dooiervlies naar binnen gelijk QUATREFAGES meent en door CALBERLA §) voor de eieren van *Petromyzon* aangetoond is; evenwel komt het mij dan eenigszins onverklaarbaar voor, dat het dooiervlies bij bijna alle bevruchte eieren terstond zóó

*) Ik maak van deze gelegenheid gebruik om mijne vakgenooten op dit gunstig gelegen en gemakkelijk te bereiken Kust-Laboratorium opmerkzaam te maken.

†) *Recherches sur la fécondation, etc.*

§) *Zeitschr. f. Wissensch.* Zoölogie D. XXX, bl. 437.

sterk geplooid is (fig. 7 en 8). Hoewel er op die wijze tusschen den dooier en het dooiervlies eene ruimte ontstaan is, zoo is het verband tusschen beiden toch niet geheel opgeheven, want van uit de korrelvrije randzone van den dooier gaan talrijke fijne, nauw zichtbare, uitloopers naar den eiwand, die als stralen den dooier omgeven (fig. 1); een volkomen gelijk verschijnsel is door CALBERLA tijdens de bevruchting aan het *Petromyzon*-ei waargenomen *). Ook SELENKA heeft bij *Toxopneustes variegatus* †) zulke uitloopers van de buitenste dooierlaag den geleimantel van het ei zien binnendringen; dit geschiedt evenwel tijdens de rijpwording van het ei, en de uitloopers verdwijnen langen tijd vóór de bevruchting, waarom hij hen dan ook met de voeding van het ei in verband brengt. Bij het *Hermella*-ei staan zij evenwel zonder twijfel met de bevruchting in betrekking. Is op een zeker punt eene spermatozoïde bezig met haar kopje den dooierwand te doorboren, dan ziet men hoe een dergelijke breede protoplasma-uitlooper, evenals de pseudopodie van een amoebe, de spermatozoïde te gemoet gaat en zoolang blijft bestaan tot deze laatste door het dooiervlies zich een weg gebaand heeft (fig. 1). Na verloop van ongeveer 20 minuten dringt de spermatozoïde het dooierverlengsel binnen en smelt daarmede zamen; de protoplasma-uitlooper wordt langzaam weder ingetrokken en zóó de spermatozoïde binnen de dooiermassa gevoerd §). De uitspraak van QUATREFAGES **) »Je crois inutile d'insister sur un point, savoir que jamais je n'ai vu un spermatozoïde pénétrer dans l'oeuf et s'y étaler", reeds door FOL gewraakt, mag dus beschouwd worden als op onvolledige waarneming te berusten. De lengte der protoplasma-uitloopers hangt eenigszins af van het snelle indringen der spermatozoïden, want, geschiedt dit spoedig, dan heeft de eiwand geene gelegenheid, zich ver van

---

*) loc. cit., bl. 458, pl. XXVII, fig. 7 en 8, pl. XXIX, fig. A en B.

†) Zoologische Studien, 1. Befruchtung des Eies von *Toxopneustes variegatus*, bl. 2, pl. 1, fig. 2 en 3.

§) Mijn vriend Dr. R. MONIEZ had de goedheid zich mede van de juistheid dezer waarneming te overtuigen.

**) loc. cit., bl. 128.

den dooier te verwijderen. Niet in alle uitloopers dringt natuurlijk eene spermatozoïde binnen; men ziet dikwijls een hunner na korten tijd weder verdwijnen en op een ander punt van den dooieromtrek een nieuwe voor den dag komen. Toch geloof ik dat wel meer dan ééne spermatozoïde het ei binnen dringt en meen ik het glinsterend bolletje in den eenen protoplasmaheuvel op fig. 1 als het overblijfsel daarvan te mogen beschouwen. Volgens FOL heeft ook de in het ei gedrongen spermatozoïde van *Toxopneustes lividus* het voorkomen »d'un grain assez réfringent" *). Omtrent het verdere lot der spermatozoïde kan ik niets mededeelen, uithoofde de ei-inhoud zoo donker en korrelig wordt, dat ten slotte ook van het kiemblaasje niets meer te zien is. Het is bekend dat de Zwitsersche natuuronderzoeker FOL het eerst aan de eieren van *Asterias glacialis* en *Toxopneustes lividus* heeft waargenomen, dat de dooier, op het oogenblik dat eene spermatozoïde hem nadert, haar een protoplasma-uitlooper — *cône d'attraction* gelijk hij het noemt — tegemoet zendt. Ter verklaring van deze raadselachtige werking op afstand ontwikkelt FOL †) de onderstelling, dat er misschien dunne onzichtbare uitloopers als stralen van de oppervlakte van den dooier uitgaan. Door een dezer uitloopers zou de spermatozoïde dan in verband met den dooier staan en zoo de werking op afstand slechts schijnbaar zijn. Inderdaad heeft dit vermoeden door de onderzoekingen aan het *Hermella*-ei eene groote mate van waarschijnlijkheid gekregen.

Ruim een uur na het indringen der spermatozoïde, heeft de dooier zijn ronden vorm verloren en is aan de eene pool sterk afgeplat (fig. 2). Op dit punt verzamelt zich een laagje helder korrelvrij protoplasma, uit het midden waarvan nu het eerste poolblaasje voor den dag treedt als eene volkomen glasheldere papil, met eenige weinige sterk lichtbrekende korreltjes, die zich weldra afsnoert, om een kwartier later door eene tweede gevolgd te worden. De dooier herneemt hierop zijne vroegere gedaante en weldra neemt

---

*) loc. cit., bl. 100.
†) loc. cit., bl. 250.

de klieving een aanvang. Quatrefages meent dat de eerste klievingsgroef, die het ei in twee ongelijke blastomeren verdeelt, op eene willekeurige plaats van het dooieroppervlak, nu eens hier, dan eens daar, zich vertoont; ik geloof evenwel dat zulks niet juist is, want steeds zag ik die klievingsgroeve of het eerste klievingvlak liggen in de richting van het punt waar de poolblaasjes uitgetreden waren, evenals zulks door Hallez *) bij *Leptoplana tremellaris* gezien is en ook door Selenka bij *Toxopneustes variegatus* in de meeste gevallen werd waargenomen. De uitspraak van Stossich †) »le vesichette direttrici non servono ad altro che a determinare il punto di partenza e la direzione della prima insolcatura" schijnt mij van alle hypothesen omtrent de beteekenis der poolblaasjes door Semper, Selenka, Rabl, Jhering, e. a. opgesteld, het meest in overeenstemming met onze tegenwoordige kennis omtrent dit punt. Zij verdienen dan terecht met hun ouden naam van »Richtungskörper" bestempeld te worden.

Hetgeen omtrent het verder verloop der klieving door Quatrefages wordt medegedeeld, laat veel te wenschen over; volgens zijne waarnemingen geschiedt de klieving zoo onregelmatig, dat hij op duizenden eieren er geen twee gezien heeft waar dit proces op dezelfde wijze plaats had. Mijne onderzoekingen hebben mij evenwel tot eene andere uitkomst geleid en ik geloof dat Fol §) terecht van deze verhandeling zegt »eene reeks verschijnselen zijn als normale beschreven, hoewel zij klaarblijkelijk pathologisch zijn, en het is zelfs moeilijk in de beschrijving te onderscheiden wat tot deze laatste groep van verschijnselen behoort." Ik moet evenwel opmerken dat deze onnauwkeurigheden eenigszins te verontschuldigen zijn, deels door de kleinheid der eieren, die maakt dat het klievingsproces niet gemakkelijk is te volgen, deels

*) Contributions à l'Hist. Natur. des Turbellariés.

†) Trasformazione della vesica germinativa ez. *Estratto del Bollet. della Sc. natt. Ann.* III, (1876).

§) loc. cit., bl. 60.

door de omstandigheid dat inderdaad vele eieren zich abnormaal klieven en niet tot volkomen ontwikkeling geraken.

De klieving van het ei der *Hermella alveolata* schijnt groote overeenkomst aan te bieden met hetzelfde proces van het ei der Najaden, gelijk dit door FLEMMING is beschreven *) en van *Mytilus edulis*, volgens THÉOD. BARROIS †). Het ei verdeelt zich de eerste maal gewoonlijk in twee klievingsbollen, die ongelijk van grootte zijn, ofschoon ik geen verschil in de hoeveelheid deutoplasma bij hen heb kunnen waarnemen (fig. 3). Evenwel doet zich het eigenaardig verschijnsel voor, dat er, bij een groot aantal eieren, in plaats van twee blastomeren, terstond drie optreden. Men ziet dan op het punt, juist tegenover de plaats waar de poolblaasjes zijn uitgetreden, de dooier papilvormig uitgroeien (fig. 4); dit gedeelte, dat armer aan deutoplasma en dien tengevolge doorschijnender is dan het overige van den dooier, wordt dan de onparige van de drie klievingsbollen, die nu gelijktijdig ontstaan (fig. 5). Tijdens de vorming dezer 3 blastomeren nam ik in de onderste helft van den dooier de bekende amphiaster waar (fig. 5). STOSSICH §) heeft bij de ontwikkeling van *Serpula*-eieren ook het ontstaan van 3 blastomeren bij de eerste klieving nu en dan waargenomen, eveneens zonder nadeelige gevolgen voor het tot stand komen van het embryo. Waren er bij de eerste klieving slechts twee blastomeren ontstaan, dan snoert van de grootste van deze twee een kleinere bol zich af, zoodat nu hetzelfde stadium van 3 langs anderen weg bereikt is. Hierop volgt een stadium van 4 klievingsbollen ten gevolge der deeling van *a* (fig. 5), de kleinste der twee eerstgenoemde, zoodat het ei nu bestaat uit een grooten bol, overdekt door 3 kleinere (fig. 7). Deze deeling herhaalt zich in het volgende stadium zoodanig, dat ook de groote klievingsbol *b'* nog daaraan deelneemt en een blastomeer afscheidt, die zich naast de overige voegt en in voorkomen daarmede geheel overeenstemt (fig. 8). Eerst van nu af

---

*) *Sitzungsber. Kaiserl. Akad.*, Wien 3e Abth., Bd. LXXI, bl. 81.

†) *Bullet. scient. du Dép. du Nord.* T. XI. 1879.

§) *Sitzungsber. Kaiserl. Akad.*, Wien 1e Abth., LXXVII Bd., bl. 533.

schijnt de tegenstelling tusschen een vegetatief en een animaal gedeelte van den dooier voor goed op te treden. Door herhaalde klieving der animale blastomeren wordt nu het vegetatieve deel weldra omgroeid (fig. 9) en op die wijze ten slotte een amphiblastula gevormd.

Vóór het intreden van elke nieuwe klieving versmelten als het ware de oude blastomeren eerst weder met elkander en verdwijnen de groeven waardoor zij gescheiden waren bijna geheel; dit verschijnsel werd ook door RABL *) bij de klieving van het *Planorbis*-ei waargenomen en beschreven, en schijnt eveneens door QUATREFAGES opgemerkt te zijn: »la masse vitelline, après être arriveé à un certain degré de division, éprouve un mouvement contraire, un mouvement de concentration". Ongeveer 12 uren na de bevruchting is het embryo in eene mesotroche larve overgegaan, die, behalve den gordel van ciliën om het midden, nog een bundel lange trilharen aan den koppool draagt. Wellicht zijn dit de lange tentakels, die QUATREFAGES aan het vooreinde der larven meent waargenomen te hebben. Zijne voorstelling, als zoude het geheele lichaam der larven, uitgezonderd de beide uiteinden, met trilciliën bedekt zijn, evenals bij de *Terebelliden*, is dus onjuist; blijkbaar verkeerde hij onder den indru.. der kort te voren door M. EDWARDS gepubliceerde onderzoekingen. Terwijl het embryo bij zijne verdere ontwikkeling zich dicht tegen het oorspronkelijke dooiervlies aanlegt, hebben de ectodermcellen hun embryonaal karakter verloren en zijn door hun helder voorkomen en sterk korreligen inhoud van de donkere geelachtige endoderm-bollen duidelijk onderscheiden (fig. 10). Langzamerhand begint de larve hare verlengd rolronde gedaante te verliezen, uithoofde het boven den trilzoom gelegen gedeelte zich sterker begint te ontwikkelen en meer en meer bol wordt. De primordiale lichaamsholte wordt zichtbaar en de eerste sporen van het darmkanaal beginnen zich te vertoonen (fig. 11). Fig. 12 vertoont eene larve, vier dagen oud, van de buik-

---

*) *Morphologisches Jahrbuch*, Bd. V, bl. 562.

zijde gezien. Het praeorale gedeelte heeft nog meer de overhand gekregen en eene koepelvormige gedaante aangenomen, zoodat de mondopening eenigszins benedenwaarts gekeerd is en de zoom, waarop de trilharen geplaatst zijn, sterk naar buiten uitspringt en als een soort van mantel over het postorale deel heenbuigt. De mond voert in een wijden oesophagus die met trilciliën bekleed en door eene ringvormige insnoering van den peervormigen maagzak gescheiden is, welke met een terminaal geplaatste anus buitenwaarts mondt. Eene groeve, met trilciliën bekleed, voert langs de buikzijde naar de mondopening. Ter zijde van het darmkanaal ligt links en rechts eene groep cellen, waaruit een viertal provisorische borstels ontspringen. Aan de rugzijde van het praeorale gedeelte zijn twee bruine oogvlekjes waarneembaar.

De larve, als zij 12 dagen oud is,verschilt van de afgebeelde alleen door haar meerdere grootte, wijl het postorale gedeelte zich kegelvormig verlengd heeft; bovendien is het aantal borstels toegenomen tot een twaalftal. De verdere metamorphose was ik tot mijn leedwezen niet in de gelegenheid langer te volgen; ook is het mij niet gelukt in het water rondom de *Hermella*-banken oudere stadiën aan te treffen. Wellicht ware anders daardoor eenig meerder licht verspreid over de verwantschap dezer merkwaardige wormen met andere Anneliden-familiën. Voor zooverre ik nu de larve heb leeren kennen, biedt zij geene onbeteekenende verschillen aan met de ons bekende larvenvormen van andere Kokerwormen; alleen de larve van *Terebellides Stroemii* vertoont eenige overeenkomst *).

Utrecht, 24 September 1880.

---

*) Willemoes-Suhm, Biologische Beobachtungen über niedere Meeresthiere. *Zeitschr. für Wissensch. Zool.* Bd. XXI.

VERSLAG

OVER DE

BEPROEVING VAN BLIKSEMAFLEIDERS,

UITGEBRACHT DOOR DE HEEREN

BOSSCHA, VAN DER WAALS en GRINWIS,

IN DE

VERGADERING VAN 27 NOVEMBER 1880 DER AFDEELING NATUURKUNDE VAN DE KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN.



De vraag, door den Generaal-Majoor, Inspecteur der Genie, in zijnen brief van 7 Augustus 1880 N⁰. 254 tot de Afdeeling gericht, kan op tweeërlei wijze worden opgevat. Het onderzoek »in hoeverre bliksemafleiders in voldoenden staat verkeeren om aan hunne bestemming te kunnen beantwoorden" kan namelijk zoowel betrekking hebben op den staat, waarin de bliksemafleider verkeert onmiddellijk na zijne vervaardiging, als op den staat waarin hij verkeert eenigen tijd nadat hij werd opgesteld. Het eerste onderzoek betreft de vraag: is de bliksemafleider goed aangelegd en deugdelijk vervaardigd; het tweede onderzoek betreft de vraag: is de bliksemafleider, wat zijn beschermend vermogen betreft, nog in denzelfden staat als onmiddellijk na zijne opstelling.

Uwe Commissie onderstelt dat alleen de tweede vraag is bedoeld. Bij de eerste inrichting toch behoort men zich door toezicht bij de vervaardiging, en door den afleider, wanneer hij gereed is, nauwkeurig in oogenschouw te nemen, te overtuigen of hij beantwoordt aan de regelen en voorschriften, die ten aanzien van aanleg en samenstelling in de onder-

scheidene hierover bestaande verhandelingen en verslagen zijn gegeven. Die regelen en voorschriften betreffen de samenstelling, inrichting en plaatsing van spits en stang; het beloop van den afleider over het te beschermen gebouw; zijn verband met metalen voorwerpen op de oppervlakte van het gebouw; de toe te laten afstand tot metalen voorwerpen in het gebouw; de vraag of deze al dan niet met den afleider moeten worden verbonden; de dikte aan den geleider te geven, naar gelang van het metaal waaruit hij is samengesteld; in het bijzonder: de goede en blijvende verzekering van het geleidend verband bij alle lasschen en aanhechtingen, en eindelijk het beloop en de inrichting der grondleiding.

Al heeft deze keuring van den nieuw opgerichten afleider — eene keuring, die door nauwlettende inspectie van alle deelen kan geschieden — een voldoenden uitslag gehad, zoo moet toch, dit wordt meer en meer erkend, op vaste tijden onderzocht worden of de afleider niet door wijzigingen in het gebouw, zoowel uit- als inwendige, door werktuigelijke beleediging, en het allermeest door atmosfeerische invloeden, door inwatering en oxydatie van lasschen en aanhechtingen, onveilig geworden is. Dit onderzoek kan wel grootendeels, doch niet geheel, door inspectie van alle deelen worden verkregen. Is bij de opstelling aanteekening gehouden van het beloop en de bevestigingswijze van den afleider, van de op en in het gebouw aanwezige metaalmassaas, dan kan in den regel gemakkelijk worden nagegaan wat er in dit opzicht veranderd is in den oorspronkelijken toestand en in hoeverre hierdoor bijzondere voorzieningen vereischt worden. De veranderingen evenwel, die in het geleidingsvermogen van den geheelen afleider kunnen ontstaan zijn door slecht geleidende metaaloxydlagen in lasschen en aanhechtingen, of door het wegroesten van sommige deelen van den geleider, zijn veelal niet op het oog te onderkennen. Uwe Commissie meent dat aangaande dit deel van het onderzoek van den afleider meer bijzonder het gevoelen van de Afdeeling gevraagd wordt.

Zij acht eene afdoende wijze van onderzoek alleen mogelijk door het bepalen van den weerstand des afleiders en het ver-

gelijken van de daarvoor gevondene waarde bij den weerstand, dien de afleider onmiddellijk na de opstelling bleek te bezitten. Het bepalen van den weerstand van den afleider onmiddellijk na zijne opstelling, dat alzoo noodig is voor latere vergelijkingen, kan dan tevens een middel zijn om ook de eerste keuring te verscherpen. Immers, wanneer lengte, dikte en metaalsoort van den afleider bekend zijn, is het gemakkelijk, ten naastebij te berekenen, welken weerstand de afleider moet bezitten om geen vermoeden te geven van een slecht verband van enkele deelen.

Het meten van den weerstand kan ten eerste betrekking hebben op den geheelen afleider, van de spits tot *in* den grond, of ten tweede alleen op den geleider tot *aan* de grondgeleiding, die bestaan kan uit een in water of vochtige aarde geplaatste aardplaat of uit de ijzeren buizen van een gas- of waterleiding, waarmede de afleider in verbinding is gebracht.

De weerstand van de grondgeleiding is in den regel zeer veel grooter dan die van den afleider. Daar voor eene juiste bepaling van den weerstand noodig is, dat het te meten bedrag een niet te klein deel zij van den geheelen weerstand, die in de keten is opgenomen, zal het, in het eerste geval, wanneer men ook den weerstand van de grondgeleiding wil kennen, wenschelijk zijn, de meting te splitsen en eerst te bepalen den weerstand van den afleider tot *aan* de grondgeleiding, en daarna den weerstand van de grondgeleiding alleen.

De methode van Ohm zal in beide gevallen waarschijnlijk het eenvoudigst tot het doel voeren.

Deze methode berust op de stelling dat, wanneer de electriciteitsbron onveranderd blijft, de stroom in eene keten omgekeerd evenredig is met den weerstand der geheele geleiding. Wordt dus zekere stroom i_1 waargenomen wanneer de weerstand der geheele geleiding $R + x$ is, de stroom i_2 daarentegen wanneer uit de keten de weerstand x is weggenomen, dan is

$$i_1 : i_2 = R : R + x \quad \text{of} \quad R = \frac{i_1}{i_2 - i_1}\, x .$$

Doet men de eerste proef, in plaats van met den geleider

x, met een geleider van den weerstand a, en is in dit geval de stroom i_3, dan is evenzoo

$$R = \frac{i_3}{i_2 - i_3}\, a.$$

Uit deze twee vergelijkingen is de verhouding van x tot den bekenden weerstand a te berekenen.

De metingen kunnen verricht worden met behulp van eene tangenten-boussole, — de boussoles van SIEMENS en HALSKE verdienen om hare goede bewerking en gemakkelijke verplaatsbaarheid en opstelling de voorkeur, — en van een kleine weerstandsbank.

De metingen moeten verricht worden door een persoon, die met dergelijken arbeid vertrouwd is. Het verdient aanbeveling, haar op te dragen aan een goed geoefend telegraafbeambte, die eenige theoretische kennis heeft. Ter bepaling van den weerstand des afleiders, wordt een verbindingsdraad vastgemaakt aan het bovenste deel van den afleider, zoo na mogelijk aan de spits. Voor een goed geleidende aanhechting moet bijzonder zorg gedragen worden. De verbindingsdraad leidt tot aan de plaats des waarnemers. Van hier gaat een tweede draad naar de aardplaat of den grondgeleider.

Bij den waarnemer zijn in de keten opgenomen een Voltasche cel: bij voorkeur een koolzinkelement van BUNSEN (in geen geval een cel van LECLANCHÉ, die tot dit doel te veranderlijk is), de tangenten-boussole en de weerstandsbank. De afwijking der boussole wordt nu waargenomen: 1⁰. wanneer de afleider, zonder weerstand in de bank, in de keten is opgenomen; 2⁰. nadat de verbindingsdraad van het bovendeel des afleiders is losgemaakt en in verband gebracht met het uiteinde van den tweeden verbindingsdraad bij de grondgeleiding; 3⁰. nadat in deze geleiding een weerstand van 1 SIEMENS-eenheid is opgenomen. Zijn dan v_1, v_2 en v_3, naar volgorde, de waargenomen afwijkingen, dan is de weerstand des afleiders x:

$$x = \frac{tg\, v_3}{tg\, v_1}\;\frac{tg\, v_2 - tg\, v_1}{tg\, v_2 - tg\, v_3}\ \text{SIEMENS-eenheden.}$$

Ter bevordering van de nauwkeurigheid der metingen is het noodig, verbindingsdraden van goed geleidend rood koper en van niet te kleine doorsnede (2 tot 3 mM. middellijn) te nemen. Om de meting gemakkelijk te kunnen herhalen, zonder telkens naar de spits te klimmen om daar den eersten verbindingsdraad los te maken of weer vast te hechten, is hét wenschelijk twee draden *a* en *b* van gelijken weerstand te gebruiken, waarvan *a* gedurende de proef met de spits verbonden blijft, terwijl *b* bestemd is om, bij de tweede meting, in plaats van *a* met den tweeden verbindingsdraad aan de grondgeleiding verbonden te worden en ook in de derde meting, met den bijgevoegden weerstand, de keten te sluiten.

De Siemens-boussoles zullen bij de dus te nemen proef allicht te groote afwijking geven. Men komt hieraan te gemoet door slechts een deel van den stroom door de boussole te laten gaan en het grootste deel door een vasten hulpsluitdraad, die de uiteinden van den geleider der boussole verbindt, af te leiden.

Door de lengte van dezen hulpsluitdraad te vergrooten of te verkleinen, kan men de afwijkingen der naald zóó regelen dat zij bij sluiting door den afleider alleen omstreeks 50° bedragen.

De meting van den weerstand der grondleiding is iets meer samengesteld. Vooreerst dient een tweede hulpgrondleiding te worden aangebracht, waarvoor gebruikt moet worden een koperen plaat van 1 M² oppervlakte, die in een naburige wel, kanaal of sloot — geen regenbak — wordt neergelaten, zoodat hij geheel met water in aanraking is. Bevindt zich in de onmiddellijke nabijheid eene ijzeren gas- of waterleiding, die niet voor grondgeleiding des afleiders dient, dan kan zij in plaats van de hulp-aardplaat worden aangewend. Men heeft, om den invloed te kunnen wegcijferen van de electromotorische kracht, die in de keten ontstaat door de aanraking van de grondgeleidingen met water of vochtigen grond, thans vier metingen te doen, te weten:

1°. wanneer de twee draden, die van den waarnemer naar de beide grondgeleidingen loopen, aan de van den waarnemer verwijderde einden met elkander verbonden zijn;

2°. wanneer in de zoo even gevormde geleiding een weerstand van 1 SIEMENS-eenheid is opgenomen;

3°. wanneer de twee draden elk met hunne grondgeleiding zijn verbonden;

4°. wanneer bij deze laatste proef bovendien nog een weerstand van 20 SIEMENS-eenheden is opgenomen.

Bij deze proeven zal de hulpsluitdraad der boussole in den regel weggenomen moeten zijn. Mocht de stroom dan bij de twee eerste proeven te sterke uitwijking geven, dan kan men in de geleiding eenigen weerstand opnemen om den stroom te verzwakken. Deze weerstand moet dan in de volgende proeven in de keten blijven. Is hij aanmerkelijk, dan zal het goed zijn in de tweede proef, in plaats van één SIEMENS-eenheid, meerdere in te lasschen. Is dit aantal n en zijn de vier waargenomene afwijkingen naar volgorde v_1, v_2, v_3 en v_4, dan leeren de twee eerste proeven den weerstand R kennen van de geheele geleiding der eerste proef, door de vergelijking

$$R = \frac{tg\ v_2}{tg\ v_1 - tg\ v_2} \times n \text{ SIEMENS-eenheden};$$

de derde en vierde geven op de zelfde wijze den weerstand W van de geheele geleiding in de derde proef, te weten:

$$W = \frac{tg\ v_4}{tg\ v_3 - tg\ v_4} \times 20 \text{ SIEMENS-eenheden},$$

en daar W gelijk is aan $R + x$, wanneer x den weerstand der grondgeleiding is, zoo kan x gemakkelijk berekend worden.

Als toelichting kan de volgende bepaling dienen van den weerstand eener grondgeleiding, verkregen door éenen draad te verbinden met de gasleiding van het physisch kabinet der Polytechnische school, den anderen met een rood-koperen plaat van 1 M^2 oppervlakte en die gedompeld was in eene wel in den kelder van dat gebouw.

In de keten was opgenomen een SIEMENS-boussole en een SIEMENS-rheostaat. De stroom liep onverdeeld door de boussole, doch was verzwakt door inlassching van 10 SIEMENS-eenheden van den rheostaat.

De volgende afwijkingen werden als gemiddelden van eenige opteekeningen waargenomen.

I. $v_1 = 55^0\ 34',\ 8$

II. $\begin{cases} v_2 = 21^0\ 54',\ 0 \\ v_2 = 10^0\ 15',\ 0 \end{cases}$ bijgevoegde weerstand $= 30.$
» » $= 80.$

III. $v_3 = 20^0\ 29',\ 4$

IV. $v_4 = 8^0\ 21',\ 0$

Uit I en II vindt men $R = 11{,}40$
$R = 11{,}31$

naar gelang de weerstand uit de bijvoeging 30 of 80 wordt berekend.

Uit III en IV volgt $R + x = 32{,}31$
dus $x = 20{,}96.$

De herhaling van III en IV bij omgekeerden stroom gaf

$$v_3 = 26^0\ 34',\ 8$$
$$v_4 = 12^0\ \ 3',\ 0$$

Waaruit $R + x = 37{,}22$
$x = 25{,}87.$

Gemiddeld was derhalve de weerstand der grondgeleiding 23,4 SIEMENS-eenheden *).

In de Akademie van Berlijn zijn in 1876 en 1877 door

---

*) De ongelijke waarden, voor x gevonden (20,96 en 25,87), al naar gelang van de richting van den stroom, kunnen verklaard worden door de opmerking, dat in het eerste geval de waterontleding in de grondgeleiding waterstof aan de ijzeren gasleiding, in het tweede geval waterstof aan de koperen plaat deed ontstaan. Daar het gas een slechte geleider is, zal daardoor de weerstand vergroot worden; wegens de zeer groote oppervlakte van het gasbuizennet zal deze weerstandsvermeerdering aan de gasleiding onbeduidend, daarentegen aan de koperen plaat zeer merkbaar kunnen zijn.

In WEIDENBACH's *Compendium der electrischen Telegraphie*, Wiesbaden 1877, blz. 45, vindt men voor den weerstand der grondgeleiding opgegeven 33 SIEMENS, wanneer die uit twee aardplaten bestaat van 1 M^2 oppervlakte en op voldoenden afstand van elkaar in water gedompeld. Uit de cijfers 20,96 en 25,87 blijkt dus, dat een gasleiding aanmerkelijk minder weerstand in de grondgeleiding geeft dan een aardplaat.

eene Commissie, bestaande uit HELMHOLTZ, KIRCHHOFF en SIEMENS verslagen uitgebracht, waarin bijzonder de invloed van de grondgeleidingen op de afvloeiing van de electriciteit eens bliksemstraals behandeld werd. De Commissie meende zeer groote aardplaten te moeten voorschrijven, terwijl daarentegen RIESZ de noodzakelijkheid daarvan ontkende. Neemt men met de Commissie der Berlijnsche Akademie aan, dat de grondplaat niet kleiner dan 1 M^2 mag zijn, dan zou dus de uitkomst der meting van den weerstand der grondgeleiding bij een goed te keuren afleider niet veel van 30 tot 40 SIEMENS-eenheden moeten verschillen, wanneer de afleider in een aardplaat uitloopt, en niet veel van 20 tot 30, wanneer eene gas- of waterleiding dient. Zonder hieromtrent een voorschrift te willen geven, meent de Commissie evenwel dat de hierboven medegedeelde cijfers binnen voldoende grenzen aanduiden, welke weerstand in eene grondplaat van gegevene afmetingen moet verwacht worden, wanneer er geen vermoeden zal ontstaan dat zij gebrekkig is geworden.

Zijn de grondplaat en de geleiding, die van den afleider daarheen voert, gemakkelijk bloot te leggen, dan blijft een plaatselijk onderzoek altijd aan te bevelen en, wanneer de weerstandsbepaling onzekerheid mocht overlaten, boven deze laatste te verkiezen. Voor een geregeld terugkeerend onderzoek van een afleider zal het noodig zijn, een behoorlijk proces-verbaal van elke beproeving op te maken en ter vergelijking bij eene volgende te bewaren.

De Commissie,

J. BOSSCHA,

J. D. VAN DER WAALS,

C. H. C. GRINWIS.

BIJDRAGE

TOT DE

KENNIS VAN NORMAAL CYAANZUUR,

DOOR

E. MULDER.

EERSTE GEDEELTE.

De theorie laat toe het bestaan van drie cyaanzuren en wel:

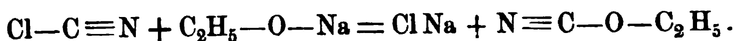
$$\text{I.}\quad O=C=N-H$$
$$\text{II.}\quad N\equiv C-O-H$$
$$\text{III.}\quad =C=N-O-H.$$

Een cyaanzuur van de laatste structuurformule, dat men zou kunnen noemen: carbylcyaanzuur, is tot nog toe onbekend. Dit lichaam zal waarschijnlijk kunnen verkregen worden naar eenige der methoden aangewend ter bereiding van carbylaminen, uitgaande van een verbinding $NH_2OC_2H_5$, maar wellicht slechts kunnen bestaan in den vorm eener alkylverbinding, b. v. als $=C=N-O-C_2H_5$.

De scheikundigen hielden zich bijkans uitsluitend bezig met de studie van het gewone cyaanzuur, ook wel isocyaanzuur genoemd. De feiten leiden er toe om hier aan toe te kennen de formule: $O=C=N-H$. Het kan optreden in vrijen staat, als metaalzout en als alkylverbinding. In vrijen toestand en als alkylverbinding bezit het groote neiging tot polymeriseeren. De kennis aangaande een

cyaanzuur van de structuur $N \equiv C - O - H$, *normaal cyaanzuur* geheeten, is zeer beperkt. In vrijen staat is het onbekend.

Bannow *) meent het wellicht te hebben verkregen als kaliumzout, zoo bij verhitting van paracyaan met kaliumhydroxyde, bij inwerking van chloorcyaan op potassaloog en verwarming van kaliumisocyanaat met ioodcyaan. Dit zout zou krystalliseeren in lange dunne naalden. Den krystalvorm uitgenomen en de eigenschap, om onder sommige omstandigheden aanleiding te geven naar bannow tot het doen ontstaan van een verbinding $NH.2CN$, zou het kaliumnormaalcyanaat overeenkomen met het kaliumisocyanaat. Van een meer ernstigen aard zijn de onderzoekingen van cloëz †), die chloorcyaan liet inwerken op natriumaethylaat in alkoholischaetherische oplossing, bij welke reactie zou kunnen ontstaan aethylnormaalcyanaat:



$$Cl-C \equiv N + C_2H_5-O-Na = ClNa + N \equiv C-O-C_2H_5.$$

Na inwerking werd gefiltreerd en het filtraat ingedampt, waarna een vloeistof terugblijft, die, zooals cloëz zegt, ter verwijdering van eenig chloornatrium *is te wasschen met water*, waarin zij naar dezen scheikundige onoplosbaar is. Dit lichaam nu schijnt nagenoeg algemeen beschouwd te worden als aethylnormaalcyanaat. Zoo zegt het *Neues Handwörterbuch* van fehling (zie artikel: cyaanzuur): »Die wahren Cyansäure äther ($NC.OC_2H_5$ en analogen) wurden von cloëz entdeckt, der sie durch Einwirkung von Chlorcyan auf Natriumalkoholaten dargestellt hat."

Gal §) ging de inwerking na van chloorwaterstof op dit lichaam, waarvan evenwel cloëz hem de noodige hoeveelheid had gegeven. Eindelijk onderzocht a. w. hofmann **) eenige verbindingen die ontstaan, wanneer het product gevormd na

*) *Dt. chem. Ges.* 4. 254.

†) *Compt. rend.* 44. 482; *Ann. Ch. Ph.* 137, 127; zie ook *Dict. Wurtz Art.* acide cyanique p. 1073.

§) *Compt. rend.* 61. 527; *Ann. Ch. Ph.* 137, 127.

**) *Dt. chem. Ges.* 3. 271.

bovengemelde reactie op aethylalkohol of methylalkohol, bij zuivering door overhaling van alkohol, eenigen tijd aan zich zelf werd overgelaten. Deze scheikundige liet zich evenwel niet in met de moederstoffe.

Ziedaar in weinige woorden den stand van zaken. Bannow is dus de eenige, die getracht heeft na te gaan, of er bestaat een kaliumnormaalcyanaat, en Cloëz alleen maakte een studie van methyl- en aethylnormaalcyanaat, terwijl Hofmann zich onledig hield met eenige alkylnormaalcyanuraten.

Houden we ons thans in de eerste plaats bezig met de vraag, of een bestaan van *kaliumnormaalcyanaat* als waarschijnlijk is aan te nemen.

Van de methoden, ter bereiding van een lichaam gegeven, dat wellicht naar Bannow gemeld zout zou kunnen wezen, is die met ioodcyaan zeker wel de meest eenvoudige. Bij verwarming nu gedurende ongeveer 24 uren van 2 gr. kaliumisocyanaat en 0,3 gr. ioodcyaan bij 100°, werd door mij een product verkregen, dat nagenoeg onoplosbaar scheen te zijn in absoluten alkohol, daarentegen uit alkohol van 90 p.c. krystalliseerde in lange dunne naalden, naar 't schijnt overeenkomende met die door Bannow oppervlakkig beschreven. Een andere proef met 4 gr. kaliumisocyanaat en 0,2 gr. ioodcyaan gaf een product, dat zich afzette in schoone vedervormige lange krystallen. Minder schoon gevormd ontstonden deze bij toevoeging van ioodcyaan bij OCNK in alkohol en daarna omkrystallisatie. Bij verder onderzoek bleek, dat de krystallen van kaliumisocyanaat eveneens de eigenschap bezitten, om zich eenigermate vedervormig af te zetten, maar op verre na niet zoo schoon, als bij aanwezigheid van ioodcyaan, en wel vooral na verhitting daarmede in drogen staat het geval kan wezen.

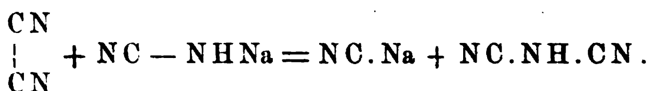
De lange dunne naalden, aanvankelijk verkregen, verhielden zich dan ook, met de loupe bezien, niet als krystallographische individuen, maar bleken te zijn uiterst fijn vedervormig gevormde krystallen. Evenmin als van kaliumisocyanaat kan hier gedacht worden aan een bepaling van krystalvorm. Naar Bannow nu verhoudt zijn lichaam zich in 't algemeen als OCNK; zoo straks bleek dan ook, dat het in alkohol

zoo goed als onoplosbaar schijnt te zijn, gelijk het geval is met OCNK. BANNOW wijst evenwel op een verschil met OCNK, daârin bestaande, dat zijn zout na langen tijd in oplossing met alkali te hebben gestaan en na neutralisatie, een kleurloos lichtbestendig neêrslag zou ontstaan met zilvernitraat van de formule C_2N_3Ag, in vrijen staat dus C_2N_3H, naar hem wellicht te beschouwen als NH.2CN.

Let men op de weinige bestendigheid van OCNK in oplossing, waarvoor het kaliumnormaalcyanaat niet zou onderdoen, dan zal men mij wel ten goede willen houden, dat de moed ontbrak, om het al of niet gevormd worden na te gaan van een verbinding, die meer dan waarschijnlijk onder gemelde omstandigheden niet kan ontstaan.

Alvorens verder te gaan, mag ik met een woord mededeelen, dat broomcyaan evenmin schijnt in te werken op OC.NK als ioodcyaan, wel te verstaan bij ongeveer 100°; met broomcyaan kan men niet veel verder gaan, of het wordt gepolymeriseerd.

Gemelde mededeeling van BANNOW gaf mij aanleiding, in verband met proeven van A. W. HOFMANN *), om in die richting te experimenteeren. In de eerste plaats liet ik cyaan inwerken op natriumcyanamid (in alkoholische oplossing). De reactie kon aldus verloopen (zoogenaamd cyanamid beschouwd als $NC.NH_2$):



$$\begin{matrix} CN \\ | \\ CN \end{matrix} + NC - NHNa = NC.Na + NC.NH.CN.$$

De materialen, hiertoe aangewend, waren zoo zuiver mogelijk. Opmerkenswaardig was, hoe iedere gasbel cyaan hare bruine sporen achterliet, om ten slotte een donkergekleurde massa te vormen, waarmede wel niet veel goeds was aan te vangen.

HOFMANN liet cyaan inwerken op cyanamid en zegt daaromtrent: »Cyanamide is, in fact, capable of fixing the ele-

---

*) LAND, *R. Soc. Proc.* Vol. 11, 277.

ments of cyanogen, being converted into a yellowish amorphous powder, which, when heated with acids, furnishes a beautiful-crystalline compound, difficultly soluble in water, and deposited from the boiling solution on cooling in long slender needles."

Ik liet cyaan gaan door een aetherische oplossing van cyanamid (zeer zuiver); bij verdamping van den aether bleef evenwel cyanamid onveranderd terug. In geconcentreerde alkoholische oplossing (de alkohol was als de aether gezuiverd met natrium), bleek zelfs na lang staan niets te zijn gevormd van een additieproduct. Wel ontstond ten slotte na lang staan een zeer gekleurd condensatieproduct, maar dat wel niets gemeen kon hebben met gemeld additieproduct, en dan ook met zoutzuur geen kleurloos krystallijn product gaf. Zonder twijfel werkte HOFMANN onder andere omstandigheden.

Keeren we na deze afwijking terug tot het zout van BANNOW, dat tevens zou gevormd worden bij inwerking van chloorcyaan op een waterige sterke oplossing van potassa. In plaats van chloorcyaan werd uitgegaan van broomcyaan. Op 8,3 gr. potassa en 20 gr. water werden genomen 10 gr. broomcyaan, aanwezig in een buis, waarin de potassaloog onder afkoeling langzamerhand werd gedaan; na reactie werd fractionnair neêrgeslagen met alkohol. Een genoegzame scheiding van kaliumcyanaat en broomkalium was wel niet te bereiken, en ten slotte werd een cyanaat afgezet (met eenig broomkalium vermengd), waarin geen verschil werd opgemerkt met het kaliumisocyanaat O C N K.

Als laatste proef liet men een alkoholische oplossing van broomcyaan inwerken op een alkoholische oplossing van potassa (als bij de voorgaande ongeveer in de verhouding van Br C N en 2 K O H). Het filtraat zette een kleine hoeveelheid af van een zout, waarvan meer werd erlangd bij uitkoken van het aanvankelijk gevormde afzetsel met alkohol van 90 p. c. Van het ontstaan van een kaliumnormaalcyanaat werd niets waargenomen, maar opmerkenswaardig was een sterke knoflookreuk, die deed denken aan de vorming van een carbylamine.

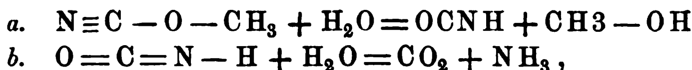
Na het medegedeelde mag als waarschijnlijk worden aan-

genomen, dat het lichaam van BANNOW is kaliumisocyanaat OCNK, hetwelk onder sommige omstandigheden in een eenigszins anderen vorm kan krystalliseeren, zooals met zoovele stoffen het geval is. Zoo krystalliseert broomcyaan aanvankelijk in naalden, om weldra over te gaan in teerlingen.

Een nader onderzoek betreffende de merkwaardige reactie van CLOËZ, die met recht zoo de aandacht trok der scheikundigen, kon dankbaarder zijn dan dat met het lichaam van BANNOW, in zooverre als deze reactie in den grond zonder twijfel aanvankelijk verloopt als vroeger werd medegedeeld. Toch biedt het lichaam van CLOËZ vele duistere punten aan, en de vraag zou kunnen gedaan worden, of dit wel in werkelijkheid is aethylnormaalcyanaat, of daarvan is een afgeleide, wellicht een mengsel van afgeleiden. Zoo is het s. g. dezer vloeistof (1,1271) betrekkelijk veel hooger dan dat van het aethylisocyanaat $O = C = N - C_2H_5$ (0,898). Dit laatste is een vluchtige dunvloeibare stof (kookpunt 60°), terwijl het lichaam van CLOËZ een lijvige vloeistof vormt, te weinig standvastig om te kunnen worden overgehaald. Hetzelfde geldt van de overeenkomstige methylverbindingen. Het s. g. in gasvorm van het lichaam van CLOËZ is derhalve onbekend, en daarmede onbekend het gevonden moleculairgewicht. Dit laatste zou dus op andere wijze moeten worden afgeleid, dat tot nog toe niet is geschied.

Reeds vroeger werd met een enkel woord medegedeeld, dat HOFMANN zich onledig hield met een studie van afgeleiden, die gevormd worden, wanneer het ruwe product (verkregen door $ClCN$ en C_2H_5ONa, filtratie en overhaling van aanwezigen alkohol) veelal geruimen tijd aan zich zelf werd overgelaten. HOFMANN erlangde een bruine olie, soms zelfs slechts een vaste bruingekleurde massa; de eerste werd na staan gedeeltelijk vast. Uitgaande van methylalkohol, verkreeg deze scheikundige een mengsel, dat, na omkrystalliseeren en ontkleuring met dierlijke kool, twee stoffen gaf, namelijk normaal cyanuurzuurmethyl en normaal monamidocyanuurzuurmethyl; met aethylalkohol vermocht hij niet eens te bekomen normaal cyanuurzuuraethyl, maar werden afgezonderd twee lichamen, gedetermineerd als normaal monamido- en diamido

cyanuurzuuraethyl. Daar HOFMANN denzelfden weg insloeg als CLOËZ (alleen maakte hij geen gebruik van aether), mag als waarschijnlijk worden aangenomen, dat de methode van CLOËZ aanleiding kan geven tot de vorming van andere produkten. Dat een lichaam van de structuur $N \equiv C - O - CH_3$ gemakkelijk polymeriseert, heeft niets bevreemdends, daar ook $O = C = N - CH_3$ deze eigenschap bezit. De vraag is evenwel, vanwaar genoemde amidoverbindingen? HOFMANN schijnt geneigd, dit toe te schrijven aan toegetreden water, dat ontledend zou inwerken op $N \equiv C - O - CH_3$ (of C_2H_5), als gevolg waarvan ontstaan:

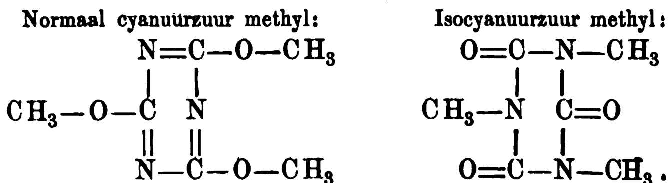


a. $N \equiv C - O - CH_3 + H_2O = OCNH + CH3 - OH$

b. $O = C = N - H + H_2O = CO_2 + NH_3$,

welk NH_3 dan zou reageeren op normaal cyanuurzuurmethyl (of aethyl), en gemelde amidoverbindingen doen ontstaan. Later zal blijken, dat b. v. $N \equiv C - O - C_2H_5$ wellicht niet zoo snel wordt ontleed door water.

Van de door HOFMANN onderzochte verbindingen is zeker de meest belangrijke zijn normaal cyanuurzuurmethyl, dat naar hem bij overhaling zou overgaan in isocyanuurzuurmethyl:



Hieruit mag dan worden opgemaakt, dat isocyanuurzuurmethyl stabieler is dan normaal cyanuurzuurmethyl, en niet onwaarschijnlijk zal dus $N \equiv C - O - CH_3$ minder stabiel wezen dan $O = C = N - CH_3$; hetzelfde geldt noodwendig van andere alkylverbindingen, als van metaalverbindingen, die, zooals vroeger bleek, van normaal cyanuurzuur niet schijnen te kunnen bestaan, evenmin als van normaal cyanuurzuur.

Uit het voorgaande kan wel blijken, dat men hier te doen heeft met een moeielijk onderzoek. Zuiverheid zooveel moge-

lijk der aan te wenden materialen moet derhalve beschouwd worden als een eerste vereischte, zal men niet dadelijk vervallen in een polymerisatieproduct en afgeleiden. Denken we er slechts aan van hoe weinig het afhangt, of bij inwerking van $SO_2.OH.OCH_3$ en $O=C=NK$, ontstaat $O=C=N-CH_3$ of bijkans uitsluitend isocyanuurzuurmethyl, welk laatste toch altijd in een noemenswaardige hoeveelheid optreedt. Bij de volgende proeven werd daarom de meeste zorg besteed aan het zooveel mogelijk zuiveren van alkohol en aether (met natrium). En in plaats van het gasvormige chloorcyaan, dat betrekkelijk gemakkelijk polymeriseert, en wellicht de neiging tot polymeriseeren bevordert van het $N\equiv C-O-C_2H_5$ (of CH_3 enz.), werd genomen broomcyaan, dat in schoone krystallen kan optreden en niet zoo gemakkelijk een isomere wijziging ondergaat, terwijl het, naar de door mij gevolgde methode, zonder veel bezwaar in groote hoeveelheid en zuiver is te maken.

Bij 31 gew.-d. aethylalkohol werden gevoegd 63 gew.-d. aether, waarin, onder afkoeling met koud water, werden opgelost 2,1 gew.-d. natrium. Bij deze oplossing nu liet men langzamerhand, onder afkoeling met water, vloeien een oplossing van 11 gew.-d. broomcyaan in 55 gew.-d. aether, gedaan in een chamaeleon-burette. De reactie gaat zeer glad, en duidelijk is het punt waar te nemen, wanneer geen broomnatrium meer wordt gevormd; evenwel werd steeds een kleine overmaat van broomcyaan gebruikt. Na filtratie (onder een klok) werd overgehaald, waarna de terugblijvende vloeistof in een kleine buis met afleidingsbuis langen tijd werd verhit in een bad van kokend water, om zooveel mogelijk aether en alkohol te verwijderen, en zelfs nog een groot half uur, nadat niets meer was overgegaan.

Cloëz zuiverde het ruwe product, door hem verkregen bij inwerking van chloorcyaan op $C_2H_5.ONa$, filtratie en overhaling van den alkohol, met *water*, met het doel eenig chloornatrium te verwijderen; daarna werd gedroogd boven zwavelzuur in vacuo. Dit product is dan naar Cloëz, uitgaande van aethylalkohol, aethylnormaalcyanaat, thans te schrijven $N\equiv C-O-C_2H_5$, isomeer en wel metameer met

aethylisocyanaat: $O = C = N - C_2H_5$, terwijl methylalkohol een overeenkomstig product gaf.

Reeds uit de zuiveringsmethode volgt, dat het lichaam van Cloëz zoo goed als *onoplosbaar* is in water, terwijl hij niet gewaagt van in water oplosbare verbindingen. Cloëz zegt van zijn lichaam: »La cyanétholine (zoo noemde hij het aethylnormaalcyanaat) est *insoluble* dans l'eau", en tevens: »il a seulement un caractère commun avec l'éther cyanique (namelijk: $O = C = N - C_2H_5$), c'est son insolubilité dans l'eau; cette propriété permet de le débarasser par le lavage des traces de chlorure de sodium qu'il retient."

Men mag dus wel als zeker aannemen, dat de stof van Cloëz, door hem en in 't algemeen door de scheikundigen beschouwd als aethyl- (of methyl- enz.) normaalcyanaat, *onoplosbaar* is in water.

De methode volgende, vroeger medegedeeld, werd door mij nagenoeg verkregen de theoretische hoeveelheid aan ruw product, berekend namelijk op $N \equiv C - O - C_2H_5$. Nemen we de som aan opbrengst der drie eerste bereidingen, die ieder voor zich in dit opzicht goed overeenkomen, dan werd, uitgaande van 7,6 gr. natrium, erlangd 24 gr. aan ruw product, terwijl de theorie eischt 23,4 gr.; er werd dus wat te veel verkregen. Men berekende op natrium en niet op broomcyaan, daar dit laatste steeds in eenige overmaat werd genomen, en er altijd wat van vervluchtigt. De hoeveelheid gevormd broomnatrium stemde eveneens genoegzaam met de theorie. Het destillaat (aether en alkohol) rook duidelijk naar broomcyaan; de kleine overmaat van dit lichaam schijnt dus niet aan eenige reactie deel te nemen.

Het ruw product was slechts uiterst weinig gekleurd, hetgeen pleit voor de zuiverheid der bij de bereiding aangewende stoffen. Het verschijnsel nu deed zich voor, dat bij toevoeging van water aanvankelijk niets werd afgezet, terwijl ter geheele praecipitatie ongeveer 50 C.C. water werden vereischt. De afgezette olie werd met water gewasschen en wel daartoe verbruikt nagenoeg 65 CC., welke laatste hoeveelheid water, gedaan bij de moederloog, om toch vooral zeker te zijn van het in water onoplosbare lichaam

te worden bevrijd. Van deze lijvige vloeistof, blijkbaar het lichaam van Cloëz, werd ongeveer erlangd 5,6 gr. (nog eenig water houdend), derhalve moesten 24 – 5,6 = 18,4 gr. van het ruwe product in oplossing zijn gegaan, dus verreweg het grootste gedeelte der oorspronkelijke stof mag geacht worden *oplosbaar* te zijn in water. Men liet de waterige oplossing een halven dag staan, omdat nog wat van de olie in suspensie was, waarna om dezelfde reden werd gefiltreerd door fijn filtreerpapier, en thans het heldere filtraat bij herhaling uitgeschud met aether (niet gezuiverd). Na verdampen grootendeels van den aether op een waterbad, werd het terugblijvende, dat een zoo goed als kleurlooze vloeistof vormde, evenals het lichaam van Cloëz (eenigermate geel gekleurd), geplaatst boven zwavelzuur onder een kleinen glazen exsiccator. Beiden werden nu en dan gewogen, waarvan de uitkomst in de volgende opgave is medegedeeld:

Lichaam van Cloëz, aanvankelijk bedragende 5,6 gr. (bevatte nog eenig water).	In water oplosbaar product, aanvankelijk 14 gr. (hield wat aether en water in).
Verlies in gewicht telkens na één dag:	
0, 5 gr.	2, 2 gr.
0, 3 »	0, 9 »
0, 1 »	0,87 »
0,15 »	0,62 »
0,06 »	0,62 »
0,06 »	0,47 » begint te krystalliseeren).
0,06 »	0,24 »
0,06 » (vangt aan met te krystalliseeren).	0,21 »
0,05 »	0,16 »

Na drie dagen bleek de eerste vloeistof te zijn verminderd in gewicht 0,15 gr. en de andere 0,3 gr., waarna met wegen werd opgehouden.

Het oplosbare product werd langzamerhand dik vloeibaar en gedeeltelijk onoplosbaar in water.

Het zwavelzuur, van tijd tot tijd ververscht, werd vooral

in 't begin tamelijk gekleurd, terwijl zich tegen den wand van het vat met dit zuur een kleurlooze vaste stof afzette; later was hiervan minder waar te nemen.

Nadat de vorming van krystallen reeds was aangevangen, die langzaam vorderde, werd overgegaan tot de analyse.

I. Van de vloeistof, aanvankelijk oplosbaar, gaf 0,3747 gr. stof, 0,6064 gr. koolstofdioxyde en 0,265 gr. water;

II. een paar dagen later gaf 0,254 gr. stof 0,415 gr. koolstofdioxyde en 0,1798 gr. water.

Op 100 gew.-d. komt dit overeen met:

	I.	II.
koolstof.	44,1	44,5
waterstof	7,8	7,8.

Van het product met water, uit het ruwe mengsel neêrgeslagen (lichaam van Cloëz *)), gaf 0,1379 gr. stof 0,2582 gr. koolstofdioxyde en 0,105 gr. water;

Na eenige dagen gaf 0,2311 gr. stof bij 755 mm. bar. en 10,4^0 aan stikstof 33,1 C.C..

Op 100 gew.-d. komt dit overeen met:

	I.	II.
koolstof	51,0	—
waterstof.	8,4	—
stikstof.	—	16,4.

*) Men mag niet onvermeld laten, dat de uitkomsten der analyse van Cloëz wel zeker zullen voorkomen in zijn: *Thèses de la Faculté des Sciences de Paris*, Août 1866 (welk werk echter niet in den handel zal wezen), maar dat Cloëz van zijn cijfers niets mededeelt in het uittreksel, opgenomen in de *Compt. rend.*. Vrij uitvoerig is de uitkomst van gemeld werk teruggegeven in de »*Dictionaire de Chimie*" van Wurtz (zie art.: »acide cyanique") maar daarin zijn noodwendig niet de analysen opgenomen. Evenwel volgt misschien uit het laatste uittreksel, dat de vloeistof van Cloëz, beschouwd als $NC.OC_2H_5$ (en $NC.OCH_3$) nog wel wat te wenschen overliet, wat zuiverheid aangaat. Duidelijker spreekt dit, alhoewel indirect, uit de onderzoekingen van Hofmann, die geen cijfers mededeelt (eenige smeltpunten uitgezonderd). Hier vertoont zich derhalve het eigenaardig verschijnsel, dat in een der meest belangrijke onderzoekingen, die de scheikunde aanbiedt, van alle produkten geanalyseerd (door Cloëz en Hofmann) mij niet één analyse bekend is.

Nadat zich uit de in water aanvankelijk oplosbare vloeistof een betrekkelijk groote hoeveelheid krystallen had afgezet, werd op nieuw geanalyseerd (zie pag. 233).

0,2688 gr. vloeistof gaf 0,446 gr. koolstofdioxyde en 0,1896 gr. water;

0,1767 gr. stof gaf bij 11,5^0 en 758 mm. bar. aan stikstof 30 C.C..

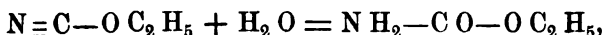
Op 100 gew.-d. komt dit overeen met:

koolstof	45,2
waterstof.	7,8
stikstof.	20,1.

De krystallijne stof hieruit aanvankelijk afgezet, krystalliseerde uit warm water in dunne naalden. Later zette zich een stof af in breede lange naalden, zeer oplosbaar in water bij gewone temperatuur, urethaan: $NH_2 . CO . OC_2 H_5$. De terugblijvende vloeistof levert met water een daarin onoplosbare olie, die, verhit met K O H-loog, met zoutzuur een krystallijne stof geeft, en wel cyanuurzuur. Deze olie vormt bij staan met water een daarin weinig oplosbare krystallijne verbinding; de olie is dus zeker geen aethylcarbonaat: $CO . 2 O C_2 H_5$.

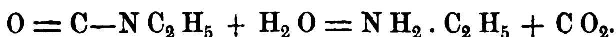
De vloeistof van Cloëz zet een wratvormig gekrystalliseerde verbinding af met een smeltpunt nabij 25^0. De analysen, gedaan met dit en andere producten, zullen later worden medegedeeld. Uit het voorgaande blijkt voldoende, dat men wellicht op weg is om de reactie van Cloëz beter te leeren kennen dan tot nog toe het geval was. En reeds thans is het duidelijk, dat het ruwe product, behandeld met water, aan dit laatste kan afstaan het aethylnormaalcyanaat, dat dan langzamerhand aanleiding geeft tot condensatieproducten, terwijl het lichaam van Cloëz een dezer condensatieproducten of afgeleide vormt. Gaat men na, dat normaal cyanuurzuurmethyl uit warm water kan worden omgekrystallyseerd, dan zou een oplosbaar zijn van $N \equiv C—O C_2 H_5$ in water, als zoodanig of in verbinding met alkohol, niet zoo bevreemdend zijn.

De vorming van urethaan kan een gevolg zijn daarvan, dat een deel aethylnormaalcyanaat water opneemt:



$$N \equiv C-O\,C_2H_5 + H_2O = NH_2-CO-O\,C_2H_5,$$

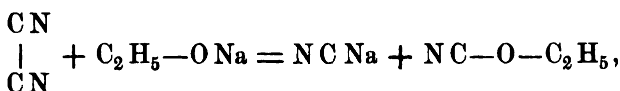
zooals isocyaanzuuraethyl dit doet, om dan evenwel te worden ontleed:



$$O = C-N\,C_2H_5 + H_2O = NH_2 . C_2H_5 + CO_2.$$

Het groote bezwaar, dat men hier ontmoet, is een voorkomen van condensatie, en bijzondere kunstgrepen zullen moeten aangewend worden, om het aethylnormaalcyanaat in zuiveren staat te kunnen verkrijgen.

Van een zuiveren toch door overhaling schijnt geen sprake te zijn. Zoo vormt het ruwe product reeds bij 110°—120° onder anderen eene kleine hoeveelheid eener *sterk riekende* vloeistof, wellicht iets zwaarder dan water, terwijl het terugblijvende, vooral bij hoogere temperatuur (tot ongeveer 200°), dik vloeibaarder en meer donkergekleurd wordt. Van urethaan en aethylcarbonaat blijkt hierbij niets. Gemelde reuk schijnt eenige overeenkomst te hebben met dien, ontwikkeld door cyaan en $C_2H_5 . ONa$. Bij deze laatste reactie, die aldus zou kunnen verloopen:



$$\begin{matrix} CN \\ | \\ CN \end{matrix} + C_2H_5-ONa = NCNa + NC-O-C_2H_5,$$

wordt de massa langzamerhand bruin gekleurd. Na filtratie, gedeeltelijke overhaling van het filtraat ter verwijdering van alkohol, opnieuw filtratie van eenige gekleurde stof, die zich had afgezet, en destillatie, blijft een onzuiver product terug met sterken reuk, die evenwel *niet* herinnert aan dien, eigen aan carbylaminen.

Opmerkenswaardig is ook, dat bij inwerking van $CNBr$ op $C_2H_5 . ONa$, de reuk van aethylisocyanaat: $O = C = N-C_2H_5$ hoegenaamd niet werd opgemerkt.

Dat het product van $NCBr$ en $C_2H_5 . ONa$ niet is $= C = N-O-C_2H_5$ (zie pag. 223), volgt eenigermate uit de ontledingsprodukten van normaal cyanuurzuurmethyl met

potassa, door HOFMANN erlangd, namelijk *isocyanuurzuur* (normaal cyanuurzuur is in vrijen staat en als metaalzout onbekend) en *methylalkohol*. Een lichaam van gemelde formule zou waarschijnlijk ook weinig neiging hebben tot polymerisatie, en een reuk bezitten, zeker wel herinnerende aan dien van carbylaminen.

Aanleiding tot de vorige onderzoekingen gaf cyanamid, en wel wenschte ik te weten of aethylnormaalcyanaat met ammoniak dit lichaam vormt. Eenige jaren geleden *) namelijk werd met deze verbinding een weinig door mij gearbeid en als gevolg daarvan meende ik te moeten aannemen, dat dusgenaamd cyanamid hoogstwaarschijnlijk is te beschouwen als carbodiïmid: $HN = C = NH$. Vele onderzoekingen †) mogen daarvan mede het gevolg zijn geweest, en de uitkomst was, dat sommige scheikundigen dit lichaam bleven beschouwen als in werkelijkheid te zijn cyanamid: $N \equiv C - NH_2$, of anders gezegd *het amid van normaal cyaanzuur:* $N \equiv C - OH$, terwijl het beschouwd als carbodiïmid: $HN = C = NH$ niet alleen kan worden afgeleid van: $O = C = O$, maar noodwendig even goed kan geheeten worden een afgeleide van gewoon of isocyaanzuur: $O = C = NH$ (zie later).

Zonder te vervallen in herhaling, wenschte ik deze hoogst gewichtige zaak nogmaals te behandelen. Kennis aangaande de structuur van eenvoudig samengestelde stoffen, als een cyaanzuur, cyanamid, enz., ligt noodwendig ten grondslag aan die van meer samengestelde lichamen. Daarbij komt, dat ook uit een scheikundig-physiologisch oogpunt cyaanzuur, cyanamid en analogen van groote beteekenis zijn.

Verreweg het meerendeel der feiten betreffende cyanamid kunnen zoowel worden verklaard door middel der formule $N \equiv C - NH_2$ als door die van $HN = C = NH$. Dit neemt

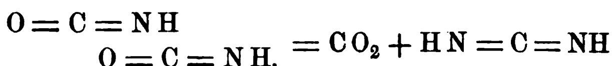
---

*) *Dt. Chem. Ges.* 6. 655; 7. 1233, 1634

†) Zie BAUMANN, *Dt. chem. Ges.* 6, 1370; 7, 100; DRECHSEL, *J. f. pr. Ch. N. F.* 8, 327; 21, 80; SCHIFF, *Dt. chem Ges.* 10, 425; WEITH, *Dt. chem. Ges.* 6, 1398; 7, 10, 840, 1303; zie verder BEILSTEIN en GEUTHER, *Ann. Ch. Ph.* 108, 96. Daarenboven het: *Neues Handwörterbuch der Chemie* von Dr. H. V. FEHLING, Art. Cyanamid.

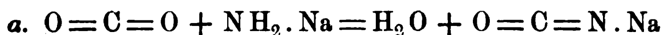
evenwel niet weg, dat de verklaring van sommige reacties minder gedrongen is met de laatste dan met de eerste dezer formules of omgekeerd. Doorloopen we eenige hoofdfeiten.

Bij verhitting van sommige zouten van isocyaanzuur kan ontstaan zoogenaamd cyanamid, welke reactie aanleiding schijnt te moeten geven om dit lichaam te beschouwen als carbodiïmid:



$$\begin{matrix} O=C=NH \\ \quad O=C=NH. \end{matrix} = CO_2 + HN=C=NH$$

Koolstofdioxyde kan met $NH_2.Na$ geven cyanamid:



a. $O=C=O + NH_2.Na = H_2O + O=C=N.Na$



b. $O=C=N.Na + NH_2.Na = H_2O + Na.N=C=N.Na.$

Om aan te nemen, dat isocyaanzuur hierbij wordt omgezet in normaal cyaanzuur, schijnt wel wat gedrongen (zie later).

De vorming van zoogenaamd cyanamid door oxydatie van zwavelureum kan door beide formules op voldoende wijze worden verklaard.

Cyanamid werd, zooals bekend, het eerst in onzuiveren staat verkregen door Bineau bij inwerking van chloorcyaan op ammoniak, terwijl Cloëz en Cannizzaro het aldus maakten in vrij zuiveren toestand. In plaats van chloorcyaan kan broomcyaan worden genomen. Deze bereidingswijzen zouden noodwendig aanleiding geven tot een aannemen der formule: $N\equiv C-NH_2$, maar behalve gemeld bezwaar, zijn daartegen nog vele andere bedenkingen aan te voeren. Zoo kan b.v. zoogenaamd cyanamid verhit worden tot ongeveer 150^0, alvorens te worden veranderd, en zou het dadelijk gepolymeriseerd worden, zonder aanvankelijk te vormen het zeker meer stabiele carbodiïmid: $HN=C=NH$, en evenmin schijnt dicyaandiamid bij verhitting in een metamere verbinding over te gaan. En toch gaat b.v. normaal cyanuurzuurmethyl bij verhitting over in isocyanuurzuurmethyl (zie vroeger).

Tegenover potassaloog is zoogenaamd cyanamid zeer stabiel, dat men zou meenen minder te mogen verwachten van een

amid. Het amid zou een afgeleide zijn van een zuur, dat te weinig karakter bezit om zelfstandig te kunnen optreden, namelijk normaal cyaanzuur: $N \equiv C - O - H$; een zuur, waarvan zelfs het kaliumzout niet schijnt te kunnen bestaan, terwijl de alkylverbinding betrekkelijk weinig stabiliteit vertoont, en reeds bij $110^0 - 120^0$, naar 't voorkomt, wordt ontleed.

Toch is een amid in den regel stabieler dan zijn overeenkomstige alkoxyl-verbinding, zoo: $NH_2—CO_2OC_2H_5$ stabieler dan $NH_2—CO—NH_2$.

De vorming van NH_3 en $NH_2 . CH_3$ bij inwerking van waterstof in statu nascenti op cyanamid, laat zich even goed verklaren door beide formules. Deze reactie kon evenwel in zooverre pleiten voor de formule $HN = C = NH$, (een afgeleide van $O = C = NH$) als is aangetoond, dat waterstof in statu nascenti, isocyaanzuur $O = C = NH$ omzet in: $H — CO — NH_2$ (formamid), dat betrekkelijk gemakkelijk aldus wordt ontleed:



$$H — CO — NH_2 = H_2O + N \equiv C — H,$$

hoeveel te eerder zal dan $HN = C = NH$ kunnen vormen NCH. Het ontstaan van NCH bij oxydatie van cyanamid, is te verklaren, uitgaande van de formule $HN = C = NH$, door het aannemen eener verschuiving van een atoom waterstof van N naar C. Waterstof nu verhuist zeer gemakkelijk, terwijl daarenboven uit de vorming van gewone nitrilen en carbylaminen door cyaniden, genoegzaam blijkt, dat cyaanwaterstof (aangenomen, dat het is $N \equiv C—H$, zooals uit vele addities schijnt te blijken) al zeer gemakkelijk kan overgaan in $= C = NH$, en dus ook omgekeerd $HN = C = NH$ zal kunnen geven $N \equiv C—H$. Maar, kan men zeggen (en nu komt het hoofdargument voor de formule $N \equiv C \cdot NH_2$) bij inwerking van C_2H_5I op zilvercyanamid zou ontstaan een diaethylcyamid, dat met zoutzuur zou geven: NH_3, CO_2 en $NH_2 . C_2H_5$. Waren er geen feiten bekend, die ons leerden, hoe gemakkelijk hierbij verschuiving van een C_2H_5 kan

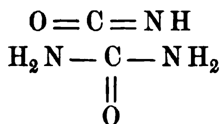
intreden, dan was de zaak uitgemaakt; thans is dit niet het geval, zooals tevens kan blijken uit het volgende. Alle scheikundigen beschouwen te recht cyaankalium als $N \equiv C - K$; zoo geeft dit laatste bijv. met $CH_2Cl.CO.OH$ een $CH_2.CN.CO.OH$ en dit bij verzeeping: $HO.CO.CH_2.CO.OH$. Maar wordt cyaankalium beschouwd als $N \equiv C—K$, dan is aan cyaanammonium wel moeilijk anders dan de volgende formule te geven: $N \equiv C—NH_4$. Geeft men derhalve aan zoogenaamd cyanamid de formule: $N \equiv C - NH_2$, dan heeft men tusschen;

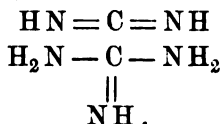
cyaanammonium: $N \equiv C - NH_4$
cyaanamid: $N \equiv C - NH_2$

slechts een verschil van $2H$, en overigens een overeenkomstige structuur; in cyaanammonium treedt de stikstof op met al hare valenties, daarentegen in cyanamid als trivalent. Nu heb ik vroeger aangetoond, dat cyaanammonium door chloor niet overgaat in cyanamid, onder omstandigheden, waardoor gevormd cyanamid door chloor niet wordt aangetast (maar dat er ontstaan gekleurde condensatieprodukten). Hoe geheel anders verhoudt zich b. v. chloor tegenover $Cl—NH_4$.

Ten slotte pleit wellicht voor de formule $HN = C = NH$, dat het mij niet is mogen gelukken het ruwe product (versch) der inwerking van broomcyaan en $C_2H_5.ONa$, waarin toch waarschijnlijk aethylnormaalcyanaat: $N \equiv C — OC_2H_5$ voorkomt, na oplossen in aether (watervrij) met ammoniakgas om te zetten in cyanamid of een lichaam daarmede polymeer.

In 't algemeen schijnen dan ook de eigenschappen van isocyaanzuur te staan tot die van cyanamid, als b, v. die van ureum tot guanidine:





Zoo kan b. v. isocyaanzuur door ammoniak overgaan in cyanamid (zie vroeger), en guanidine door verlies van $N H_3$ (onder opname van $H_2 O$) worden omgezet in ureum, terwijl er veel overeenkomst bestaat in de wijze, waarop isocyaanzuur en cyanamid polymeriseeren.

Utrecht, 24 December 1880.

RAPPORT

OP DE VERHANDELING VAN

Dr. H. KAMERLINGH ONNES,

GETITELD:

„ALGEMEENE THEORIE DER VLOEISTOFFEN".

AAN DE AKADEMIE AANGEBODEN IN HARE VERGADERING VAN 24 DECEMBER 1880.

Deze verhandeling is geschreven met het doel om aan te toonen, dat de algemeene vloeistofwet, welke aan de Akademie is medegedeeld in hare vergaderingen van Sept. en Nov. j. l., afgeleid kan worden uit de onderstelling, dat de molekulen der verschillende stoffen *gelijkvormige* elastische lichamen van niet merkbaar veranderende afmetingen zijn.

De verhandeling bevat vier paragrafen, waarvan wij den inhoud kort zullen mededeelen.

In de eerste paragraaf wordt de vergelijking der isotherme afgeleid. Om tot deze vergelijking te geraken, is het noodig in aanmerking te nemen, dat de molekulen aantrekkende krachten op elkander uitoefenen en dat zij uitgebreidheid hebben. De invloed der laatste omstandigheid kan op tweeërlei wijze in rekening gebracht worden: òf door na te gaan, in hoever, ten gevolge dezer uitgebreidheid, het aantal botsingen vergroot wordt, òf door naast het aantrekkende *viriaal* ook dat der afstootende krachten bij de botsing te beschouwen. De schrijver volgt de eerste wijze van berekening en komt daardoor tot de invoering in de vergelijking der isotherme van een functie van het volume der molekulen

en van de door het aggregaat ingenomen ruimte, welke functie hij *botsingsfunctie* noemt. Van deze functie wordt bewezen, dat zij slechts kan afhangen van de verhouding tusschen de twee in haar voorkomende grootheden, en dat zij slechts door grootheden van de tweede of hoogere orde van de eenheid verschillen kan. Verwaarloost men deze grootheden van de tweede of hoogere orde, dan wordt de isotherme volkomen gelijk aan die, welke door VAN DER WAALS is gegeven als slechts geldende voor volumes, welke grooter zijn dan 8-maal het volume der molekulen. Deze botsingsfunctie wordt ook door den schrijver niet nader bepaald, maar moet, ten minste bij gelijkvormige molekulen, voor alle stoffen als gelijk worden aangemerkt.

In de tweede paragraaf, inhoudende: »Opmerkingen over den algemeenen vorm der isotherme," handelt de schrijver o. a. over de keus der verschillende eenheden voor de in aanmerking komende grootheden, en over de gewichtshoeveelheid stof, welke in het volume aanwezig zal worden gedacht. Voor deze laatste hoeveelheid kiest hij de gewichtseenheid maal het molekulair-gewicht. Deze keus verdient navolging. Dan toch worden voor de verschillende stoffen evenveel molekulen in beschouwing genomen. Reeds de wet van AVOGADRO is een vingerwijzing, dat dan de eenvoudigste wetten voor de grootte van het volume zullen te wachten zijn — en inderdaad heeft de besproken vloeistofwet geleerd, dat, in *overeenstemmende* omstandigheden van temperatuur en druk, de voluum-grootte dan evenredig is aan de molekuulgrootte; terwijl volgens de wet van AVOGADRO, onder *gelijke* omstandigheden van temperatuur en druk, het volume dan ten minste bij benadering even groot is.

In de derde paragraaf worden uit den aangenomen vorm der isotherme de kritische grootheden bepaald, door het kenmerk toe te passen, dat voor de kritische isotherme in het kritisch punt zoowel $\frac{dp}{dv}$ als $\frac{d^2p}{dv^2}$ gelijk nul moet zijn; en door invoering van de waarde dezer grootheden in de vergelijking der isotherme wordt de algemeene vloeistofwet verkregen.

Eindelijk wordt in de vierde paragraaf op vernuftige wijze gebruik gemaakt van het beginsel van de gelijkvormigheid in de beweging om een nieuw bewijs voor deze vloeistofwet te leveren.

Wij meenen dus de Akademie te mogen adviseeren, deze verhandeling op te nemen in hare werken. Enkele opmerkingen omtrent ondergeschikte punten, van te geringe beteekenis om in dit verslag te worden vermeld, kunnen door de Commissie ter kennis gebracht worden van den schrijver, wien de vrijheid kan worden gelaten, daarvan al dan niet gebruik te maken.

De Commissie:

Januari 1881.

J. D. v. d. Waals.
J. Bosscha.
C. H. C. Grinwis.

DE OVERGANG DER ENERGIE BIJ DE BOTSING VAN LICHAMEN

DOOR

C. H. C. GRINWIS.

De verschijnselen der botsing van vaste lichamen, die steeds aanleiding gaven tot gewichtige onderzoekingen van verschillende wis- en natuurkundigen, en niet weinig tot de kennis van de grondbeginselen der mechanica hebben bijgedragen, schijnen het meest geschikte uitgangspunt voor eene studie van de leer der energie.

Het blijkt, dat die verschijnselen, uit dat oogpunt beschouwd, eveneens tot meer theoretische onderzoekingen aanleiding geven.

Wij stellen ons voor, dit onderwerp thans gedeeltelijk te behandelen, en zullen in het volgende vooreerst de uitdrukkingen voor snelheid en energie afleiden, en kortelijk haar gebruik met het oog op ons onderwerp bespreken. Daarna willen wij nagaan, hoe zich de kinetische energie bij de botsing verdeelt, om dan meer opzettelijk bij den overgang van energie, die gedurende de botsing van het eene lichaam op het andere plaats heeft, stil te staan.

A. Afleiding der uitdrukkingen voor snelheid en energie.

1. In het volgende zal voornamelijk gehandeld worden over de *rechte* botsing van vaste lichamen; dit eenvoudig hoofdgeval laat toch eene meer heldere uiteenzetting van het

samengestelde proces der botsingverschijnselen toe. Voor het geval der *scheeve* botsing volgt eene afzonderlijke behandeling, ten einde de resultaten, waartoe wij geraken, in meer algemeenen vorm te kunnen aangeven.

De vorm der botsende massa's wordt niet vastgesteld; men kan dezen bij het volgende willekeurig aannemen, mits de lichamen zich zóó bewegen, dat aan de voorwaarden der rechte botsing wordt voldaan, waarbij een normale stoot plaats vindt volgens de lijn, die de zwaartepunten der beide massa's verbindt.

Eenvoudigheidshalve onderstellen wij, dat de lichamen aanvankelijk slechts eene voortgaande beweging bezitten, en sluiten dus eene draaiende beweging vóór de botsing uit.

De massa's hebben aanvankelijk gegevene snelheden, met hetzelfde teeken, zoo zij in dezelfde richting zijn.

Aantrekkende of afstootende krachten, tusschen beide lichamen werkzaam, laten wij, als gewoonlijk, buiten rekening, daar gedurende den korten tijd der botsing haar invloed uiterst gering is. Nemen wij verder aan, dat de stoot niet zoo hevig is, dat daardoor een merkbaar blijvenden indruk in een der lichamen wordt voortgebracht, zoo kunnen wij de door NEWTON gevondene wet vooropstellen, volgens welke de betrekkelijke snelheid, waarmede de beide lichamen na de botsing uiteengaan, zich tot die, waarmede zij vóór de botsing elkander naderen, in eene voor dezelfde lichamen standvastige verhouding staat.

Behalve door NEWTON zelven, is die wet door HODGKINSON *) in eene groote reeks van waarnemingen onderzocht en juist bevonden. Die verhouding is echter niet altijd constant; zij vermindert bij groote snelheden. Wij zullen deze verhouding door *e* voorstellen. Zij werd, naar aanleiding van NEWTON's woorden, minder juist »elasticiteits-coëfficiënt" geheeten. Zooals thans gebruikelijk wordt, willen wij haar »restitutie-coëfficiënt" noemen.

Voor volkomen veerkrachtige lichamen is zij de eenheid,

---

*) *Report of the British Association for* 1834.

voor geheel onveerkrachtige nul; die coëfficiënt is dus in het algemeen een gebroken, dat voor meerdere lichamen bepaald is en hoewel de coëfficiënt met de veerkracht in verband schijnt, drukt zij thans voor ons slechts het eigenaardig gedrag der lichamen gedurende de botsing uit.

Duiden wij dan door v, v' en V, V' de snelheden der lichamen vóór en na de botsing aan, zoo behoeven wij slechts twee vergelijkingen ter bepaling der laatste grootheden:

1⁰ de vergelijking, die uitdrukt, dat de som der bewegingsmomenten constant blijft,

2⁰ de wet van NEWTON.

Derhalve

$$mV + m'V' = mv + m'v' \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$V' - V = e(v - v') \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Noemen wij de verhouding der massa's p, die der snelheden vóór de botsing q, zoodat

$$m' = pm, \quad v' = qv;$$

stellen wij ter bekorting,

$$1 + pq = \delta \text{ en } 1 - q = f,$$

zoo worden bovenstaande vergelijkingen,

$$V + pV' = \delta v$$

$$V' - V = efv,$$

waaruit,
$$V = \frac{\delta - epf}{1 + p} v \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

$$V' = \frac{\delta + ef}{1 + p} v \quad \ldots\ldots\ldots (4).$$

Merken wij als bijzondere gevallen op:

1⁰. Als de massa's gelijk zijn, $p = 1$, $\delta = 1 + q = \delta'$

$$V = \frac{\delta' - ef}{2} v, \quad V' = \frac{\delta' + ef}{2} v$$

dus $V + V' = \delta' v = (1 + q) v = v + v'$, wat ook e zij.

2⁰. Als het tweede lichaam aanvankelijk in rust is, derhalve

$$q = 0, \quad \delta = 1, \quad f = 1, \quad V = \frac{1-ep}{1+p} v, \quad V' = \frac{1+e}{1+p} v.$$

3⁰. Als beide voorwaarden gelijktijdig vervuld zijn,

$$p = 1 \text{ en } q = 0, \quad V = \frac{1-e}{2} v, \quad V' = \frac{1+e}{2} v$$

zoodat $V + V' = v$, wat ook e.

4⁰. Als het tweede lichaam zich in tegengestelden zin beweegt, wordt q negatief, gelijk $-q_1$, $\delta = 1 - pq_1$, $f = 1 + q_1$.

Deze laatste opmerkingen, hoe allereenvoudigst ook, meenden wij, daar zij algemeen zijn, niet achterwege te moeten laten.

Andere gevolgen zullen wij te gelijk met twee vraagstukken omtrent energie bespreken, wanneer de formules voor de kinetische energiën der beide lichamen na de botsing gegeven zijn.

2. De door Newton proefondervindelijk gevondene wet geeft, bij invoering der snelheid u van het zwaartepunt der beide massa's, eene belangrijke betrekking tusschen de snelheden vóór en na de botsing.

Daar

$$u = \frac{mv + m'v'}{m + m'} = \frac{1 + pq}{1 + p} v = \frac{\delta}{1 + p} v$$

en dus

$$(1 + p)u = \delta v$$

volgt uit (1) en (2)

$$V + pV' = \delta v = (1 + p)u$$

$$V' - V = efv$$

dus

$$(1 + p)V = (1 + p)u - epfv \quad . \; . \; . \; . \; (5)$$

$$(1 + p)V' = (1 + p)u + efv \quad . \; . \; . \; . \; . \; (6).$$

(5) geeft

$$u - V = \frac{epfv}{1+p} = e\frac{pv - pqv}{1+p} = e\frac{(1+p)v - (1+pq)v}{1+p} = e(v - u),$$

evenzoo volgt uit (6),

$$V' - u = \frac{efv}{1+p} = e\frac{v-v'}{1+p} = e\frac{v+pv'-v'-pv'}{1+p} = e(u-v')$$

dus

$$u - V = e(v-u) \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

$$V' - u = e(u-v') \quad \ldots\ldots\ldots (8).$$

Na de botsing zijn derhalve de betrekkelijke snelheden der beide lichamen ten opzichte van het zwaartepunt in richting omgekeerd en in reden van $1:e$ verminderd; dus daar $e =$ of < 1, in het algemeen kleiner geworden.

Voor $e = 0$ verdwijnt de betrekkelijke snelheid ten opzichte vaa het zwaartepunt na de botsing en wordt

$$V = u = V'.$$

3. Uit de waarden (3) en (4) voor V en V', volgt terstond, als $\alpha = \frac{mv^2}{2}$ en $\alpha' = \frac{m'v'^2}{2}$, $\beta = \frac{mV^2}{2}$ en $\beta' = \frac{m'V'^2}{2}$ de energiën der beide massa's vóór en na de botsing aanduiden,

$$\beta = \left(\frac{\delta - epf}{1+p}\right)^2 \alpha \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

$$\beta' = \left(\frac{\delta + ef}{1+p}\right)^2 p\alpha \quad \ldots\ldots\ldots (10).$$

De energiën der beide lichamen zijn dus door middel der aanvankelijke energie α van het eerst aangenomen lichaam uitgedrukt.

Zoo noodig kan in (10) α door $\frac{\alpha'}{pq^2}$ worden vervangen; β' gaat dan over in

$$\beta' = \left(\frac{\delta + ef}{\delta - f}\right)^2 \alpha' \quad \ldots\ldots\ldots (10_a).$$

De zeer eenvoudige uitdrukkingen (9) en (10) zullen wij steeds, als de meest doelmatige, gebruiken. Zij geven eene regelmatige en spoedige oplossing van de vraagstukken der botsing,

daar ook, blijkens het vorige, de factoren van α en $p\alpha$ de waarden $\frac{V^2}{v^2}$ en $\frac{V'^2}{v^2}$ voorstellen.

4. Enkele vraagstukken mogen de bruikbaarheid der bedoelde formules toelichten.

1e. *De voorwaarde, dat het eerste lichaam na botsing tot rust komt.*

Form. (9) geeft $\delta = epf$ of $1 + pq = ep(1 - q)$.

Als bijzondere gevallen merken wij op:

a. Zoo het tweede lichaam aanvankelijk in rust is, dus $q = 0$, zal $e = \frac{1}{p} = \frac{m}{m'}$, moeten zijn.

b. Bij gelijke massa's $p = 1$, moet $q = -\frac{1-e}{1+e}$, of bij volkomen veerkrachtige lichamen $q = 0$.

c. Bij gelijke, doch tegengestelde snelheden of $q = -1$, moet $p = \frac{1}{1+2e}$ of bij volkomen veerkrachtige lichamen $p = \frac{1}{3}$ d. i. $m' = \frac{1}{3}m$.

d. Zijn de bewegingsmomenten tegengesteld gelijk, of $\delta = 0$ zoo moet $e = 0$; de massa's onveerkrachtig.

De onderstelling $q = -1$ maakt $V' = 0$ (het tweede lichaam na botsing in rust) of $\delta + ef = 0$ als $p = 1 + 2e$; bij volkomen veerkrachtige lichamen $p = 3$, d. i. $m' = 3m$.

2e. *De voorwaarde, dat twee botsende lichamen van snelheid wisselen.*

$$\begin{aligned} \delta - epf &= q(1+p) & \qquad \delta + ef &= 1 + p, \\ 1 - epf &= q & pq + ef &= p, \\ epf &= f & ef &= pf, \\ V = v' \text{ eischt } ep &= 1, & V' = v \text{ vordert } e &= p. \end{aligned}$$

Voor wisseling der snelheden is dus noodig:

$$e = p = 1,$$

d. i. de lichamen moeten gelijke massa's hebben en volkomen veerkrachtig zijn.

3°. *Het verlies aan kinetische energie van voortgaande beweging bij de botsing.*

Noemen wij de som der kinetische energiën vóór de botsing W en daarna w, zoo is

$$W = (1 + pq^2)\alpha \qquad w = \beta + \beta' = \frac{\delta^2 + e^2 pf^2}{1+p}\alpha$$

zoodat het verlies U aan kinetische energie bij de botsing uitgedrukt wordt door de vergelijking

$$U = W - w = (1 - e^2)\,\frac{pf^2}{1+p}\,\alpha\,.$$

Dit verlies verdwijnt dus bij volmaakt veerkrachtige lichamen, wanneer $e = 1$; het is het grootst bij onveerkrachtige, waar $e = 0$; dan zal

$$U_0 = \frac{pf^2}{1+p}\,\alpha = \frac{p^2f^2 + pf^2}{(1+p)^2}\alpha = \frac{(1+p-\delta)^2 + p(\delta - q(1+p))^2}{(1+p)^2}\,\alpha$$

$$= \frac{1}{2}\,m\,(v-u)^2 + \frac{1}{2}\,m'\,(u-v')^2$$

d. i. het verlies is gelijk de som van de halve levende krachten der verlorene en gewonnen snelheden. Het bekende beginsel van CARNOT.

4°. *De voorwaarde, dat de totale kinetische energie na botsing* $\frac{1}{n}$ *der aanvankelijke energie zij.*

$$W = nw \quad \text{of} \quad (1 + pq^2)\alpha = n\left(\frac{\delta^2 + e^2pf^2}{1+p}\right)\alpha$$

$$n\delta^2 + e^2npf^2 = (1+p)(1+pq^2)$$

$$e^2 = \frac{(1 + p - n) + (q - 2n)\,pq + (1-n)\,p^2q^2}{np(1-q)^2}$$

zal $n = 1$, dus geen verlies plaats hebben, zoo moet $e = 1$.

Is het tweede lichaam aanvankelijk in rust, zoo wordt $q = 0$ en

$$e^2 = \frac{1 + p - n}{np} = \frac{m + m' - nm}{nm'};$$

als bovendien de massa's gelijk zijn, dus $p = 1$, wordt

$$e^2 = \frac{2 - n}{n},$$

zoodat steeds $n < 2$; dat is, wanneer eene willekeurige massa tegen eene even groote stilstaande massa botst, gaat nooit meer dan de helft der aanvankelijke kinetische energie der voortgaande beweging in anderen energievorm over.

B. Verdeeling der kinetische energie bij de botsing.

5. Met het oog op de te geven ontwikkeling, moge nog eene tweede afleiding der formules (9) en (10) volgen.

Als weder u de snelheid van het zwaartepunt der botsende massa's aanduidt, v, v', V, V' de snelheden vóór en na de botsing voorstellen, heeft men

$$\begin{array}{llllll} v & \text{of} & u + (v - u) & \text{en} & v' & \text{of} \quad u - (u - v') \\ V & » & u + (V - u) & » & V' & » \quad u - (u - V'); \end{array}$$

zoodat, daar volgens Newton (Vergel. N⁰. 2)

$$V - u = e(u - v) \qquad \text{en} \qquad u - V' = e(v' - u),$$

de snelheden na botsing worden

$$u - e(v - u) \qquad\qquad u + e(u - v').$$

Derhalve zullen de aanvankelijke energiën

$$(u + (v - u))^2 \frac{m}{2} \qquad\qquad (u - (u - v'))^2 \frac{m'}{2}$$

of $$\alpha = \left(\frac{\delta + pf}{1 + p}\right)^2 \alpha \qquad \alpha' = \left(\frac{\delta - f}{1 + p}\right)^2 p\alpha$$

overgaan in

$$(u - e(v - u))^2 \frac{m}{2} \qquad (u + e(u - v'))^2 \frac{m'}{2},$$

of wel in

$$\beta = \left(\frac{\delta - epf}{1 + p}\right)^2 \alpha \qquad \beta' = \left(\frac{\delta + ef}{1 + p}\right)^2 p\alpha.$$

Blijkbaar verschilt deze afleiding daardoor van de vorige, dat bij de eerste bepaling de onveranderlijkheid der hoeveelheden van beweging vóór en na de botsing werd gebezigd, bij deze de snelheid van het zwaartepunt der botsende lichamen is ingevoerd.

6. Wanneer wij de uitdrukkingen α, α' en β, β' ontwikkelen en ons eenvoudig tot de tellers bepalen, zien wij, dat bij de botsing de vormen,

$$\text{(I)} \quad \delta^2 + 2pf\delta + p^2f^2 \qquad p\delta^2 - 2pf\delta + pf^2 \quad \text{(I')}$$

overgaan in

$$\text{(II)} \quad \delta^2 - 2epf\delta + e^2p^2f^2 \qquad p\delta^2 + 2epf\delta + e^2pf^2 \quad \text{(II')}$$

In elk dezer vormen behoort, blijkens het in N^0. 5 ontwikkelde, de laatste term tot de betrekkelijke energie ten opzichte van het zwaartepunt; de beide eerste termen behooren tot, wat men zou kunnen noemen, de energie van het zwaartepunt; dat is, de kinetische energie der beide massa's, in het zwaartepunt vereenigd gedacht.

Die energie van het zwaartepunt is, volgens bovenstaande formules dezelfde vóór en na de botsing, zooals de eenparige beweging van het zwaartepunt medebrengt en wel is dit gedeelte der energie:

$$\frac{\delta^2}{1 + p} \alpha \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (11).$$

Wij komen later op deze uitdrukking en de verdeeling

dier energie over de beide lichamen vóór en na de botsing meer uitvoerig terug.

Wat de betrekkelijke energie betreft, zij heeft vóór en na de botsing de totale waarden:

vóór:

$$\frac{p^2 f^2 + p f^2}{(1+p)^2}\,\alpha = \frac{p f^2}{1+p}\,\alpha \;\ldots\ldots \quad (12)$$

na:

$$\frac{e^2 p^2 f^2 + e^2 p f^2}{(1+p)^2}\,\alpha = \frac{e^2 p f^2}{1+p}\,\alpha; \;\ldots\ldots \quad (13)$$

zij is dus gedurende de botsing, blijkbaar ten gevolge van de zamendrukking der botsende lichamen, verminderd met de hoeveelheid

$$U = (1-e^2)\frac{p f^2}{1+p}\,\alpha \;\ldots\ldots\ldots \quad (14).$$

Hoe uit deze vergelijking het bekende begingsel van Carnot volgt, zagen wij boven (N^0. 4, 3^e vraagstuk).

Het verlies bedraagt voor elk der lichamen afzonderlijk genomen,

$$T = (1-e^2)\frac{p^2 f^2}{(1+p)^2}\,\alpha \;\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

$$T' = (1-e^2)\frac{p f^2}{(1+p)^2}\,\alpha \;\ldots\ldots\ldots \quad (16).$$

Wij moeten ons dus voorstellen, dat gedurende het eerste gedeelte der botsing de betrekkelijke energiën

$$\frac{p^2 f^2}{(1+p)^2}\,\alpha \quad \text{en} \quad \frac{p f^2}{(1+p)^2}\,\alpha \;\ldots\ldots \quad (17)$$

als kinetische energie van de voortgaande beweging der botsende lichamen verdwijnt. In het tweede gedeelte der botsing treden de hoeveelheden

$$e^2\,\frac{p^2 f^2}{(1+p)^2}\,\alpha \quad \text{en} \quad e^2\,\frac{p f^2}{(1+p)^2}\,\alpha, \;\ldots\ldots \quad (18)$$

derhalve een gedeelte der hoeveelheden (17) weder als kinetische energie der betrekkelijke beweging op. Bij volkomen veerkrachtige lichamen heeft die terugkeer tot den kinetischen vorm *volledig* plaats, doch een verdwijnen en daarna weder optreden der kinetische energie geschiedt altijd, in verband met de tijdelijke, zij het ook geringe vormverandering der onveerkrachtige lichamen.

Bij onveerkrachtige lichamen blijft de terugkeer tot den kinetischen vorm *geheel achterwege.* In het algemeen wordt een, dikwijls aanmerkelijk, deel door de grootte van den coëfficiënt e^2 aangewezen, tot kinetische energie, tot voortgaande beweging (wel te onderscheiden van inwendige trilling) teruggebracht.

Voor ijzer (staal) is $e = \frac{5}{9}$, voor ivoor $\frac{8}{9}$, voor glas $\frac{15}{16}$, dus zal voor

ijzer 0,31 , ivoor 0,78 , glas 0,88

der aanvankelijke energie na de botsing in denzelfden kinetischen vorm aanwezig zijn en gaat derhalve bij

ijzer 0,69 , ivoor 0,22 , glas 0,12

tot anderen energievorm over, welken wij echter in dit opstel niet nader zullen onderzoeken.

Het niet teruggekeerde gedeelte der betrekkelijke kinetische energie door (14) geheel, door (15) en (16) gedeeltelijk aangegeven, wordt gewoonlijk minder juist *verloren* energie genoemd.

7. Wij merkten boven op, dat de zoogenaamde kinetische energie van het zwaartepunt, die vóór en na de botsing eene standvastige waarde behoudt, door de uitdrukking (13) wordt aangeduid. Het blijkt echter uit de in N°. 6 gegevene vormen, dat die energie vóór en na de botsing anders over de beide lichamen verdeeld wordt, en wel bevatten de lichamen, ieder afzonderlijk beschouwd, de volgende hoeveelheden dier energie:

vóór:

$$\frac{\delta^2 + 2pf\delta}{(1+p)^2}\alpha \quad \text{en} \quad \frac{p\delta^2 - 2pf\delta}{(1+p)^2}\alpha \ldots\ldots (19)$$

na:

$$\frac{\delta^2 - 2epf\delta}{(1+p)^2}\alpha \quad \text{en} \quad \frac{p\delta^2 + 2epf\delta}{(1+p)^2}\alpha; \ldots\ldots (20)$$

dus is in het eerste lichaam die kinetische energie *verminderd* met

$$2(1+e)\frac{pf\delta}{(1+p)^2}\alpha$$

in het tweede lichaam is zij evenveel *vermeerderd.*

Blijkbaar hebben wij hier met eenen *overgang*, een *transport* der energie van het eerste lichaam naar het tweede te doen, waarbij de grootte der overgedragene energie

$$C = 2(1+e)\frac{pf\delta}{(1+p)^2}\alpha \ldots\ldots\ldots (21)$$

of voor p, f, δ, α hunne waarden schrijvende,

$$C = (1+e)\frac{mm'(mv + m'v')(v-v')}{(m+m')^2} \ldots\ldots (22)$$

C. De overgang van energie bij de botsing.

8. Op geheel andere wijze laat zich de overgang der energie van het eene lichaam op het andere bepalen, waarbij dit verschijnsel tevens eigenaardig wordt toegelicht.

Verdeelen wij, als gewoonlijk, het geheele verloop der botsing in twee deelen, zoo zal op het einde van het eerste deel, wanneer de betrekkelijke kinetische energie ten opzichte van het zwaartepunt als zoodanig verdwenen is, eene totale kinetische energie, vergel. form. (11), $\frac{\delta^2}{1+p}\alpha$ overblijven.

Deze is (N°. 6 I en I') als volgt over beide lichamen verdeeld:

$$\frac{\delta^2 + 2\,p\,f\,\delta}{(1+p)^2}\,\alpha \quad \text{en} \quad \frac{p\,\delta^2 - 2\,p\,f\,\delta}{(1+p)^2}\,\alpha. \;.\;.\;.\; (23)$$

De beide lichamen vormen op het einde van het eerste deel eene vereenigde massa, die met de snelheid u voortgaat; de beide zamenstellende deelen dier massa, m en m' of m en $p\,m$, verhouden zich als $1:p$. Het laat zich verwachten, dat de aanwezige kinetische energie $\frac{\delta^2}{1+p}\,\alpha$ zich in die zelfde verhouding over de beide massa's verdeelen zal, zoodat de beide lichamen afzonderlijk bezitten

$$\frac{\delta^2}{(1+p)^2}\,\alpha \quad \text{en} \quad \frac{p\,\delta^2}{(1+p)^2}\,\alpha. \;.\;.\;.\;.\;.\; (24)$$

Vergelijken wij deze waarden met die, in (23) gegeven, zoo blijkt, dat voor die gelijkmatige verdeeling der energie gevorderd wordt, dat van het eerste lichaam de hoeveelheid energie

$$C_1 = \frac{2\,p\,f\,\delta}{(1+p)^2}\,\alpha$$

naar het tweede overgaat.

Werkelijk stemt dit met de in (21) voor C gevonden waarde overeen; immers, zoo wij daarin $e = 0$ stellen, dus het gedeelte nemen, dat tot het eerste deel der botsing behoort en waartoe zich het transport van energie bij onveerkrachtige lichamen bepaalt, vinden wij juist de boven gegevene waarde C_1. Zoo wordt dan het eene gedeelte van dit energietransport toegelicht en blijkt, dat de kinetische energie zich zoodanig over de beide vereenigde massa's verdeelt, dat de (volume) dichtheid der energie in beide massa's dezelfde is. Het aanwezig zijn der energie onder anderen vorm, afkomstig van de vroeger aanwezige betrekkelijke beweging, heeft dus blijkbaar op deze verdeeling geen invloed, wat zeker merkwaardig is.

Gedurende het tweede deel treden in de beide lichamen de betrekkelijke energiën

$$\frac{e^2 p^2 f^2}{(1+p)^2}\alpha \quad \text{en} \quad \frac{e^2 p f^2}{(1+p)^2}\alpha$$

weder op en worden dus, ook wegens den overgang C_1, de energiën der beide lichamen, (vergel. form. (24)),

$$\frac{\delta^2 + e^2 p^2 f^2}{(1+p)^2}\alpha \quad \text{en} \quad \frac{p\delta^2 + e^2 p f^2}{(1+p)^2}\alpha, \quad \ldots \ldots (25)$$

correspondeerende met de snelheden:

$$\frac{\sqrt{\delta^2 + e^2 p^2 f^2}}{1+p}v \quad \text{en} \quad \frac{\sqrt{\delta^2 + e^2 f^2}}{1+p}v \quad \ldots \ldots (26)$$

Zal de beweging van het zwaartepunt met dezelfde eenparige snelheid

$$u = \frac{mv + m'v'}{m + m'} = \frac{1+pq}{1+p}v = \frac{\delta}{1+p}v \quad \ldots (27)$$

behouden als vóór de botsing, zoo moet dus

$$\frac{\frac{\sqrt{\delta^2 + e^2 p^2 f^2}}{1+p}v + p\frac{\sqrt{\delta^2 + e^2 f^2}}{1+p}v}{1+p} = u = \frac{\delta}{1+p}v$$

of

$$\sqrt{\delta^2 + e^2 p^2 f^2} + p\sqrt{\delta^2 + e^2 f^2} = (1+p)\delta,$$

wat, zooals terstond bij de ontwikkeling der wortelvormen blijkt, *niet* het geval is.

Een tweede energietransport kan echter de verhouding der energiën zoodanig regelen, dat aan (27) voldaan wordt. Zij daartoe $\frac{p x^2}{(1+p)^2}\alpha$, waarin x^2 een nog onbekende factor, de van het eerste lichaam naar het tweede overgevoerde

energie, gedurende het tweede deel der botsing; voor de uitdrukkingen (25) volgt dan,

$$\frac{\delta^2 + e^2p^2f^2 - px^2}{(1+p)^2}\alpha \quad \text{en} \quad \frac{\delta^2 + e^2f^2 + x^2}{(1+p)^2}p\alpha;$$

de snelheden worden

$$\frac{\sqrt{\delta^2 + e^2p^2f^2 - px^2}}{1+p}v \quad \text{en} \quad \frac{\sqrt{\delta^2 + e^2f^2 + x^2}}{1+p}v.$$

De vergelijking (27) geeft dan als voorwaarde:

$$\sqrt{\delta^2 + e^2p^2f^2 - px^2} + p\sqrt{\delta^2 + e^2f^2 + x^2} = (1+p)\delta;$$

waaruit volgt,

$$2\delta\sqrt{\delta^2 + e^2p^2f^2 - px^2} = 2\delta^2 - px^2$$

of

$$x^2 = 2ef\delta,$$

zoodat

$$C_2 = \frac{px^2}{(1+p)^2}\alpha = \frac{2epf\delta}{(1+p)^2}\alpha,$$

zijnde juist het nog ontbrekende deel van C (vergel. form. 21).

Dit gedeelte, dat dus door zijn overgang van het eerste lichaam op het tweede het zwaartepunt van het stelsel met dezelfde eenparige snelheid als vóór de botsing doet voortgaan, vormt als het ware de reactie tot het weder optreden der vroeger aanwezige betrekkelijke energie.

Het energietransport C is dus in zijne beide deelen een direct gevolg van de, wegens het plotseling samentreffen der lichamen tijdelijke, misschien ook gedeeltelijk blijvende vervorming. Hierbij verdwijnt de betrekkelijke energie, t. o. van het zwaartepunt, doch wordt weder ten deele hersteld; de overgang van energie is dus van dit verdwijnen en optreden een onmiddellijk en noodwendig gevolg.

Het transport C_1 correspondeert met de samendrukking der

meer of min veerkrachtige lichamen, de overgang $C_2 = e\,C_1$ met het gedeeltelijk terugkeeren tot den vorigen vorm.

Het dus verkregen resultaat, waarbij een beginsel der dynamica dien overgang der energie noodwendig maakt, dringend vordert, geeft, al laat deze uiteenzetting in algemeenheid nog te wenschen over, aan de theorie der energie, zooals die thans behandeld is, een steun, die niet gering te achten is. Het doet tevens de mogelijkheid doorzien en waarschijnlijk worden, de leer der energie tot de hoofdbeginselen der mechanica terug te voeren en daardoor wellicht voor het onderling verband dier beginselen nieuwe uitzichten te openen.

9. Het dus verkregen energietransport laat zich onder verschillende vormen brengen. Wij vonden vooreerst

$$C = 2(1+e)\,\frac{p f \delta}{(1+p)^2}\,\alpha$$

$$= 2(1+e)\,\frac{p(1-q)(1+pq)}{(1+p)^2}\,\alpha \;.\;.\;.\;.\;.\; \text{(I)}$$

en

$$C = (1+e)\,\frac{m m'(m v + m' v')}{(m+m')^2}\,(v-v'), \;.\;.\;.\; \text{(II)}$$

waaruit blijkt, dat C steeds voor volkomen veerkrachtige lichamen tweemaal grooter is dan voor geheel onveerkrachtige.

Ten einde deze laatste uitdrukking doelmatig te herleiden, kunnen wij de (impulsieve) krachten R_1 en R_2 invoeren, die gedurende de beide deelen der botsing op ieder lichaam in tegengestelde richting werken, R_1 en $-R_1$ in het eerste, R_2 en $-R_2$ in het tweede deel der botsing.

Op het einde van het eerste deel zijn de snelheden der beide lichamen gelijk, waardoor de betrekking

$$\frac{m v - R_1}{m} = \frac{m' v' + R_1}{m'},$$

zoodat

$$R_1 = \frac{m m'}{m + m'}\,(v - v').$$

Aan het einde van het tweede deel, wanneer de lichamen uiteengaan, is

$$V = \frac{mv - (R_1 + R_2)}{m}, \quad V' = \frac{m'v' + (R_1 + R_2)}{m'};$$

terwijl nu

$$V' - V = e(v - v')$$

en R_1 boven gevonden werd, volgt spoedig $R_2 = eR_1$, zooals te voorzien was.

Dientengevolge gaat (II) over in

$$C = (R_1 + R_2)\,\frac{mv + m'v'}{m + m'}$$

of

$$C = (R_1 + R_2)u, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (III)$$

zoodat

$$C_1 = R_1 u, \qquad C_2 = R_2 u \quad \ldots\ldots \quad (III_a)$$

Wanneer wij opmerken, dat

$$\alpha = \frac{v^2 m}{2}, \quad \frac{1 + pq}{1 + p}\,v = u$$

en

$$\frac{p(1 - q)}{1 + p}\,v = \frac{1 + p - (1 + pq)}{1 + p}\,v = v - u,$$

laat zich voor den vorm (I) schrijven

$$C = (1 + e)m(v - u)u, \quad \ldots\ldots \quad (IV)$$

waardoor

$$C_1 = m(v - u)u \quad \text{en} \quad C_2 = em(v - u)u. \; . \; . \; (IV_a).$$

De vergelijkingen (III_a) leiden tot een belangrijk gevolg. Er blijkt toch, dat de overgang van energie bepaald wordt door het product der impulsieve krachten met de snelheid u, waarmede de massa zich tijdens den overgang beweegt.

Deze zeer eenvoudige wet stemt volkomen overeen met

wat langs geheel anderen weg voor de beweging der energie in vaste lichamen gevonden is door UMOW *). — Deze Russische geleerde, die zich echter niet opzettelijk met de botsing bezig hield, hiervan zelfs met geen enkel woord gewaagt, onderzocht de beweging der kinetische energie, bij de onderstelling, dat die energie als eene samendrukbare, veerkrachtige vloeistof beschouwd wordt. Hij vond, dat de energie, die in een bepaalden tijd door de vlakteeenheid van een vast lichaam in de richting der drukkende kracht (Spannkraft) gaat, wordt uitgedrukt door het product dier kracht met de composante volgens de krachtrichting van de snelheid van het zwaartepunt der massa.

In het geval der *rechte* botsing, dat wij thans behandelen, blijkt uit (III_a), dat men werkelijk met een bijzonder geval dier wet te doen heeft en dat dit deel der kinetische energie zich bij de rechte botsing inderdaad als eene samendrukbare, veerkrachtige vloeistof gedraagt, zich althans volgens dezelfde regels beweegt, die bij zoodanige onderstelling gelden. Zulks was zeker niet te voorzien en vorderde een onafhankelijk betoog. De overeenkomst, die onze uitdrukking voor het energietransport in dit geval vertoont, schijnt ons om die reden, ook al zijn wij nog volstrekt niet geneigd de energie als eene vloeistof te beschouwen, een resultaat van beteekenis.

Merken wij ten slotte nog op, dat door ons de kinetische energie berekend is ten opzichte der als stilstaand beschouwde omgeving. De snelheid van het zwaartepunt is, volgens de gewone begrippen der mechanica, bij het afwezig zijn van uitwendige krachten, een direct gevolg van de aangenomene snelheden der beide lichamen en van hunne bekende massa's. Wil men ook de beweging der omgeving, bijvoorbeeld die der aarde of van beslotene ruimten, die zich op haar oppervlak bewegen en waarbinnen die botsing plaats vindt, in rekening brengen, zoo moet ook de aanvankelijke energie der massa's daarnaar gewijzigd worden.

---

*) Ableitung der Bewegungsgleichungen der Energie in continuirlichen Körpern, von NICOLAUS UMOW, Docent an der Universität Odessa. *Zeitschrift für Mathematik und Physik* XIX. S. 418.

Ter verklaring van de verschijnselen der botsing, kan eene nadere behandeling van dit vraagstuk, dat eigenaardige moeilijkheden heeft, achterwege blijven. Trouwens, zooals bekend, is de bepaling der *absolute* energie, die eenig lichaam bevat, onmogelijk en wordt voor het aangegeven geval allereerst bekendheid met de rol, die de omgeving als drager der energie vervult, en waarschijnlijk meer dan dat, gevorderd. Men moet zich dus, en dit heeft voor de botsing vermoedelijk geen bezwaar, met de kennis der (betrekkelijke) kinetische energie ten opzichte van eene eenmaal aangenomene beweging tevreden stellen.

10. De vormen (I) en (IV) voor C

$$C = 2(1+e)\frac{p(1-q)(1+pq)}{(1+p)^2}\alpha$$

$$C = (1+e)\,m\,(v-u)\,u\,,$$

geven terstond aan, dat C verdwijnt,

1^e Als $q = 1$ of $v = u$. Dit geval komt echter niet in aanmerking, daar alsdan geene botsing plaats heeft; de beide massa's bewegen zich in dit geval met gelijke snelheid in dezelfde richting en ontmoeten elkander niet.

2^e Als $1 + pq = 0$ of $u = 0$, dat is als het zwaartepunt in rust is of $mv = -m'v'$, zoodat de beide lichamen vóór de botsing gelijke doch tegengestelde bewegingsmomenten bezitten.

In dit merkwaardige geval verdwijnt C_1 (zie N^0. 8), daar $\delta = 0$; de lichamen bevatten, daar op het einde van het eerste deel de vereenigde massa in rust is, geene kinetische energie. Eveneens vervalt C_2, daar, bij den stilstand van het zwaartepunt, de noodzakelijkheid voor energietransport, blijkens N^0. 8, niet bestaat.

Ondanks dit eigenaardig verdwijnen van C_1, vindt toch, als gewoonlijk, wat ook e, de transformatie der betrekkelijke energie ten opzichte van het zwaartepunt plaats en wel is, daar

$$q = -\frac{1}{p} \quad \text{dus} \quad \frac{pf}{1+p} = 1 \quad \text{en} \quad \alpha' = p\,q^2\,\alpha = -q\,\alpha = \frac{\alpha}{p}.$$

en volgens vergelijkingen (15) en (16)

$$T = (1 - e^2)\,\alpha \qquad T' = (1 - e^2)\frac{\alpha}{p} = (1 - e^2)\,\alpha' \,;$$

alle kinetische energie is hier betrekkelijke energie en bij onveerkrachtige lichamen gaat *alle* bewegingsenergie in anderen vorm over.

De *maximum-waarde* van C volgt onmiddellijk uit (IV).

Bij gegeven aanvankelijke snelheid v wordt toch het tweede lid het grootst als

$$\left.\begin{array}{c} u = \frac{1}{2} v \\ \text{of} \\ 1 + 2pq - p = 0 \end{array}\right\} , \quad \ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

aan welke voorwaarde dus oneindig vele bijzondere gevallen voldoen; onder anderen voor gelijke massa's als $q = 0$, dat is, bij gelijke massa's heeft het grootste energietransport plaats als de tweede massa in rust is.

In het algemeen volgt de maximum-waarde, die C verkrijgt, terstond uit (IV), die voor $u = \frac{1}{2} v$ geeft

$$C = (1 + e)\frac{m v^2}{4} = \frac{1 + e}{2}\,\alpha ,$$

terwijl in dit geval

$$T = \frac{1 - e^2}{4}\,\alpha \qquad T' = \frac{1 - e^2}{4}\,\frac{\alpha}{p} .$$

Bij volmaakt veerkrachtige lichamen gaat *alle* kinetische energie van het eerste lichaam naar het tweede over, bij onveerkrachtige lichamen, wanneer $C = \frac{1}{2}\alpha$ de *helft* dier energie. Verder blijkt, dat de zoogenaamde verlorene kinetische energiën T en T', wat ook e, een *vierde* gedeelte zijn van hun bedrag in geval geen energietransport plaats vindt.

Merken wij eindelijk naar aanleiding van het boven besproken verdwijnen van C op, dat voor $1 + pq < 0$, C *negatief* wordt; wanneer derhalve de lichamen zich vóór de botsing in tegengestelden zin bewegen en $m'v' > mv$, gaat energie van het *tweede* op het *eerste* lichaam over. Met andere woorden, bij *tegengestelde* bewegingsrichting vóór de botsing, gaat steeds energie van het lichaam met het grootste bewegingsmoment op dat met het kleinste over. Bij *gelijke* bewegingsrichting gaat het energietransport altijd van het lichaam uit, dat de grootste snelheid heeft en dat gewoonlijk als het *botsende* lichaam wordt aangeduid.

11. Bespreken wij thans kortelijk de scheeve botsing, zonder wrijving, dus tusschen gladde oppervlakken. Bepalen wij ons in dit geval tot twee *bollen* en nemen wij aan dat de bewegingsrichtingen vóór de botsing hoeken θ en θ', daarna hoeken φ en φ' met de lijn, die de middenpunten verbindt, maken. Daar geene bewegende kracht op de lichamen werkt in eene richting loodrecht op deze lijn, blijven de snelheden volgens die loodlijn onveranderd, zoodat

$$\left.\begin{array}{l} V \sin\varphi = v \sin\theta \\ V' \sin\varphi' = v' \sin\theta' \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

Volgende denzelfden weg als in N^0. 1, zoo zal,

$$\left.\begin{array}{l} V \cos\varphi = \dfrac{(mv\cos\theta + m'v'\cos\theta') - em'(v\cos\theta - v'\cos\theta')}{m+m'} \\ V'\cos\varphi' = \dfrac{(mv\cos\theta + m'v'\cos\theta') + em(v\cos\theta - v'\cos\theta')}{m+m'} \end{array}\right\} \ldots (30)$$

Stellen wij

$$\frac{v'\cos\theta'}{v\cos\theta} = q', \qquad 1 + pq' = \delta', \qquad 1 - q' = f',$$

zoo volgt uit (30)

$$V\cos\varphi = \frac{(1+pq') - ep(1-q')}{1+p} v\cos\theta = \left(\frac{\delta' - epf'}{1+p}\right) v\cos\theta$$

en daar (29) geeft

$$V \sin\varphi = v \sin\theta,$$

zal

$$V^2 = \left\{ \left(\frac{\delta' - e p f'}{1+p} \right)^2 \cos^2\theta + \sin^2\theta \right\} v^2$$

of

$$\beta = \left\{ \left(\frac{\delta' - e p f'}{1+p} \right)^2 \cos^2\theta + \sin^2\theta \right\} \alpha, \quad . \; . \; . \; (31)$$

daar

$$1 + p = 1 + p q' + p - p q' = \delta' + p f',$$

wordt

$$\alpha = \left\{ \left(\frac{\delta' + p f'}{1+p} \right)^2 \cos^2\theta + \sin^2\theta \right\} \alpha \quad . \; . \; . \; . \; (32)$$

(31) en (32) vergelijkende, volgt (zie N^0. 7)

$$C = 2(1+e) \frac{p f' \delta'}{(1+p)^2} \cos^2\theta . \alpha, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (V)$$

$$= 2(1+e) \frac{p(1-q')(1+pq')}{(1+p)^2} \cos^2\theta . \alpha, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (V_a)$$

$$= (1+e) \frac{p(v\cos\theta - v'\cos\theta')}{1+p} . \frac{(v\cos\theta + p v'\cos\theta')}{1+p} m . . (V_b)$$

De overdracht der energie is dus gelijk aan de bij de botsing werkzame kracht, vermenigvuldigd met de composante der snelheid van het zwaartepunt, volgens die krachtrichting. Waardoor de regel van Umow (N°. 9) ook bij de scheeve botsing bevestigd wordt.

Ten slotte zij opgemerkt, dat voor dit meer algemeen geval de zoogenaamde verlorene energie (zie N^0. 6, form. 14,

15, 16), zoowel voor het geheele stelsel als voor de massa's afzonderlijk, wordt,

$$\left.\begin{aligned} U &= (1-e^2)\frac{p f'^2}{1+p}\cos^2\theta.\,\alpha \\ &= \frac{(1-e^2)}{2}\frac{m\,m'}{m+m'}(v\cos\theta - v'\cos\theta')^2 \end{aligned}\right\}\quad\ldots\ (33)$$

en voor ieder der massa's afzonderlijk

$$T = (1-e^2)\frac{p^2 f'^2}{(1+p)^2}\cos^2\theta.\,\alpha$$

$$T' = (1-e^2)\frac{p f'^2}{(1+p)^2}\cos^2\theta.\,\alpha$$

of

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{1-e^2}{2}\cdot\frac{m\,m'^2}{(m+m')^2}(v\cos\theta - v'\cos\theta')^2 \\ T' &= \frac{1-e^2}{2}\cdot\frac{m^2 m'}{(m+m')^2}(v\cos\theta - v'\cos\theta')^2 \end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ (34)$$

12. Ingevolge het thans behandelde, laten zich de uitdrukkingen voor de kinetische energie der beide lichamen na de botsing dus schrijven:

$$\beta = \alpha - C - T, \qquad \beta' = \alpha' + C - T'\,; \ldots (35)$$

vervangt men T, T' en C door hunne waarden (15), (16) en (I) van N^0. 9 en merkt men op, dat $\alpha' = p\,q^2\,\alpha$, zoo volgen natuurlijk de waarden onder (9) en (10) verkregen.

Is het tweede lichaam aanvankelijk zonder beweging, zoo bedraagt de kinetische energie dier massa na botsing,

$$\beta' = C - T'\,;$$

in dit geval zal, daar $q = 0$,

$$C = 2(1+e)\frac{p}{(1+p)^2}\alpha \quad \text{en} \quad T' = (1-e^2)\frac{p}{(1+p)^2}\alpha.$$

Van de overgedragene energie blijft derhalve

$$C - T' = (1 + e)^2 \frac{p}{(1 + p)^2} \alpha \; \ldots\ldots \; (36)$$

in energie der voortgaande beweging bestaan; het overige

$$T' = (1 - e^2) \frac{p}{(1 + p)^2} \alpha \; \ldots\ldots\ldots \; (36_a)$$

gaat in anderen energievorm over.

De verhouding dier beide deelen

$$\frac{C - T'}{T'} = \frac{1 + e}{1 - e} \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (37)$$

hangt alleen van e af, is zoowel onafhankelijk van de verhouding der massa's als van de aanvankelijke energie van het botsende lichaam.

Voor onveerkrachtige lichamen is

$$C = 2\,T', \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (38)$$

C verdeelt zich dus in dit geval in twee *gelijke* deelen.

Bij willekeurige lichamen zullen de waarden (36) en (36_a), als α gegeven is, het grootst worden, wanneer $p = 1$, dat is als de massa's gelijk zijn. Hieruit verklaart zich, dat men, bij vele toepassingen der botsingverschijnselen, in geval de tweede massa groot is, de botsende massa ook groot neemt. Daar wij thans niet op een nader onderzoek der zoogenaamde verloren energie kunnen ingaan, moeten wij ons tot deze opmerking bepalen.

Dus zal in het algemeen, als e, p en q willekeurig zijn, zich de energie na de botsing zoodanig verdeelen, dat de massa's ieder in het bijzonder de hoeveelheden

$$\left.\begin{array}{l} \beta = \alpha - C - T = \left(\dfrac{\delta - epf}{1 + p}\right)^2 \alpha \\ \text{en} \\ \beta' = \alpha' + C - T' = \left(\dfrac{\delta + ef}{1 + p}\right)^2 p\,\alpha \end{array}\right\} \ldots\ldots (39)$$

kinetische energie van voortgaande beweging,
en de hoeveelheden

$$T = (1-e^2)\frac{p^2 f^2}{(1+p)^2}\alpha \quad \text{en} \quad T' = (1-e^2)\frac{p f^2}{(1+p)^2}\alpha \ldots. \quad (40)$$

energie onder anderen vorm bezitten.

13. Beschouwen wij ten slotte, in verband met het behandelde transport van energie, het geval dat meerdere lichamen achtervolgens aan rechte botsing onderworpen worden. — Wij nemen die lichamen eenvoudigheidshalve volkomen veerkrachtig aan, dus $e = 1$.

Onderstellen wij, dat het lichaam L het stilstaande lichaam P niet ontmoet, doch tegen een tusschen geplaatst stilstaand lichaam R botst, dat de zoo verkregene energie daarna weder door botsing gedeeltelijk aan P mededeelt.

Zijn dan de massa's der drie lichamen L, R en P,

$$m, \quad rm, \quad pm,$$

α de aanvankelijke energie van L en hunne kinetische energiën na de botsing

$$\beta, \quad (\beta'_1, \beta'_2), \quad \beta''.$$

Is het lichaam R niet aanwezig, zoo volgen na onmiddellijke botsing tusschen L en P, daar $q = 0$, de energiën

$$(\beta) = \left(\frac{1-p}{1+p}\right)^2 \alpha, \qquad (\beta'') = \left(\frac{2}{1+p}\right)^2 p\alpha; \ldots (41)$$

de snelheid van het lichaam P wordt dus,

$$V' = \frac{2}{1+p} v, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (42)$$

wanneer v de aanvankelijke snelheid van L.

Bij tusschenplaatsing van het lichaam R krijgt deze massa eene snelheid

$$(V) = \frac{2}{1+r} v,$$

terwijl dan de snelheid van P na de botsing wordt,

$$V'' = \frac{2}{1+\frac{p}{r}}(V) = \frac{4}{(1+r)\left(1+\frac{p}{r}\right)} v.$$

Deze uitdrukking wordt het grootst, voor verschillende waarden van r, als de noemer het kleinst is, dat is als

$$1 - \frac{p}{r^2} = 0 \quad \text{of} \quad r = \sqrt{p}$$

derhalve, wanneer de massa R meetkundig middenevenredig is tusschen L en P.

Dan wordt

$$V'' = \frac{4}{(1+\sqrt{p})^2} v \ldots\ldots\ldots\ldots (43)$$

Vergelijken wij deze waarde met die zonder het tusschenlichaam R, zoo blijkt, dat

$$\frac{V''}{V} = \frac{2(1+p)}{(1+\sqrt{p})^2} = \frac{2}{1+\frac{2\sqrt{p}}{1+p}} \ldots\ldots (44)$$

en daar, zooals bekend, in het algemeen

$$\frac{2\sqrt{p}}{1+p} < 1 \qquad \text{zal dus} \qquad V'' > V,$$

zoodat het lichaam R de eindsnelheid van P *vermeerdert.*

Wanneer $p = 1$, dus L, R en P *gelijke* massa's hebben, zal $V'' = V$, heeft dus het tusschenlichaam geen invloed.

Beschouwen wij, in plaats van de snelheden, de energiën der drie lichamen na de botsingen, zoo vinden wij voor die van:

$$
\left.\begin{aligned}
&L,\ \beta = \frac{1-2p+p^2}{(1+\sqrt{p})^4}\alpha = \frac{(1-p)^2}{(1+\sqrt{p})^4}\alpha \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad C = \frac{4\sqrt{p}}{(1+\sqrt{p})^2}\alpha \\
&R,\ \beta'_2 = \frac{4\sqrt{p}-8p+4p\sqrt{p}}{(1+\sqrt{p})^4}\alpha = \frac{(1-\sqrt{p})^2.4\sqrt{p}}{(1+\sqrt{p})^4}\alpha \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad C' = \frac{16p}{(1+\sqrt{p})^4}\alpha \\
&P,\ \beta'' = \frac{16p}{(1+\sqrt{p})^4}\alpha
\end{aligned}\right\} \quad ..(45)
$$

C en C' duiden de hoeveelheden energie aan, door L aan R en door R aan P overgedragen.

Steeds zal dus

$$\frac{C''}{\alpha} = \left(\frac{C'}{\alpha}\right)^2 \quad \text{of} \quad (C')^2 = C''\alpha.$$

Voor $p = 1$, gelijke massa's, volgt

$$\beta = \beta'_2 = 0, \quad \beta'' = \alpha, \quad C' = \alpha, \quad C'' = \alpha.$$

Alle kinetische energie wordt dus naar het derde lichaam overgevoerd. Is $p = \frac{1}{4}$, zoo vindt men

$$
\left.\begin{aligned}
&\beta = \frac{9}{81}\alpha, \quad \beta'_2 = \frac{8}{81}\alpha, \quad \beta'' = \frac{64}{81}\alpha \\
&C' = \frac{72}{81}\alpha = \frac{8}{9}\alpha, \quad C'' = \frac{64}{81}\alpha
\end{aligned}\right\} \quad . . (46)
$$

Vergelijken wij de energiën van P bij de botsing van *drie* lichamen L, R, P door (45) gegeven met die van *twee* lichamen, L en P, door (41) aangeduid, zoo vinden wij voor hare verhouding, overeenkomstig het in (44) gevondene,

$$\frac{\beta''}{(\beta'')} = \frac{4(1+p)^2}{(1+\sqrt{p})^4} = \left(\frac{2}{1+\dfrac{2\sqrt{p}}{1+p}}\right)^2,$$

welke verhouding steeds kleiner dan één is, tenzij de massa's gelijk zijn.

Voor $p = \frac{1}{4}$ blijkt uit (41) dat, terwijl voor twee lichamen de energie van P was

$$= \frac{16}{25}\,\alpha = 0{,}64\ \alpha$$

de tusschenplaatsing van eene massa, meetkundig middenevenredig tusschen beiden, de energie van P brengt tot (zie 46),

$$\frac{64}{81}\,\alpha = 0{,}97\ \alpha\,.$$

De invloed van het tusschen geplaatste lichaam met de massa $m\sqrt{p}$ heeft eene *dubbele* oorzaak. Daar toch de verhouding der massa van dit tusschenlichaam tot die der uiterste lichamen dichter bij de eenheid gelegen is dan die der uiterste lichamen onderling, zal omdat voor $e = 1$ en $q = 0$,

$$C = \frac{4p}{(1+p)^2}\,\alpha\,,$$

welke vorm voor $p = 1$ de maximumwaarde α verkrijgt, van het lichaam L bij tusschenplaatsing van R, door dit laatste lichaam meer energie worden ontnomen dan wanneer R niet aanwezig is. Verder zal ook door R meer energie aan het laatste lichaam P worden medegedeeld, dan bij dezelfde energie eene aan L gelijke massa zou afgeven. Wel bezit R in het algemeen minder energie dan L, doch de verhouding der massa's werkt ten slotte gunstig op het energietransport. De getalwaarden, uit het voorbeeld in (46) gegeven, kunnen ter toelichting dienen.

Zijn de uiterste massa's, dus de *drie* massa's, even groot, zoo wordt *alle* energie doorgevoerd, evenals bij *twee* gelijke massa's; de tusschenplaatsing kan alsdan, daar reeds alle energie overgaat, geen voordeel geven.

Wat één tusschenlichaam volbrengt, laat zich in nog

hoogere mate van meer $(n-1)$ tusschen gelegene massa's verwachten, die, ingevolge het voorgaande, de eindsnelheid van het laatste lichaam het grootst zullen doen zijn wanneer hunne massa's met L en P eene meetkundige reeks vormen.

Wij vinden bij deze laatste onderstelling voor de snelheid van het $(n+1)^e$ lichaam P, als zijne massa

$$m' = p\,m = r^n\,m$$

of

$$r^n = \frac{m'}{m} = p = \sqrt{r^n} \,.\, \sqrt{\frac{m'}{m}},$$

door herhaalde toepassing der formule (10) van N°. 3,

$$V_n = \left(\frac{2}{1+r}\right)^n v = \left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right)^n . \left(\frac{2\sqrt{r}}{1+r}\right)^n v = v . \left(\frac{2\sqrt{r}}{1+r}\right)^n . \sqrt{\frac{m'}{m}}.$$

Beschouwen wij deze uitdrukking voor toenemende waarden van n, zoo zal bij de grens, als n oneindig groot, daar $r = \sqrt[n]{p}$ en

$$\lim_{n=\infty} \left(\frac{2\sqrt[2n]{p}}{1+\sqrt[n]{p}}\right)^n = 1,$$

$$V_n = v\sqrt{\frac{m}{m'}} = v\sqrt{\frac{1}{p}}.$$

Dientengevolge wordt de energie der laatste massa P

$$\frac{1}{2} V_n^2 m' = \frac{1}{2} v^2 \frac{m'}{p} = \frac{v^2 m}{2} = \alpha,$$

zoodat in dit niet te verwezenlijken *ideaal* geval *alle* energie van het eerste lichaam op het laatste overgaat.

Zulks blijkt ook door op te merken dat de hoeveelheid, die van L op het volgende lichaam overgaat, welks massa r-maal grooter is, uitgedrukt wordt door

$$C = \frac{4r}{(r+1)^2}\,\alpha$$

en daar $r = \sqrt[n]{p}$ dus $\lim_{n=\infty} r = 1$, wordt $C = \alpha$.

De verhouding der achtervolgende massa's nadert bij toenemend aantal tot gelijkheid, in welk geval volkomen veerkrachtige lichamen, zooals wij thans beschouwen, van alle kinetische energie worden beroofd.

Het bovenstaande moge ook als toelichtiug dienen der bekende botsingsverschijnselen, die zich bij eene reeks opgehangen (ivoren) bollen voordoen, ook voor het geval dat hunne massa's niet gelijk zijn.

Blijkbaar worden wij aldus geleid tot de studie van de voortplanting der kinetische energie in vaste lichamen. Dit onderzoek, dat in zeer nauw verband staat tot den overgang van energie bij de botsing, vordert eene afzonderlijke behandeling.

Utrecht, Januari 1881.

OVER DE KRISTALLISATIE VAN HET DIAMANT.

DOOR

E. H. VON BAUMHAUER.

Ik wensch in deze Vergadering der Afdeeling een voorloopige mededeeling te doen van een onderzoek over de kristallisatie van het diamant, in gemeenschap met ons medelid Professor H. BEHRENS gedaan, en waarover wij later een meer uitvoerige verhandeling voor hare werken in 4°. hopen aan te bieden.

Zooals bekend is, kristalliseert het diamant in het regulaire systeem. GUSTAAF ROSE, die in de laatste jaren zijns levens zich met de bepaling der kristalvormen van het diamant heeft beziggehouden, en wiens onderzoekingen na zijn dood door A. SADEBECK uit zijn nagelaten papieren in de *Abhandlungen* der Berlijnsche Akademie van 1876 zijn bekend gemaakt, is door de beschouwing van een groote reeks diamanten tot het besluit gekomen dat bij het diamant de zeven holoëdrische vormen: het octaëder, hexaëder, dodecaëder, ikositetraëder, triakisoctaëder, tetrakishexaëder en hexakisoctaëder, en de combinatiën dezer vormen voorkomen, hoewel de ikositetraëdervorm hoogst zelden zelfstandig in de kristalvlakken wordt aangetroffen. Dit kristalliseeren van het diamant in zoo verschillende vormen, terwijl de splijtingsvlakken alleen en uitsluitend tot het octaëder behooren, is voor het diamant zeer eigenaardig; bij geen ander mineraal wordt deze groote verscheidenheid aangetroffen.

Fig. 1.

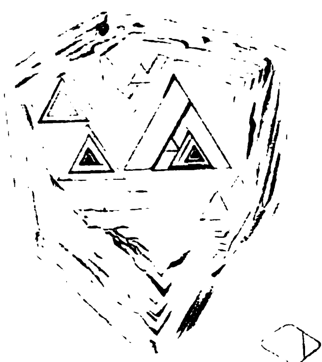


Fig. 2.

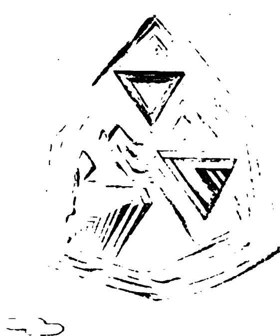


Fig. 3.



Fig. 4.

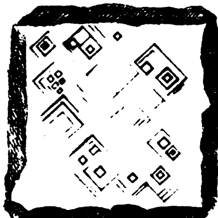


Fig. 5.



Fig. 6.



Lith. Emrik & Binger

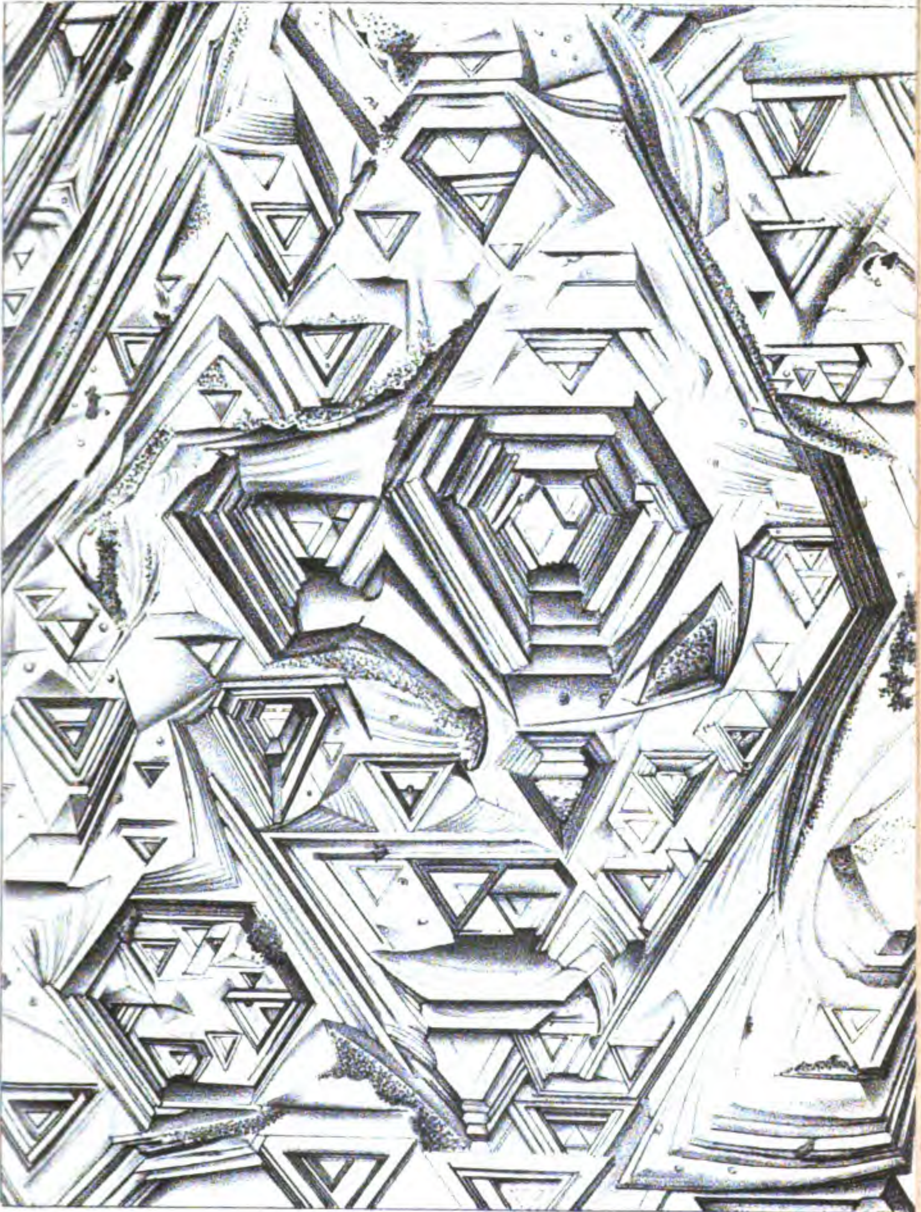
Met de bewering van G. Rose dat het diamant ook hemiëdrisch zoude voorkomen, dus in den tetraëdervorm, kan Sadebeck zich niet vereenigen en vermoedt dat Rose, zoo hij zijne onderzoekingen over de wijze van vorming der diamantkristallen had kunnen voortzetten, tot de conclusie zoude gekomen zijn, dat het diamant alleen holoëdrisch voorkomt. Terecht merkt Sadebeck daarbij op, dat de beschouwing der uiterlijke vormen hand aan hand moet gaan met de kristallotektoniek der kristalliseerende stoffen, wil men een waren blik verkrijgen in de wetten der kristallisatie.

Het is op die kristallotektoniek, anders gezegd op den opbouw van een groot kristal uit eene aaneenschakeling van kleine kristallen of subindividuën, dat wij vooral onze aandacht hebben gevestigd, in verband met de twee vormen waarin het diamant, behalve in den goed gekristalliseerden, voorkomt, namelijk in dien van den meestal kogelvormigen boord, en van den op het bloote oog amorph schijnenden carbon of carbonado.

Hoe door aangroeiing van de zijvlakken van het octaëder, al naarmate die aangroeiingen de octaëdervlakken meer of min volkomen bedekken, de verschillende afgeleide vormen, zooals zij bij het diamant worden aangetroffen, kunnen ontstaan, hebben Rose en Sadebeck nauwkeurig beschreven, zoodat wij dit punt onaangeroerd kunnen laten; doch wij kunnen ons niet vereenigen met hunne voorstelling over de schaalsgewijzeaangroeiing bij het diamant, die door niets bewezen wordt, maar juist door de splijting, die alleen volgens de octaëdervlakken geschiedt, wordt tegengesproken. Indien men slechts op het uiterlijke afgaat, zoude men eveneens bij sommige pyrieten de schaalvormige aangroeiing moeten aannemen, terwijl op de breukvlakte niets van concentrische lagen te bespeuren is, evenmin als bij het diamant. Geheel anders vertoonen zich eenige kwartskristallen, waarbij op de breukvlakte die schaalvormige aangroeiing duidelijk is waar te nemen. Dat de aangroeiing bij het diamant daarentegen door kristallieten of subindividuën geschiedt, die zich regelmatig op de oppervlakte der kristalvlakken rangschikken, bewijzen de prachtige regelmatige figuren, die zich

op sommige vlakken van natuurlijke diamantkristallen vertoonen, en ons aan de etsfiguren doen denken.

Door de welwillendheid van den eigenaar, den Heer S. Baszanger, juwelier te Amsterdam, ben ik in staat gesteld aan de Afdeeling een prachtig ongeslepen diamant-octaëder van ruim 55 karat te vertoonen, daarenboven hoogst opmerkelijk door de aangroeiing van andere minder goed gevormde diamanten en van boord; op een der octaëdervlakken ziet men reeds met het bloote oog die fraaie regelmatige figuren. Niet minder leerrijk zijn de hiermede geheel overeenkomende figuren op een kleinen tweelingdiamant, lang 7,5 mm., breed 5 mm., dik 2 mm. en wegende 0,1345 gr., die ik aan de goedheid van den Heer A. Daniels, directeur der diamantslijperij alhier, te danken heb; op dezen steen zijn die figuren alleen met het gewapend oog zichtbaar, en wel op alle vlakken der beide kristallen. De afbeeldingen, bij tienmalige vergrooting (Plaat I, fig. 1 en 2) en die van een klein gedeelte der oppervlakte bij 200-malige vergrooting (Plaat II) vertoonen ons meestal gelijkzijdige driehoeken, of ook driehoeken met afgeknotte hoeken, die soms in gelijkzijdige zeshoeken overgaan; het meerendeel dezer figuren zijn holten met trapvormige verdiepingen en platten bodem; soms ook, doch zelden, steken deze kristallieten boven de oppervlakte uit. Diezelfde figuren neemt men soms waar op de splijtingsvlakken van het diamant (Fig. 3 stelt een splijtingsvlak bij 10-malige vergrooting voor) en vrij algemeen op de oppervlakte van ruwe en geslepen diamanten, die door verbranding aan de lucht of in zuurstofgas mat zijn geworden. Bij de driehoekige figuren zijn alle kanten naar de zijden (kantlijnen) der kristalvlakken gekeerd. Het ontstaan van deze holten en bolligheden is eenvoudig af te leiden uit het ontbreken of overtollig zijn van octaëdrische subindividuën, uit wier aaneenschakeling de groote kristallen gevormd zijn. Steken de octaëdrische subindividuën uit, zoo moeten hunne uitstaande vlakken evenwijdig zijn aan het vlak waarvan zij een deel uitmaken; ontbreken daarentegens ergens sommige subindividuën, zoo zal de bodem der daaruit ontstane holte moeten beantwoorden aan het ondervlak van het ontbrekende subindividu, en



dus symmetrisch zijn gelegen ten opzichte van het omgevende vlak.

Op cubusvlakken vindt men wel eens, ofschoon zeer zelden, vierhoeken, die echter niet van den cubus moeten worden afgeleid, maar van octaëdrische subindividuën, wier toppen zij vertegenwoordigen, even als de driehoeken zulks de vlakken doen. Fig. 4 vertoont een der vlakken van een kleinen 0.013 gr. wegenden cubus, die slechts 1,75 mm. kantlengte heeft.

Ten opzichte hiervan zijn zeer leerrijk de twee kristallen, behoorende aan den Heer Daniels, waarin vierkante gaten voorkomen, die door het geheele kristal heenloopen; het eene kristal heeft drie doorloopende, onderling communiceerende gangen, en nog drie minder diepe piramidale kuilen, terwijl nergens breukvlakken te zien zijn; de gaatjes zijn zuiver vierkant; het eene heeft een kantlengte van 0,56 mm., het andere van 0,7 mm. Om de gaatjes heen ziet men een aantal trapjes, elkander onder rechte hoeken snijdende en enkele zuiver vierkante piramidische kuiltjes; hetzelfde is ook in de niet doorgaande holten het geval.

Beschouwen wij nu de twee andere toestanden, waarin het diamant wordt gevonden, namelijk den kogelvormigen boord en den schijnbaar amorphen carbon.

De kogelvorm bij den boord is door sommigen toegeschreven aan afschuring door voortrolling, zooals bij de rolsteenen; die afschuring zoude hebben moeten geschieden door schuring van diamanten onderling, daar geen ander bekend gesteente het diamant aantast. Beschouwen wij echter de oppervlakte dier kogels onder het mikroskoop bij gereflecteerd licht, zoo zien wij daarop de fijnste kristallisatie; een afbeelding (Fig. 5) der oppervlakte van een kogelvormigen doorschijnenden boord bij 50-malige vergrooting en opvallend licht, geeft ons volkomen het beeld terug van den vestingagaat. De schijnbaar grootere hardheid van den boord boven het goed gekristalliseerde diamant staat hiermede in direkt verband; zij is alleen een gevolg van de verwarde kristallisatie bij den boord, die daarom ook niet splijtbaar

is. Het onderscheid tusschen boord en goed gekristalliseerd diamant is hetzelfde als tusschen chalcedoon en bergkristal; ieder, die zich met het slijpen dezer beide laatste heeft bezig-gehouden, weet bij ondervinding hoeveel zwaarder het slijpen is van chalcedoon dan van bergkristal; doch hier slijpt men met amaril, een stof die harder is dan het berg-kristal; daar er nu voor het diamant geen harder slijpmiddel is dan het diamant zelf, is het duidelijk dat de boord zich op de met diamantpoeder bedekte stalen schijf niet slijpen laat. De diamantsnijder, die door het tegen elkander wrijven van twee diamanten de piramidetoppen der octaëders moet afschuren tot het verkrijgen van de *tafel* en de *kolet* van den brillant, en de slijper, die later de tafel en de kolet moet glad slijpen, weten beiden bij ondervinding hoeveel zwaarder dat werk is dan wanneer zij met octaëdervlakken te doen hebben, omdat zij, zooals zij het noemen, dan *tegen den was* moeten werken; een ongeoefend slijper, die met den was nog niet genoeg vertrouwd is, bederft dikwijls in één dag zijn stalen schijf door ingroeving, terwijl een geoefende die weken lang kan gebruiken.

Wat eindelijk den carbon aangaat, deze komt, zooals ik reeds in 1873 in de Afdeeling mededeelde, in zeer verschillende toestanden voor; soms op de breuk nog vrij kristallijn, soms voor het bloote oog vormloos, dof, met enkele glanzende puntjes en vele poriën, waaruit bij verwarming in water luchtbellen ontsnappen. De poging, door den Heer Daniels, op mijn verzoek, aangewend om door slijping een dun schijfje carbon te verkrijgen, dat onder het mikroskoop bij doorvallend licht zoude kunnen worden onderzocht, mislukte om dezelfde reden als bij den boord; de carbon laat zich niet slijpen, maar maakt diepe groeven in de schijf; beschouwt men echter, zooals het den Heer Behrens gelukt is, de scherpe kanten van splinters carbon onder het mikroskoop, zoo ontwaart men dadelijk dat de carbon uit kleine, verward door elkander liggende, kristalletjes bestaat. De lichtgekleurde grijze variëteit bleek nagenoeg geheel uit mikroskopische kristalletjes te bestaan van helder, doorgaans kleurloos, diamant; de donkerbruine variëteit vertoont slechts

weinige kleurlooze korrels, een weinig meer gele en enkele blauwe; in deze laatste zijn de meeste korrels troebel door een groot aantal uiterst fijne en doorzichtige stippeltjes, die in de grijze in veel minder mate voorkomen; in de bruine variëteit zijn de korrels ook veel meer afgerond en minder goed gekristalliseerd en omhuld door een bruine stof, die, zooals ik reeds in 1873 heb aangetoond, uit ijzeroxydhydraat en kalk bestaat. De structuur van de grijze variëteit is lava-achtig poreus, die der bruine meer schilferachtig. De verhouding van den carbon tot het goed gekristalliseerd diamant kan men gelijkstellen aan die van den zandsteen tot het bergkristal.

Ten slotte wensch ik nog de aandacht te vestigen op een stuk bruinen carbon, aan de eene zijde eindigende in een kogel, die, hoewel ondoorzichtig en zwart, geheel het voorkomen heeft van een boordkogel en waarop, onder het mikroskoop, bij teruggekaatst licht en 50-malige vergrooting, de prachtigste kristallisatie te zien is, die ons geheel het beeld van de ijsbloemen op de vensterruiten voorstelt (Fig. 6); hier is dus overgang van carbon in boord.

Dit onderzoek bevestigt dus volkomen mijne vroegere meening, dat het goed gekristalliseerde diamant, de boord en de carbon, alleen van elkander verschillen door een meer of minder goede kristalvorming en gelijdelijk in elkander overgaan.

RAPPORT

OVER EEN OPSTEL VAN DEN HEER

Dr. C. Ph. SLUITER,

in de Vergadering van 26 Februari 1881 uitgebracht door den Heer

C. VERLOREN.



De Heer Dr. C. Ph. Sluiter te Batavia heeft aan de Akademie, ter plaatsing in de Verslagen en Mededeelingen, toegezonden een opstel, getiteld: » *Voorloopige mededeelingen over eenige nieuwe Holothuriën van de Westkust van Java*", waaruit blijkt dat hij zijne onderzoekingen op dierkundig gebied, voornamelijk der lagere klassen van zeedieren, welke hij met zooveel ijver en moed in de koude Poolzeeën met gunstig gevolg heeft aangevangen, ook op zijne nieuwe verblijfplaats aan de warmere zeeën met niet minder ijver en goed gevolg blijft voortzetten. Wij kunnen en behooren dat streven aan te moedigen en te ondersteunen.

In deze mededeelingen worden eenige zeer merkwaardige nieuwe soorten van Holothuriën voorloopig beschreven. In de eerste plaats eene zeer merkwaardige, die met de soorten van het geslacht *Synapta* het volkomen ontbreken van eene anaal-opening gemeen heeft, terwijl zij overigens daarvan geheel afwijkt, maar meer overeenkomt met de eigenlijke Holothuriën. De schrijver meent, naar het schijnt terecht, daarom een nieuw geslacht er voor te moeten vormen, waarvoor hij, in overeenstemming met die eigenschap, voorstelt den onwelluidenden geslachtsnaam *Ananus*, en voor soortsnaam *holothuroides*.

Ik zou den geachten schrijver wel willen voorstellen, dat leelijk hybridisch en ongrammaticaal woord *Ananus* liever

door een ander, b. v. *Aproctus*, te vervangen en althans geheel bij het Grieksch te blijven.

Vervolgens beschrijft hij eene nieuwe soort van het geslacht *Ocnus*, waarvoor hij den naam van *O. javanicus* voorstelt, bij welke het merkwaardigste is, dat de huid door de menigte samenverbonden kalklichaampjes geheel stijf en hard is.

Dan beschrijft hij uit de familie der *Molpadidae* twee merkwaardige nieuwe soorten: eene van het geslacht *Haplodactyla*, waarvoor hij als soortsnaam voorstelt *hyaloides*, wegens de volkomen glasheldere doorschijnendheid der huid, met bijna geheel ontbrekende kalklichaampjes; de tweede, tot geen der bekende geslachten te brengen, en daarom, als nieuw geslacht, wegens de eigenaardige kortheid der armen, *Microdactyla* genoemd, met den soortsnaam van *caudata*, wegens een staartvormig aanhangsel.

Ik meen der Afdeeling te mogen aanraden, dit opstel in de Verslagen en Mededeelingen eene plaats in te ruimen, waarbij ik echter nog eene opmerking wensch te maken.

Ik kan het niet ontkennen, dat het bij mij onaangename gewaarwordingen opwekt, indien Nederlanders aan eene Nederlandsche Akademie hunne mededeelingen in vreemde talen toezenden. Doen vreemdelingen zulks, dan kan men daar natuurlijk niets tegen hebben. Ook wil ik wel aannemen, dat er soms gevallen kunnen voorkomen, waarbij zulks wenschelijk kan worden geacht, maar niet om het in gewone gevallen regel te doen worden. Ik geloof niet, dat wij, leden der Akademie, daartoe aanleiding geven en kan althans niet denken, dat het iemand onzer in de gedachte zou komen, hier eene mededeeling als de onderwerpelijke in het Duitsch te gaan voordragen. Ik zie de noodzakelijkheid nog niet in, dat wij ons zouden behoeven te gaan germaniseeren.

Men beschouwe deze opmerking als eene persoonlijke, waarmede ik het al te veelvuldig toenemen van die gewoonte in den tegenwoordigen tijd wensch tegen te werken. Ik kan echter niet verlangen dat men om die reden een, overigens verdienstelijk, opstel zou weigeren te plaatsen.

VORLÄUFIGE MITTHEILUNG

UEBER EINIGE

NEUE HOLOTHURIEN VON DER WESTKÜSTE JAVA'S

VON

C. Ph. SLUITER.

Vor einiger Zeit wurden einige sehr eigenthümliche Holothurien in der Sunda-Strasse und auf der Rhede von Batavia von mir gefangen. Ich wünsche hier eine vorläufige Mittheilung von einigen höchst interessanten Verhältnissen zu geben, welche sich bei der Untersuchung herausstellten.

Erstens nenne ich eine ganz afterlose Holothurie. In Hauptsache stimmt sie in allen Theilen mit dem Geschlechte *Holothuria* überein, und hat mit *Synapta* nur das Fehlen des Afters gemein, doch ist sonst weit von dieser entfernt. Das Thier muss gewiss als der Representant eines neuen Geschlechtes betrachtet werden. Als Geschlechtsnamen stelle ich *Ananus*, und als Speciesnamen *holothuroides* vor. Die äusseren Kennzeichen sind:

»Körper gurkenartig, nach hinten sich allmählig verjüngend. Länge des ausgewachsenen Thieres $1^1/_2$ Decimeter. Füsschen unregelmässig über den Körper verbreitet, am Bauche viel stärker gehäuft als am Rücken, kurz und im Leben wenig vorstreckbar. Tentakel 13, kurz, nicht verzweigt, in eine Scheibe endigend, auf einer Mundscheibe eingeflanzt. Aeusserlich ist am Körper keine Spur eines Afters zu entdecken. Farbe dunkelviolett, beinahe schwarz. Mundscheibe fleischfarbig. Tentakel mehr braünlich. Um jedes Füsschen

ein weisser Ring. Am Rücken grosse mehr gelbliche Flecken, welche keine Füsschen umgürten. Fundort: Tandjong-Priak, bei Batavia, im Schlamm. Tiefe 8 Faden."

Kalkablagerungen finden sich bloss in den Ringen um den Füsschen, fast wie die Rädchenpapillen der Chirodoten. Die Form der Kalkkörperchen stimmt am meisten mit der von *Holothuria gracilis* (SEMPER) überein. Das Merkwürdigste am ganzen Thiere ist das Fehlen des Afters und, was damit zusammenhängt, die wenig ausgebildeten Verdauungsorgane. Magen und Darm sind nur eng und das ventrale und dorsale Darmgefäss nur schwach entwickelt. Am abdominalen Ende wird das Lumen des Darmes je kleiner und kleiner um endlich ganz und gar zu verschwinden. Der Enddarm ist also ganz umgebildet in einen Band van Bindegewebs- und Muskelfasern, welche sich nur lose an die Haut ansetzen. Am Darme ist fernerhin merkwürdig, dass die von SEMPER als innere Kiemen beschriebene Falten ausserordentlich breit sind, während die Lungen hingegen nur äusserst schwach entwickelt sind, und natürlich nicht mit einer Cloaca in Verbindung stehen können. Die Vermuthung SEMPER's, dass diese Falten zum Theil die Athmung versorgen, gewinnt hierdurch eine grosse Stütze. Von den Lungen ist nur die rechte dorsale entwickelt, welche in keine Verbindung mit den Blutgefässen tritt, und selbst nur schwach entwickelt ist. Am Wassergefässring finden sich zwei ausserordentlich lange Polische Blasen, und zwei kleine Steinkanälchen.

Eine zweite eigenthümliche Holothurie von dieser Küste ist eine neue Art *Ocnus*, von mir *O. javanicus* genannt. Aeussere Kennzeichen sind: »Körper stark fünfeckig. Auf jeder Kante des Körpers steht nur eine einfache Reihe von 20 bis 23 Füsschen. Diese sind starr und leicht zerbrechlich. Zehn verästelte Tentakel. Haut starr und mehr oder weniger deutlich in Tafeln getheilt. Farbe graulichbraun bis gelblichweiss, mit allen Zwischenstufen. Länge des Körpers 40 bis 45 M.m.

Fundort: Nordwest-Küste Java's. 2 bis 6 Faden.

Auffallend bei diesem *O. javanicus* ist, dass durch die Kalk-

ablagerungen die Haut ganz starr ist. Ausser den Kalkkugeln, welche mehr am Rande liegen, bilden diese Kalkablagerungen eine Art Gittergewebe von zusammenhängenden Bälkchen. Das lebendige Thier ist hierdurch sehr leicht zerbrechlich. Natürlich ist bei einem derartigen starren Körper die Hautmusculatur nur rudimentär. Am Darme ist gleich hinter dem Kalkringe eine kropfartige Auftreibung. Der Darm bildet nicht die gewöhnliche Doppelbiegung, sondern eine Art Darmgekröse. Lungen sind sehr rudimentär. Am Wässergefässring immer zwei Polische Blasen.

Von den Molpadiden nenne ich zwei merkwürdige neue Arten.

Erstens eine Art *Haplodactyla*, welche ich, der glasshellen Haut halber, *H. hyaloides* nenne. Aeussere Kennzeichen sind: »Körper eiförmig; verjüngt sich stark nach dem After zu. Fünfzehn einfache cylindrische Tentakel, welche ziemlich spitz endigen. Am After fünf kurze mehr oder weniger kalkige Papillen. Die fünf Längsmuskeln sind vollkommen deutlich durchscheinend. Farbe glashell, wie der Mantel der Salpen. Länge des Körpers 35 Mm.

Fundort: Insel Onrust. Rehde von Batavia. 8 Faden, im Schlamm.

Die ganze Haut ist durchsichtig und besteht zum grössten Theile aus der hyalinen Grundmasse mit sehr spärlichen Bindegewebsfasern und Bindegewebszellen. Pigmentzellen fehlen ganz. Kalkablagerungen bloss beim After, hauptsächlich in den fünf Analpapillen. Die Form der Kalkkörperchen entfernt sich ziemlich weit von der bei den übrigen Molpadiden. An einem dünnen Hauptstiel finden sich kugelrunde oder gezähnelte Anschwellungen, wenigstens bei den Kalkkörperchen in den Analpapillen. Für die weitere Anatomie verweise ich nach meiner Abhandlung im zunächst erscheinenden Heft des »Natuurkundig Tijdschrift voor Nederlandsch-Indië".

Eine zweite eigenthümliche Form aus der Abtheilung der Molpadiden ist ein Thier, das nicht unter den bis jetzt aufgestellten Geslechtern unter zu bringen ist, warum ich es, wegen der Kleinheit der Tentakel, *Microdactyla*, und die Art,

wegen des schwanzartigen Anhanges, *caudata* nennen möchte. Aeussere Kennzeichen: »Körper mehr oder weniger cylindrisch, nach dem Munde zu wenig verjüngt, nach hinten plötzlich eingeschnürt, so dass der Hintertheil des Körpers sich als ein selbstständiger Schwanzanhang darthut. Am Munde 12 sehr kleine und stumpfe, in eine kleine Scheibe endigende Tentakel, welche nicht aus dem Munde hervorgestreckt werden können. After kreisrund, am Ende des Schwanzanhanges. Mund nicht terminal sondern eingestülpt. Die Haut fällt glatt an. Die fünf Längsmuskeln scheinen nicht durch. Farbe milchweiss. Der Schwanzanhang mehr intens weiss, der übrige Körper mehr blaülich weiss.

Fundort: Sunda-Strasse, unweit Anjer, im Schlamm. 12 Faden.

In der ganzen Haut sind die Kalkablagerungen ausserordentlich zahlreich, ohne aber ein Gittergewebe zu bilden. Die Form der Kalkkörperchen ist die einer durchbrochenen Kugel, und stimmt mit der der Kalkkörperchen andrer Molpadiden nur wenig überein. Am meisten gleichen sie denen von *Colochirus* (Troschel). Die von Semper als Bindekörper bezeichneten biscuitförmigen Stäbchen, welche den Synapten schon zukommen, fehlen vollständig. Für das übrige Anatomische sehe man obengenannte Abhandlung.

Ferner habe ich noch eine ziemliche Anzahl Chirodoten untersucht, welche ich in der Sunda-Strasse gefangen habe. Bei der genauen Betrachtung der Rädchen schien es mir alsob alle Abbildungen und Beschreibungen sie zu einfach darstellten. Ich habe daher eine möglichst naturgetreue Beschreibung und Abbildung gegeben von den Rädchen einer *Chirodota*, welche in allen Hauptsachen mit *Ch. variabilis* (Semper) übereinstimmt.

Batavia, 20 Nov. 1880.

BIJDRAGE

TOT DE

THERMO-CHEMISCHE KENNIS VAN OZON.

DOOR

E. MULDER en H. G. L. van der MEULEN.



Ongeveer tien jaren geleden werd door een onzer de meening uitgesproken *), dat ozon waarschijnlijk niet is te beschouwen als $\overset{O}{O-O}$, maar wellicht vrije affiniteiten bezit en aldus is geconstrueerd: $\begin{array}{c}O\\|\\O\\|\\O\end{array}$. Noemt men y de verbindingswarmte van één affiniteit van O met één affiniteit van een ander atoom O, dan zou bij omzetting van 3 $\begin{array}{c}O\\\|\\O\end{array}$ in 2 $\begin{array}{c}O\\|\\O\\|\\O\end{array}$ aan calorieën verbruikt worden:

$$a = 4\,y - 6\,y = -\,2\,y.$$

Voor y werd theoretisch bij benadering berekend de waarde van 22019^c, in welk geval a wordt:

$$a = -\,44038^c,$$

of wat hetzelfde is:

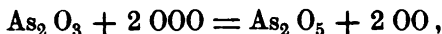
$$OO,OO,OO = -\,44038^c.$$

*) *Scheik. Aant.* van E. Mulder. Deel II (1871), p. 186, 189.

Er werd evenwel bijgevoegd, dat $y = 22019^c$ zonder twijfel een minimum voorstelt.

De onderzoekingen nu van HAUTEFEUILLE en CHAPPUIS, die ozon leerden kennen als een lichaam, dat bij ontleding aanleiding kan geven tot ontploffing, en de niet minder belangrijke onderzoekingen van den voortreffelijken BERTHELOT *), die met ozon hoogst gewichtige thermo-chemische bepalingen verrichtte, bevestigen gemelde uitspraak in hoofdzaak volkomen. De calorimetrische waarde, door BERTHELOT gegeven voor OO,OO,OO, is evenwel grooter dan die door berekening vroeger als minimum was aangekondigd. De beteekenis, die de kennis dezer constante vooral later bezitten zal, gaf aanleiding tot het volbrengen van den volgenden arbeid. Alvorens evenwel tot de mededeeling daarvan over te gaan, moge in de eerste plaats de methode, door BERTHELOT gevolgd, in 't kort worden behandeld.

Ter bepaling van de thermo-chemische waarde: OO,OO,OO, trachtte deze natuurkundige het verschil te leeren kennen tusschen de hoeveelheid warmte, vrijkomende bij de oxydatie van eenig lichaam door ozon en gewone zuurstof, waartoe arsenigzuur werd genomen. Om de waarde te kunnen bepalen van dit lichaam tegenover ozon, werd van een waterige oplossing van arsenigzuur een bekende hoeveelheid genomen, en de verhooging in temperatuur, ontstaan bij het doorvoeren van ozonhoudende zuurstof, nagegaan, terwijl zoowel vóór als na de proef de hoeveelheid arsenigzuur bepaald werd. Uitgaande van de reactie:



$$As_2\,O_3 + 2\,OOO = As_2\,O_5 + 2\,OO,$$

kon de hoeveelheid verbruikt ozon worden gevonden, en vermocht BERTHELOT te komen tot de calorimetrische waarde van:



$$As_2\,O_3\,Aq, 2\,OOO.$$

Het ozon, hiertoe aangewend, was gemaakt met droge

*) *Compt. rend.* t. 82, 198; *Essai de Mécanique Chimique* par BERTHELOT, T. I, 221; T. II, 366; *Ann. Chim. et de Phys.* (5), 10, 162; *Bull. soc. chim.*, t. 26, 56 en t. 28, 442.

zuurstof, en werd, na den effluve-toestel te zijn doorgegaan, onmiddellijk geleid in gemelde oplossing van arsenigzuur, terwijl vóór en na het doorvoeren van ozonhoudende zuurstof ongeveer een gelijke maat zuurstof (droog) met een zooveel mogelijk gelijke snelheid door de arsenigzuur-oplossing ging. Het arsenigzuur werd genomen in zoutzure-oplossing, en het gehalte hieraan vóór en na de proef bepaald met chamaeleon.

BERTHELOT treedt niet in de wijze van berekening, door hem gevolgd, maar deelt de uitkomst mede van twee proeven, die leidden tot de volgende waarden:

I. $As_2 O_3 Aq, 2 OOO = 137600^c$
II. » $= 125600$
gemiddeld . . . $= 131600^c$.

Vooral wordt beteekenis gehecht door BERTHELOT aan proef I, die onder gunstiger omstandigheden zou gedaan zijn dan proef II.

De verbindingswarmte van arsenigzuur met gewone zuurstof is niet bekend, maar BERTHELOT meende deze indirect te mogen afleiden uit de calorieën, vrijkomende bij oxydatie van arsenigzuur in oplossing, b. v. met ioodzuur (THOMSEN), waarvoor werd gevonden:

$As_2 O_3 Aq, 2 O = 78360^c$ (THOMSEN)
» $= 78200$ (FAVRE en SILBERMANN)
gemiddeld . . . $= 78280^c$.

BERTHELOT neemt nu aan, indien wij hem goed begrijpen, dat de zuurstof, b. v. van ioodzuur, ongeveer dezelfde calorische diensten verricht als gewone zuurstof, en hij vindt dan door aftrekken de verlangde constante:

$As_2 O_3 Aq, 2 OOO = 137600^c$
$As_2 O_3 Aq, OO = 78280$
verschil . . . $= 59320^c$.

In dat geval toch zouden 2 O afgestaan door 2 OOO ge-

ven 59320^c meer dan 2 O ontleend aan OO. Aangezien de 2 OO, bij ontleding van 2 OOO overblijvende, eenvoudig zouden ontsnappen (zie vroeger), volgt dan, dat de 2 O van 2 OOO — indien men zich voorstelt, dat deze bij het vrijkomen overgingen in gewone zuurstof OO —, zouden doen vrijkomen 59320^c, dus bij den overgang van 2 OOO in 3 OO zouden ontwikkeld worden 59320^c, of, omgekeerd, bij de omzetting van gewone zuurstof in ozon worden verbruikt:

$$OO,OO,OO = -59320^c.$$

Gaat men uit van het getal, door BERTHELOT gevonden voor proef II, namelijk 125600^c voor $As_2 O_3$ Aq, 2 OOO, dan wordt een kleinere waarde verkregen:

$$As_2 O_3 \text{ Aq}, 2\ OOO = 125600^c$$
$$As_2 O_3 \text{ Aq}, OO = 78280$$
$$\text{verschil} \ldots = 47320^c,$$

of:

$$OO,OO,OO = -47320^c.$$

Deze waarde nadert werkelijk vrij goed tot die, theoretisch bepaald, namelijk — 44038, welke als te laag werd aangegeven, terwijl het verschil 47320—44038 = 3282^c geringer is dan dat der twee bepalingen van BERTHELOT: 59320—47320 = 12000^c.

Bij onze proeven werden de volgende wijzigingen aangebracht in de methode, door BERTHELOT gekozen.

1. In de eerste plaats werd de ozonhoudende zuurstof geleid uit den effluve-toestel in een glazen gashouder, met een inhoud van ongeveer 11 liter, gevuld met gedestilleerd water.

2. De aanvoerbuis voor het ozon in de glazen kolf met arsenigzuur-oplossing was aan het uiteinde voorzien van vele haarbuisjes, om het ozon meer te verdeelen, en daarenboven de oplossing naar behooren te vermengen, waartoe dientengevolge de thermometer niet behoefde aangewend te worden.

3. Een aspirator was verbonden met een buis, boven in de kolf uitkomende, ten einde de ozonhoudende zuurstof met groote snelheid te jagen door de oplossing van arsenigzuur, zoodat eenmaal in ongeveer *drie* minuten negen liters gas konden doorgeleid worden.

4. Het arsenigzuur was opgelost in water zonder zoutzuur, terwijl werd getitreerd met een oplossing van iodium in ioodkalium, naar de bekende reactie: $As_2 O_3 + 4 I + 2 H_2 O = As_2 O_5 + 4 I H$.

Zoowel vóór als na het doorvoeren van ozonhoudende zuurstof, werd lucht (niet gedroogd) geleid door de kolf (waarbij noodwendig tevens de aspirator dienst deed), welke lucht op de temperatuur der cal. vloeistof geen merkbaren invloed uitoefende (zie later).

Alle verbindingen van buizen, waardoor ozon toog naar de kolf, geschiedden met zegellak.

Calorimeter en thermometer mochten geacht worden te voldoen aan de noodige vereischten.

Bij het titreeren werd bij de eerste proef te werk gegaan als naar gewoonte; later werd ongeveer $\frac{As_2 O_3 = 198}{4}$ gr. arsenigzuur in water opgelost tot nagenoeg een liter, en daarvan een deel *afgewogen* ter bepaling van het titre der iodiumoplossing. Het iodium werd (vermengd met ioodkalium) door sublimatie gezuiverd, en hiervan ongeveer $12{,}5 \times \frac{1}{5}$ gr. met $18 \times \frac{1}{5}$ gr. ioodkalium in water opgelost tot nagenoeg een liter. Met deze iodiumoplossing werd het titre bepaald eener *gewichts-hoeveelheid* der oplossing van de kolf vóór en na de proef. Het titreeren geschiedde overigens op de bekende wijze, en er werd bij de arsenigzuur-oplossing een weinig gedaan van een oplossing van koolzuren ammoniak en eenig stijfselwater.

De waarde van $As_2 O_3$ Aq, 2 000 werd berekend naar de vergelijking:

$$R = \frac{2m}{f}(b + p)\,q,$$

waarin voorstelt:

b. De gew.-hoev. in gr. aan oplossing der kolf.

p. De waterwaarden van thermometer, absorptietoestel en glazen kolf.

q. Het verschil in graden Celsius der oplossing in de kolf vóór en na de proef.

f. De hoev. ozon in gr. verbruikt door het arsenigzuur in de kolf.

m. Het mol.-gew. van ozon: OOO = 48.

R. Het aantal calorieën berekend op As_2O_3 Aq, 2 OOO.

De s. w. der oplossing werd genomen = 1.

In de volgende proeven was:

	b.	*p*.	*q*.	*f*.	*R*
Proef I...	564,878	18,3	0,34^0	0,14308	133000
» II...	601,778	18,3	0,275	0,11558	141600
» III...	579,778	18,3	0,5	0,19788	145000.

Bij proef I werden doorgevoerd ongeveer 9¼ liter aan ozonhoudende zuurstof, in proef II 7¼ liter, in proef III 10 liter. Vóór en na het doorvoeren van ozonhoudende zuurstof, werd lucht doorgelaten uit een gashouder met water, en wel ongeveer 6 liter vóór en 6 liter na (in proef III meer). De temperatuur werd na iedere 20 sec. afgelezen, om den gang der proef te kunnen volgen, en was in:

Proef I.		Proef II.		Proef III.	
7,14^0	7,48	6,035^0	7,275	6,44^0	6,80
7,14	7,48	6,035	7,285	6,44	6,82
7,14	7,48	6,035	7,285	6,44	6,845
7,14	7,48	6,035	7,29	6,44	6,875
7,14	7,48	6,035	7,295	6,44	6,90
7,14	7,48	6,035	7,30	6,44	6,92
7,14	7,48	6,035	7,30	6,44	6,94
7,18	7,48	6,035	7,305	6,44	6,94
7,22	7,48	6,035	7,305	6,44	6,94
7,25	7,48.	6,06	7,305	6,44	6,94
7,29		7,10	7,31	6,48	6,94
7,30		7,14	7,31	6,50	6,94
7,36		7,165	7,31	6,535	6,94
7,40		7,185	7,31	6,56	6,94
7,435		7,205	7,31	6,585	6,94
7,46		7,225	7,31	6,615	6,94
		7,24	7,31	6,64	6,94
		7,25	7,31	6,665	6,94
		7,26	7,31	6,695	6,94
		7,265		6,72	6,94
				6,74	6,94
				6,75	

Vooralsnog moet de grootste waarde worden toegekend aan het hoogste cijfer, daar er wel oorzaken bekend zijn, die een merkbaar verlies aan warmte zouden kunnen te weeg brengen, maar geen oorzaken, welke een noemenswaardige verhooging in temperatuur ten gevolge hebben. Niet onwaarschijnlijk werd de ozonhoudende zuurstof bij proef I te snel doorgevoerd; bij proef II werkte de aspirator niet zoo regelmatig als wenschelijk was, terwijl de hoeveelheid ozon, die werd opgenomen, betrekkelijk gering was; bij proef III daarentegen schenen de omstandigheden vergelijkenderwijze gunstig te zijn.

Neemt men met BERTHELOT: $As_2\,O_3$ Aq, OO = 78280^c, dan zou proef III leiden tot:

$$\begin{array}{ll} As_2\,O_3\,Aq,\,2\,OOO & = 145000^c \\ As_2\,O_3\,Aq,\,OO & = 78280 \\ \hline \text{verschil} \ldots & = 66720^c \end{array}$$

of:

$$OO,OO,OO = -\,66720^c.$$

Het gemiddelde der drie proeven geeft:

$$\begin{array}{ll} As_2\,O_3\,Aq,\,2\,OOO & = 139800^c \text{ (gemiddelde)} \\ As_2\,O_3\,Aq,\,OO & = 78280 \\ \hline \text{verschil} \ldots & = 61520^c, \end{array}$$

dus:

$$OO,OO,OO = -\,61520^c.$$

Bij het beoordeelen dezer cijfers moet men wel in 't oog houden, dat de betrekkelijk kleine hoeveelheid ozon, die ontleed wordt, een geringe verhooging veroorzaakt in temperatuur, en dat b. v. in proef I een fout van 0,005° (zegge vijf duizendsten van een graad), en zoo een fout van 0,1 C.C. bij het titreeren der oplossing in de kolf, een invloed uitoefent (berekend op $As_2\,O_3$ Aq, 2 OOO) van ongeveer 2000^c. De vrij groote waterwaarde der kolf werkt ook niet in een gunstigen zin. Deze proeven zullen voortgezet worden, terwijl het streven zal zijn om de constante meer nauwkeurig te bepalen. Reeds werd een verhooging in temperatuur bereikt,

zooals tot nog toe niet was verkregen, terwijl wij weldra in staat hopen te wezen, een grootere hoeveelheid ozon in de calorimetrische kolf te doen opnemen. Tevens worden pogingen aangewend, ozon in gewone zuurstof om te zetten met platinazwart, ten einde de omzettingswarmte direct te kunnen bepalen. Van ozonhoudende zuurstof, geleid door een buisje met platinazwart, werd al het ozon ontleed. Uitvoerige onderzoekingen alleen zullen in staat zijn uit te maken, of hier slechts omzetting plaats heeft van ozon in gewone zuurstof, dan wel ook zuurstof wordt vastgelegd.

Utrecht, 26 Februari 1881.

VERSLAG

OVER DE VERHANDELINGEN VAN

Dr. H. KAMERLINGH ONNES,

GETITELD:

1. VERDERE UITBREIDING DER STELLING: DE GELIJKVORMIGHEID DER THERMODYNAMISCHE OPPERVLAKKEN IS DE UITDRUKKING VAN DE GELIJKVORMIGHEID IN DE BEWEGING DER MOLEKULEN

EN

2. ALGEMEENE VLOEISTOFTHEORIE. II[de] STUK.

(Uitgebracht in de Vergadering van 26 Februari 1881).

Deze beide verhandelingen sluiten zich onmiddellijk aan bij een vroegeren arbeid van den schrijver, welke door de Akademie voor hare werken is aangenomen.

In de eerste verhandeling is het doel van den schrijver, aan te toonen, dat zelfs in de onderstelling, dat bij de gassen, als zij tot vloeistoffen overgaan, samenkoppelingen van molekulen moeten aangenomen worden, de algemeene wet der overeenstemmende toestanden zal moeten blijven gelden — ingeval n.l. deze samenkoppelingen van physischen aard zijn. Onder physische samenkoppelingen worden dan diegenen verstaan, welke het gevolg zijn van de werkingen der molekulen der verschillende stoffen, die volgens gelijksoortige wetten van gelijkstandige punten uitgaan — terwijl bij chemische samenkoppelingen de oorzaak in de niet-gelijksoortige werkingen der bestanddeelen, niet van gelijkstandige punten uitgaande, te zoeken is. In de onderstelling dat de krachten,

welke van de gelijkstandige punten uitgaan, in omgekeerde reden van een macht van den afstand werken, volgt de algemeene vloeistofwet weder uit het beginsel van de gelijkvormigheid in de beweging.

Bij de afleiding van regels voor de waarde der capillariteits-constanten, wrijvings-coëfficiënten, enz., in overeenstemmende toestanden der stoffen, vindt de schrijver denzelfden regel voor de capillariteits-constante, welke in de vorige vergadering der Akademie is medegedeeld geworden. Toen was die regel afgeleid uit de onderstelling, dat de molekulaire krachten zich slechts van molekuul op molekuul voortplanten, en dat dus de straal van de sfeer van attractie evenveel rijen molekulen omvatten moest — terwijl de mogelijkheid gesteld werd dat, als de molekulaire krachten op afstand werkten, die straal daarentegen bij alle stoffen even groot zou gevonden worden. Uit de wijze, waarop de schrijver dezer verhandeling tot den regel der capillariteits-constante komt, blijkt dat ook de *actio in distans* tot de uitkomst voert, dat de straal van de sfeer van attractie bij de verschillende stoffen verschillend is, evenredig aan de lineaire afmetingen der molekulen — mits die werking op afstand bij alle stoffen volgens dezelfde wet geschiede.

In de tweede verhandeling wordt de wet der overeenstemmende dampspanningen uit de beschouwingen der kinetische theorie afgeleid.

Het proces der verdamping stelt de schrijver zich aldus voor: Alle molekulen der vloeistof, waarvoor de levende kracht der snelheids-component, in de richting loodrecht op de grenslaag, bij het bereiken van die laag, grooter is dan zekere waarde α, gaan er ongehinderd door heen; evenzoo is dit het geval met *alle* molekulen, die van de zijde van den damp komen. De snelheids-component, loodrecht op die laag, wordt bij de eerste molekulen zoo ver verminderd, dat de aan die vermindering beantwoordende levende kracht gelijk is aan α; bij de laatste molekulen wordt die component even veel vergroot. Uit die voorstelling volgt weder, door

toepassing van het beginsel der gelijkvormigheid, de wet der overeenstemmende dampspanningen, en zelfs wordt daaruit dezelfde vergelijking verkregen, als uit het criterium van MAXWELL-CLAUSIUS volgt.

Wij meenen dan ook om de verdienstelijke wijze van behandeling van een onderwerp, dat in deze Akademie het eerst ter sprake is gebracht, te mogen adviseeren deze verhandelingen in de werken op te nemen.

De Commissie

J. D. VAN DER WAALS,

J. BOSSCHA,

Februari 1881. C. H. C. GRINWIS.

OVER DE AANSLUITING

VAN EEN

DRIEHOEKSNET VAN LAGERE ORDE

AAN EEN

DRIEHOEKSNET VAN HOOGERE ORDE.

DOOR

Ch. M. SCHOLS.

§ 1. Bij eene rationeele opmeting van een eenigzins groot terrein, wordt dat terrein eerst door een net van lijnen overdekt, die nauwkeurig worden opgenomen en ten opzichte waarvan later de details worden opgemeten. Is op het terrein vroeger eene groote driehoeksmeting uitgevoerd, dan is het wenschelijk het net voor de detailmeting daaraan te verbinden. Een van de methoden, die hierbij kunnen worden toegepast, bestaat daarin, dat men het net van lagere orde tot een zelfstandig driehoeksnet vormt en dit aan het net van hoogere orde verbindt, door daarin twee, drie of meer punten van dit laatste net op te nemen.

Hoe grooter het aantal aansluitingspunten is, des te ingewikkelder wordt natuurlijk de berekening; men bepaalt zich daarom meestal tot de aansluiting aan drie punten, in dien zin dat men de driehoekspunten van het net van lagere orde, die gelegen zijn binnen denzelfden driehoek van het net van hoogere orde, aan de drie hoekpunten van dezen driehoek aansluit.

Wilde men hierbij op rationeele wijze te werk gaan, dan

zou men de fouten, die in het net van lagere orde voorkomen, zoodanig moeten vereffenen, dat voldaan werd aan de meetkunstige eigenschappen van het net; dat men voor de coördinaten van de aansluitingspunten de waarden terugvond, die zij in het net van hoogere orde bezitten en dat de som van de vierkanten van de aan de gemeten hoeken aan te brengen correctiën een minimum werd.

De voor deze vereffening uit te voeren berekening is echter zeer omslachtig en de daardoor te verkrijgen nauwkeurigheid, grooter dan volgens de een of andere benaderingsmethode, weegt meestal niet op tegen den grooteren arbeid. Men slaat daarom meestal een eenigzins anderen weg in. Men beschouwt eerst het net van lagere orde geheel zelfstandig, vereffent daarin de fouten volgens de eene of andere rationeele benaderingsmethode en berekent de coördinaten der hoekpunten. Men brengt dan eindelijk de aansluiting aan het net van hoogere orde teweeg, door aan die coördinaten zekere correctiën aan te brengen.

Deze correctiën zal men zoodanig dienen te bepalen, dat daardoor aan de hoeken van het net van lagere orde zoo weinig mogelijk veranderd wordt. Men zal dus goed doen met te zorgen, dat de som van de vierkanten van deze veranderingen een minimum wordt. Dit is wel is waar niet zuiver hetgeen de waarschijnlijkheidsrekening eischt; volgens haar zou de som van de vierkanten van de totale correctiën een minimum moeten zijn en niet die van de partiëele correctiën. Intusschen is dit eene benadering, die hier wel mag worden toegelaten om de berekening te vereenvoudigen; en mogen wij dus die methode als de betere beschouwen waarin die som de kleinere is.

Aangezien bij het net van lagere orde geen basis en geen azimuth gemeten wordt, zoo wordt, nadat de fouten in het net zelf vereffend zijn, op de bekende wijze, uit de lengte en het azimuth van een der zijden van het net van hoogere orde de lengte en het azimuth van een der zijden van het net van lagere orde berekend en deze aan de berekening van de coördinaten van dit net ten grondslag gelegd.

Door deze handelwijze sluit het net van lagere orde reeds

volkomen aan twee punten van het net van hoogere orde en alleen voor het derde punt zal men een verschil aantreffen tusschen de coördinaten uit de twee driehoeksnetten. Het komt er dus nu nog op aan, aan de coördinaten van de punten van het net van lagere orde zoodanige correctiën aan te brengen, dat ten slotte ook de aansluiting aan het derde punt verkregen wordt.

Te vergeefs zoekt men in de verschillende werken over landmeten naar eene methode voor de berekening van die correctiën. Mij is alleen eene methode van den Heer GLEUNS bekend, die bij het kadaster hier te lande gebruikt wordt. Deze methode, die, wat de berekening der correctiën betreft, zeker zeer eenvoudig is, blijkt echter bij nader onderzoek aan de hoeken vrij groote veranderingen te doen ondergaan.

Ik heb daarom getracht eene andere methode te vinden, die, zonder tot omslachtige berekeningen aanleiding te geven, de hoeken van het net veel geringere wijzigingen doet ondergaan, en ben daarin geslaagd, door op de verandering der coördinaten de theorie toe te passen, die bij de kaartprojectiën bekend staat onder de benaming van de conforme overbrenging en het eerst door GAUSS volledig ontwikkeld is in de beantwoording van eene prijsvraag, in 1822 door de K. Akademie van Wetenschappen te Koppenhagen uitgeschreven en in SCHUMACHERS *Astronomische Abhandlungen*, Heft 3. Altona 1825, uitgegeven onder den titel: » Allgemeine Auflösung der Aufgabe: die Theile einer gegeben Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird."

Ten einde de door mij ontwikkelde methode met die van den Heer GLEUNS te kunnen vergelijken, zal ik beginnen met eerst deze methode te ontwikkelen en aan een onderzoek te onderwerpen.

§ 2. Stelt in fig. 1 $A\ B\ C$ den aansluitingsdriehoek voor en heeft men de aansluiting aan de zijde $A\ B$ bewerkstelligd, dan zullen de coördinaten $x_c\ y_c$ van het punt C in het net van lagere orde nog niet overeenstemmen met de coördinaten $X_c\ Y_c$ van die punten in het net van hoogere orde; daaraan zal men nog zekere correctiën moeten aan-

brengen, namelijk $\Delta_{xc} = X_c - x_c$ en $\Delta_{yc} = Y_c - y_c$. Het punt C zal zich dus over een afstand s in eene richting, die een hoek σ met de y-as maakt, moeten verplaatsen; waarbij de afstand s en de hoek σ worden gevonden uit de formules:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_{xc} &= s \sin \sigma \\ \Delta_{yc} &= s \cos \sigma \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Volgens de methode GLEUNS wordt nu elk punt verplaatst in *dezelfde richting* als het punt C en over een afstand *evenredig met den afstand* van dat punt *tot aan de lijn AB*; waaruit onmiddellijk volgt, dat de aan de x en y van een willekeurig punt aan te brengen correctiën ook evenredig zijn met den afstand tot aan de lijn AB. Daar bij deze methode alle punten volgens evenwijdige lijnen verschoven worden, zoo zullen wij haar voortaan bestempelen met den naam van de *methode der parallelle verschuiving.*

Teekent men de triangulatie-kaart met behulp van de voorloopige coördinaten, dan kan men daaruit door eene eenvoudige constructie onmiddellijk de gevraagde correctiën vinden. Trekt men namelijk uit het punt C twee lijnen naar de lijn AB en verdeelt deze in even veel gelijke deelen als Δ_{xc} en Δ_{yc} centimeters bevatten, dan heeft men slechts uit ieder hoekpunt van het net eene lijn te trekken, evenwijdig met AB, om op de aldus verkregen schalen de twee correctiën in centimeters af te lezen.

Door aan die twee lijnen een zoodanige lengte te geven dat het aantal millimeters, die zij bevatten, in een eenvoudig verband staan tot het aantal centimeters van Δ_{xc} en Δ_{yc}, kan men de vereischte verdeeling daarop onmiddellijk met behulp van een dubbelen decimeter afzetten. Bij het voorbeeld van fig. 1, dat later uitvoerig behandeld wordt, is $\Delta_{xc} = 115$ en $\Delta_{yc} = 97$ centimeter. De lengten der twee lijnen zijn nu, in millimeters genomen, anderhalf *) maal 115

---

*) De verhouding anderhalf was de eenvoudigste, die men hier kon toepassen. Bij toeval valt daarbij de lijn voor de correctiën Δ_x samen met de zijde AC van den aansluitingsdriehoek.

resp. 97; zoodat iedere verdeeling juist anderhalven millimeter is. Trekt men nu b. v. uit het punt L eene lijn evenwijdig aan $A\,B$, dan leest men onmiddellijk op die twee schalen af:

$$\Delta_x = 16{,}8 \text{ en } \Delta_y = 14{,}2 \text{ centimeter.}$$

Eene eenvoudigere bepaling van de correctiën voor de coördinaten is zeker niet mogelijk.

§ 3. Tengevolge van de veranderingen, die het net ondergaat door de aansluiting aan het derde punt, ondergaat iedere lijn van het net eene tweeledige verandering: eene vergrooting en eene verdraaiing; de laatste verandering heeft op hare beurt eene wijziging van de hoeken tengevolge. Voor eene juiste beoordeeling van de methode is het van belang deze veranderingen te leeren kennen.

Om deze veranderingen na te gaan, is het noodig de correctiën Δ_x en Δ_y van de coördinaten uit te drukken in de coördinaten van het punt zelf. Kiezen wij daartoe den oorsprong van het rechthoekige coördinatenstelsel in een punt van de lijn $A\,B$ en drukken wij den hoek, die deze lijn met de y-as maakt, door de letter φ uit, dan wordt de afstand van een punt, waarvan de coördinaten zijn x en y, uitgedrukt door: $(x \cos\varphi - y \sin\varphi)$ en de correctiën van de coördinaten dus door:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_x &= \frac{\Delta_{xc}}{h}(x\cos\varphi - y\sin\varphi) = \frac{s}{h}\sin\sigma\,(x\cos\varphi - y\sin\varphi) \\ \Delta_y &= \frac{\Delta_{yc}}{h}(x\cos\varphi - y\sin\varphi) = \frac{s}{h}\cos\sigma\,(x\cos\varphi - y\sin\varphi) \end{aligned}\right\}, \ldots (2)$$

waarin h de lengte van de loodlijn, uit het punt C op $A\,B$ neergelaten, voorstelt.

Ondergaan nu de coördinaten $x_1 y_1$ en $x_2 y_2$ van de uiteinden eener lijn $A_1 A_2$ fig. 3 de correctiën Δ_{x_1} Δ_{y_1} en Δ_{x_2} Δ_{y_2}, dan ondergaat de lijn daardoor de betrekkelijke vergrooting:

$$V = (\Delta_{x_2} - \Delta_{x_1})\frac{\sin\psi}{l} + (\Delta_{y_2} - \Delta_{y_1})\frac{\cos\psi}{l} \quad . \; . \; . \; (3)$$

en de draaiing:

$$D = (\Delta_{x_2} - \Delta_{x_1}) \frac{\cos \psi}{l} - (\Delta_{y_2} - \Delta_{y_1}) \frac{\sin \psi}{l} \quad . \; . \; . \quad (4)$$

in de richting van de positieve y-as naar de positieve x-as, als l en ψ voorstellen respectievelijk de lengte van de lijn en den hoek, dien zij met de y-as maakt.

Substitueeren wij in deze uitdrukkingen voor Δ_{x_1} Δ_{y_1} Δ_{x_2} en Δ_{y_2} hunne waarden volgens bovenstaande formules (2), uitgedrukt in de coördinaten x_1, y_1, x_2 en y_2, en nemen wij in aanmerking dat:

$$\left.\begin{array}{l} x_2 - x_1 = l \sin \psi \\ y_2 - y_1 = l \cos \psi \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

is, dan vinden wij, na eene kleine vervorming, voor de betrekkelijke vergrooting:

$$V = \frac{s}{h} \sin (\psi - \varphi) \cos (\psi - \sigma) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

en voor de verdraaiing:

$$D = -\frac{s}{h} \sin (\psi - \varphi) \sin (\psi - \sigma) \, , \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

welke formules ook als volgt kunnen geschreven worden:

$$V = \frac{s}{2h} \{\sin (2\psi - \varphi - \sigma) + \sin (\sigma - \varphi)\} \quad . \; . \; . \quad (8)$$

en:

$$D = \frac{s}{2h} \{\cos (2\psi - \varphi - \sigma) - \cos (\sigma - \varphi)\} \quad . \; . \; . \quad (9)$$

Uit de formules (6) en (7) of (8) en (9) blijkt dat de veranderingen, die de lijnen ondergaan, geheel onafhankelijk zijn van de plaats, die zij in het net innemen, maar alleen

afhangen van hare richting. De vergrooting wordt nul voor de vier richtingen:

$$\psi = \varphi,\ \psi = 90^0 + \sigma,\ \psi = 180^0 + \varphi \text{ en } \psi = 270^0 + \sigma;$$

door deze vier richtingen wordt de geheele omtrek in vier deelen verdeeld; in twee daarvan worden de lijnen vergroot, in de twee anderen verkleind. De draaiing is nul voor de vier richtingen:

$$\psi = \varphi,\ \psi = \sigma,\ \psi = 180 + \varphi \text{ en } \psi = 180^0 + \sigma;$$

door deze vier richtingen wordt de omtrek eveneens in vier deelen verdeeld, in twee waarvan eene draaiing in positieven zin plaats heeft, terwijl de lijnen in de twee andere deelen in negatieven zin draaien.

Om de veranderingen der hoeken na te gaan, nemen wij eene tweede lijn, van het eerste punt A_1, fig. 4, uitgaande en waarvan het andere eindpunt A_3 tot coördinaten heeft $x_3\, y_3$. Onderscheiden wij de hoeken der beide lijnen met de y-as door ψ_2 en ψ_3, en de draaiingen die zij ondergaan door D_2 en D_3, dan is volgens formule (9):

$$D_2 = \frac{s}{2h}\left\{\cos(2\psi_2 - \varphi - \sigma) - \cos(\sigma - \varphi)\right\}$$

$$D_3 = \frac{s}{2h}\left\{\cos(2\psi_3 - \varphi - \sigma) - \cos(\sigma - \varphi)\right\},$$

waaruit door aftrekking volgt voor de verandering, die den hoek tusschen beide lijnen ondergaat:

$$\delta = D_3 - D_2 = \frac{s}{2h}\left\{\cos(2\psi_3 - \varphi - \sigma) - \cos(2\psi_2 - \varphi - \sigma)\right\} =$$

$$= -\frac{s}{h}\sin(\psi_3 + \psi_2 - \varphi - \sigma)\sin(\psi_3 - \psi_2) \,.\,. \,(10)$$

Hieruit blijkt dat de verandering, die de hoek ondergaat, alleen afhangt van de richting der twee beenen of, zoo men wil, van de grootte van den hoek en van de richting van de lijn, die den hoek midden doordeelt.

Daar $sin(\psi_3 - \psi_2)$ altijd positief is (voor de lijn $A_1 A_3$ nemen wij steeds de lijn, die de grootere hoek ψ met de y-as maakt), zoo hangt het teeken van δ alleen af van den hoek $\frac{\psi_3 + \psi_2}{2}$ dien de lijn, die den hoek midden doordeelt, met de y-as maakt. Door de vier richtingen:

$$\frac{\varphi + \sigma}{2}, \; 90^0 + \frac{\varphi + \sigma}{2}, \; 180^0 + \frac{\varphi + \sigma}{2} \text{ en } 270^0 + \frac{\varphi + \sigma}{2},$$

wordt de omtrek in vier gelijke deelen verdeeld. Valt de lijn, die den hoek midden doordeelt, tusschen de eerste en tweede of tusschen de derde en vierde van die richtingen, dan ondergaat de hoek eene vermindering; valt die lijn in een van de twee andere vakken, dan wordt de hoek grooter.

§ 4. De eenvoudigste wijze, waarop men den driehoek $A\,B\,C$ fig. 10 in kleinere driehoeken kan verdeelen, is, dat men ieder van de drie zijden in n gelijke deelen deelt en door de deelpunten lijnen trekt, evenwijdig aan de twee andere zijden. Het driehoeksnet van lagere orde dat daardoor ontstaat, bevat n^2 gelijk en gelijkvormige driehoeken. De overeenkomstige zijden van die driehoeken zijn allen evenwijdig aan elkaar; zij ondergaan dus allen dezelfde verdraaiing, waaruit volgt dat ook de overeenkomstige hoeken van alle driehoeken dezelfde verandering ondergaan, zoowel in de driehoeken, die gelijkstandig zijn met den driehoek $A\,B\,C$ als in de anderen.

De groote driehoek $A\,B\,C$ in het net van lagere orde ondergaat bij de aansluiting ook eene wijziging, en aangezien de zijden van dezen driehoek dezelfde richting hebben als de zijden van de kleine driehoeken, zoo ondergaan de hoeken juist dezelfde veranderingen als de overeenkomstige hoeken van de kleine driehoeken. Drukken wij nu de som van de vierkanten der veranderingen, die de hoeken van den grooten driehoek ondergaan door S uit, dan is die som voor ieder van de kleine driehoeken ook S en dus voor de n^2 driehoeken van het net van lagere orde:

$$n^2\,S.$$

Hieruit blijkt dat, als men twee driehoeksnetten heeft, het eene met een klein en het tweede met een groot aantal driehoeken, en als daarbij de fout in de aansluiting van het derde punt dezelfde is, de som van de vierkanten van de correctiën der hoeken in rechte reden toeneemt met het aantal driehoeken.

Deze toeneming is zeer ongunstig, want het is toch duidelijk dat, als het aantal driehoeken grooter wordt, men de sluitingsfout over een grooter aantal hoeken te verdeelen heeft; waardoor de veranderingen van die hoeken kleiner kunnen worden en de som van de vierkanten van die veranderingen dus in veel geringer mate zal behoeven toe te nemen. Het zal later blijken dat het mogelijk is, de aansluiting zoodanig te bewerkstelligen, dat genoemde som slechts het bedrag S bereikt, en dus met het grooter worden van het aantal driehoeken niet behoeft toe te nemen.

§ 5. Bij de berekening van het driehoeksnet heeft men de lengten der zijden of hare logarithmen, de hoeken met de y-as, de hoeken van de driehoeken en de *log. sin.* van deze hoeken noodig. Al deze grootheden ondergaan door de aansluiting zekere wijzigingen. Het is van belang deze wijzigingen te leeren kennen, om daardoor de elementen van het definitieve net te verkrijgen.

Men kan deze grootheden bepalen, door uit de definitieve coördinaten de lengten der lijnen en de hoeken met de y-as te berekenen en dan daaruit al de andere grootheden af te leiden.

Deze weg is echter zeer omslachtig, vooral omdat die berekening met groote nauwkeurigheid moet geschieden. Het is veel beter de kleine correctiën, die deze grootheden ondergaan, direct op te maken en dit kan door eene eenvoudige constructie.

Trekt men uit een punt a fig. 2 een cirkel met een straal gelijk aan:

$$100000 \frac{s}{h}$$

eenheden (b. v. millimeters zoo als in fig. 2 of bij eene

kaart op grootere schaal: centimeters) en door het middelpunt eene lijn loodrecht op de aansluitingslijn AB van fig. 1, dan zal, als men door het snijpunt b van die lijn met den cirkel eene lijn bc trekt evenwijdig met de lijn, waarvan men de veranderingen wil onderzoeken (hier de lijn BN van fig. 1) en die wij onderstellen dat een hoek ψ met de y-as maakt, bc gelijk zijn aan:

$$200000 \frac{s}{h} \sin(\psi-\varphi) \, .$$

Trekt men nu nog door het punt b eene lijn bd evenwijdig aan de richting, waarin het punt C moet verplaatst worden, dus onder een hoek σ met de y-as en de loodlijn be daarop; dan zal, als men uit c de twee loodlijnen op die twee lijnen neêrlaat, daarvan de stukken:

$$bf = 200000 \frac{s}{h} \sin(\psi-\varphi) \cos(\psi-\sigma)$$

$$bg = 200000 \frac{s}{h} \sin(\psi-\varphi) \sin(\psi-\sigma)$$

worden afgesneden.

Vergelijkt men de eerste van deze uitdrukkingen met formule (6), dan vindt men:

$$bf = 200000 \, V = 2 \, . \, 100000 \, V;$$

bf stelt dus het dubbel van de betrekkelijke vergrooting voor, uitgedrukt in 100000ste deelen van de lengte. Brengt men dus op bd eene schaalverdeeling in dubbele eenheden aan . dan leest men daarop onmiddellijk de vergrooting in honderdduizenste deelen der lengte af.

De verandering, die de logarithme van de zijde ondergaat, is gelijk aan $M.D$ waarin $M = 0{,}43429$ de modulus van de logarithmen voorstelt. Trekt men nu eene lijn bk, die met bd een hoek maakt, waarvan de secans $= \frac{5}{2} M = \frac{5}{2} \times 0{,}43429 =$ $= 1{,}085736$ is (deze hoek is $= 22^0 55' 20''$ en heeft tot tangens 0,42288) en verlengt de lijn cf tot in p, dan is:

$$bp = \frac{5}{2} M. \, 200000 \, D = 5 \, . \, 100000 \, MD \, ,$$

dat is 5 maal de correctie van de logarithme in eenheden van de vijfde decimaal. Brengt men op bk eene schaalverdeeling aan met de vijfvoudige eenheid, dan leest men daarop onmiddellijk de correctie van de logarithme in eenheden van de 5[de] decimaal af.

Vergelijkt men de uitdrukking voor bg met formule (7), dan vindt men:

$$bg = - \, 200000 \, D;$$

de verdraaiing is dus evenredig met bg. Wil men de verdraaiing in secunden kennen, dan moet men D met het getal 206265 vermenigvuldigen. Trekt men nu eene lijn bq, die met de lijn bc een hoek maakt, waarvan de secans $= \frac{206265}{200000} = 1{,}03132$ is (deze hoek is $= 14^o 9' 30''$ en heeft tot tangens 0,25225) en verlengt de lijn cg tot in r, dan is:

$$br = \frac{206265}{200000} \, bg = - \, 206265 \, D \, ,$$

dus gelijk aan het aantal secunden, dat de lijn verdraaid is. Door dus op bg eene schaalverdeeling in enkele eenheden aan te brengen, leest men daarop onmiddellijk de verdraaiing in secunden af.

Ter bepaling van de verandering, die een hoek ondergaat, bepaalt men op de aangegeven wijze de verdraaiingen van beide lijnen; het verschil geeft de gevraagde correctie van den hoek.

Ter bepaling van de correctie, die de *log. sin.* van den hoek ondergaat, merken wij op, dat de sinus van den hoek A_1 van een driehoek $A_1 \, A_2 \, A_3$ kan uitgedrukt worden door de formule:

$$sin \, A_1 = \frac{2 \, I}{a_2 \, a_3} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (11)$$

als a_2 en a_3 de twee aanliggende zijden en I de inhoud van den driehoek voorstelt. Hieruit volgt:

$$log\, sin\, A_1 = log\, 2 + log\, I - log\, a_2 - log\, a_3$$

en dus:

$$\Delta\, log\, sin\, A_1 = \Delta\, log\, I - \Delta\, log\, a_2 - \Delta\, log\, a_3 \;. \quad (12)$$

Daar nu alle inhouden de betrekkelijke vergrooting:

$$\frac{s}{h}\, sin\, (\sigma - \varphi)$$

ondergaan, zoo is in eenheden van de 5de decimaal:

$$\Delta\, log\, I = 100000\, M\, \frac{s}{h}\, sin\, (\sigma - \varphi) \;.\;.\;.\;. \quad (13)$$

Stellen wij nu deze constante door K voor, dan gaat (12) over in:

$$\Delta\, log\, sin\, A_1 = K - \Delta\, log\, a_2 - \Delta\, log\, a_3 \;.\;. \quad (14)$$

Om de correctie voor den *log. sin.* van een hoek te vinden, heeft men dus slechts van de constante K de correctiën voor de logarithmen van de twee aangrenzende zijden af te trekken.

§ 6. In het in fig. 1 voorgestelde voorbeeld is, zoo als reeds vroeger is opgegeven, $\Delta_{xc} = 1{,}15$ en $\Delta_{yc} = 0{,}97$ meter, waaruit volgt met behulp van formule (1):

$$s = 1{,}5045 \quad \text{en} \quad \sigma = 49^0 51'.$$

De loodlijn uit C op AB neêrgelaten is $= 6725$ meter, waaruit volgt:

$$100000\, \frac{s}{h} = \frac{150450}{6725} = 22{,}37\,.$$

De lijn AB maakt met de y-as een hoek van $19^0 15'$ en hieruit volgt voor de constante K de waarde:

$$K = 100000\, M \frac{s}{h}\, sin\,(\sigma - \varphi) = 4{,}95.$$

In fig. 2 is nu met 22,37 mM. als straal een cirkel beschreven en door het middelpunt *a* de lijn *bab'* loodrecht op *A B* van fig. 1 getrokken; en uit het snijpunt *b* van deze lijn met den cirkel is de lijn *b d* onder een hoek $\sigma = 49^{0}51'$ met de *y*-as getrokken. Verder zijn getrokken de loodlijn *b e* op deze lijn en de twee lijnen *b k* en *b q* onder de in de vorige paragraaf opgegeven hoeken. De lijnen *b g*, *b d* en *b k* zijn verdeeld respectievelijk met 1, 2 en 5 mM. als eenheid en daardoor is de hulpfiguur verkregen voor het bepalen van alle correctiën.

De lijn *b c* is getrokken evenwijdig met *B N* van fig. 1, en uit het snijpunt *c* de twee loodlijnen *c f p* en *c g r*; dezelfde constructie is uitgevoerd voor de twee andere zijden *B L* en *L N* van driehoek *X* *).

Door aflezing op de drie schalen verkrijgt men nu de volgende correctiën, waarbij tevens gevoegd zijn de waarden, die daarvoor door directe berekening gevonden zijn:

		Volgens fig 2.	Door berekening.
Betrekkelijke vergrootingen in 100000ste deelen:	*L N*	+ 7,7	+ 7,7
	B N	+15,2	+15,2
	B L	— 4,7	— 4,7
Correctiën voor de logarithmen in eenheden van de vijfde decimaal:	*L N*	+ 3,30	+ 3,34
	B N	+ 6,60	+ 6,60
	B L	— 2,05	— 2,04
Verdraaiingen der lijnen:	*L N*	+ 2'',9	+ 2'',8
	B N	—32'',0	—32'',1
	B L	—28'',7	—28'',6

*) Snijdt een van de lijnen, door *b* getrokken, den cirkel onder een te scherpen hoek, zoodat het snijpunt niet met juistheid te onderkennen is, dan kan men uit het punt *b'* eene lijn trekken *loodrecht* op de bedoelde lijn van het net, zooals dat in fig. 2 gedaan is voor de lijn *LN* van fig. 1.

Uit deze aflezingen vindt men verder door berekening:

Correctiën voor de hoeken:

B	— 28″,7	+ 32″,0	= + 3″,3	+ 3″,4
L	+ 2″,9	+ 28″,7	= + 31″,6	+ 31″,5
N	— 32″,0	— 2″,9	= + 34″,9	+ 34″,9

Correctiën voor de *log. sin.* der hoeken in eenheden van de 5[de] decimaal:

B	4,95 — 6,60 + 2,05	= + 0,40	+ 0,39
L	4,95 + 2,05 — 3,30	= + 3,70	+ 3,64
N	4,95 — 3,30 — 6,60	= — 4,95	— 4,97

§ 7. Bij de vorige ontwikkeling is ondersteld, dat het net reeds aan twee punten, n.l. *A* en *B*, aangesloten was. Is dit niet het geval, moeten dus ook aan de coördinaten x_a y_a en x_b y_b van die punten de correctiën: Δ_{xa}, Δ_{ya}, Δ_{xb} en Δ_{yb} aangebracht worden, dan wordt de bepaling van de verschillende correctiën iets moeilijker.

Het is gemakkelijk in te zien, dat de formules voor de correctiën van de coördinaten gebracht kunnen worden onder den vorm:

$$\Delta_x = p\,x - q\,y + r$$

$$\Delta_y = p_1 x - q_1 y + r_1$$

waaruit blijkt, dat die twee correctiën evenredig zijn met de afstanden tot twee verschillende lijnen, die niet meer samenvallen met eene van de zijden van den aansluitingsdriehoek. Die correctiën kunnen op dergelijke wijze gevonden worden als in § 2 is uiteengezet, nadat men de twee bedoelde lijnen getrokken heeft.

De formules voor de vergrootingen en de verdraaiingen der zijden en voor de correctiën van de logarithmen der zijden, van de hoeken en van de *log. sin.* der hoeken, kunnen uit bovenstaande formules gemakkelijk worden opgemaakt. Eenige daarvan bevatten een constanten term meer en de daarin voorkomende hoeken hangen niet op zoo eenvoudige wijze samen met den driehoek. Het gevolg daarvan is, eene kleine

wijziging in de meetkunstige bepaling van de verschillende correctiën.

Wij zullen de ontwikkelingen voor dit meer algemeene geval hier niet voortzetten, omdat het ons omtrent de waarde van de methode niets verder kan leeren, maar besluiten met het vermelden van de waarden van de zes constanten, die in bovenstaande formules voorkomen; deze zijn:

$$p = \frac{1}{2I}\{\Delta_{xa}(y_c - y_b) + \Delta_{xb}(y_a - y_c) + \Delta_{xc}(y_b - y_a)\}$$

$$q = \frac{1}{2I}\{\Delta_{xa}(x_c - x_b) + \Delta_{xb}(x_a - x_c) + \Delta_{xc}(x_b - x_a)\}$$

$$r = \frac{1}{2I}\{\Delta_{xa}(x_c y_b - x_b y_c) + \Delta_{xb}(x_a y_c - x_c y_a) + \Delta_{xc}(x_b y_a - x_a y_b)\}$$

$$p_1 = \frac{1}{2I}\{\Delta_{ya}(y_c - y_b) + \Delta_{yb}(y_a - y_c) + \Delta_{yc}(y_b - y_a)\}$$

$$q_1 = \frac{1}{2I}\{\Delta_{ya}(x_c - x_b) + \Delta_{yb}(x_a - x_c) + \Delta_{yc}(x_b - x_a)\}$$

$$r_1 = \frac{1}{2I}\{\Delta_{ya}(x_c y_b - x_b y_c) + \Delta_{yb}(x_a y_c - x_c y_a) + \Delta_{yc}(x_b y_a - x_a y_b)\}$$

waarin:

$$2I = x_c\, y_b - x_b\, y_c + x_a\, y_c - x_c\, y_a + x_b\, y_a - x_a\, y_b$$

het dubbel van den inhoud van den aansluitingsdriehoek voorstelt.

§ 8. Wij zullen thans eene nieuwe methode ontwikkelen voor de aansluiting van een net van lagere orde aan een net van hoogere orde, waarbij de hoeken van het net veel geringere wijzigingen ondergaan. Deze methode, die zich, zooals in § 1 reeds werd opgemerkt, grondt op de theorie van de conforme overbrenging en die wij daarom zullen bestempelen met den naam van de *methode der conforme overbrenging*, berust op de volgende redeneering. Brengt men de verschillende punten van eene figuur, die door de rechthoe-

kige coördinaten $x\,y$ gegeven zijn, in een ander rechthoekig coördinatenstelsel $X\,Y$ door middel van de formule:

$$Y + X\sqrt{-1} = f(y + x\sqrt{-1}) \quad . \; . \; . \; . \; . \; (15)$$

over, dan bestaat er gelijkvormigheid in de kleinste deelen van beide figuren. De hoeken worden dus op deze wijze onveranderd overgebracht en daardoor hebben wij dus eene methode voor de aansluiting, waarbij de hoeken in het geheel niet veranderd worden.

Bij deze overbrenging gaan echter de rechte lijnen $A_1 A_2$ en $A_1 A_3$ fig. 5 in de kromme lijnen $A_1'A_2'$ en $A_1'A_3'$ over. Het is de hoek tusschen de raaklijnen aan beide kromme lijnen in het punt A_1', die gelijk is aan hoek $A_2 A_1 A_3$.

Daar nu de zijden van de driehoeken na de aansluiting wederom rechte lijnen moeten zijn, zoo kunnen wij alleen de driehoekspunten, volgens bovenstaande formule, overbrengen, en moeten deze dan door rechte lijnen vereenigen; in plaats van de kromme lijnen $A_1'A_2'$ en $A_1'A_3'$ moeten wij dus de koorden nemen. Hierdoor ondergaan de hoeken kleine veranderingen, en wel veranderingen gelijk aan het verschil van de hoeken tusschen de raaklijnen en de koorden van beide lijnen.

Het is verder duidelijk dat, als wij de driehoeken kleiner nemen, bijvoorbeeld $A_1 B_2 B_3$ in plaats van $A_1 A_2 A_3$, de hoeken tusschen de raaklijnen en de koorden kleiner zullen worden en dus in het algemeen ook hunne verschillen. Daar deze hoeken bij de grens $A_1 B_2 = 0$, $A_1 B_3 = 0$, nul wórden, zoo mogen wij verwachten dat, bij de toepassing van bovenstaande formule, de hoeken, vooral bij kleine driehoeken, slechts geringe wijzigingen zullen ondergaan.

Uit bovenstaande formule volgt nu gemakkelijk dat ook de uitdrukking: $\Delta_y + \Delta_x \sqrt{-1}$ eene functie zal zijn van $(y + x\sqrt{-1})$ en het komt er nu slechts op aan voor die formule eene keuze te doen. Bij die keuze hebben wij er op te letten, dat voor de correctiën Δ_x en Δ_y eenvoudige formules gevonden moeten worden, wil men niet in ingewikkelde berekeningen vervallen. Wij hebben daarom eene para-

bolische functie gekozen en aangezien wij aan *drie* punten willen aansluiten en dus aan *zes* voorwaarden moeten voldoen, zoo moet die functie minstens *zes* constanten bevatten; waaruit volgt, dat die functie minstens van den tweeden graad moet zijn.

Wij stellen dus:

$$\Delta_y + \Delta_x \sqrt{-1} = (A_2 + A_1 \sqrt{-1}) + (B_2 + B_1 \sqrt{-1})(y + x\sqrt{-1}) + \\ + (C_2 + C_1 \sqrt{-1})(y + x\sqrt{-1})^2 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

waaruit onmiddellijk door ontwikkeling volgt:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_x &= A_1 + B_2 x + B_1 y + C_1 (y^2 - x^2) + 2\, C_2\, x\, y \\ \Delta_y &= A_2 + B_2 y - B_1 x + C_2 (y^2 - x^2) - 2\, C_1\, x\, y \end{aligned}\right\} \ldots (17)$$

waarin A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 en C_2 de zes constanten voorstellen.

Het zijn deze formules, die wij aan onze methode ten grondslag leggen, en waarop onze verdere beschouwingen gegrond zijn.

§ 9. In de eerste plaats merken wij op, dat bovenstaande formules nog eene aanmerkelijke vereenvoudiging kunnen ondergaan door het doen van eene geschikte keuze voor den oorsprong van het coördinatenstelsel. Het is daardoor mogelijk de termen van de eerste macht te verdrijven.

Stellen wij de coördinaten van den oorsprong van het nieuwe coördinatenstelsel door $x_0\, y_0$ voor en de coördinaten ten opzichte van dit nieuwe stelsel door $x'\, y'$, dan is

$$x = x' + x_0\,, \qquad y = y' + y_0\,,$$

waardoor bovenstaande formules overgaan in:

$$\begin{aligned} \Delta_x = {} & A_1 + B_2 (x' + x_0) + B_1 (y' + y_0) + \\ & + C_1 \{(y' + y_0)^2 - (x' + x_0)^2\} + 2\, C_2 (x' + x_0)(y' + y_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_y = {} & A_2 + B_2 (y' + y_0) - B_1 (x' + x_0) + \\ & + C_2 \{(y' + y_0)^2 - (x' + x_0)^2\} - 2\, C_1 (x' + x_0)(y' + y_0) \end{aligned}$$

of na ontwikkeling:

$$\Delta_x = A_1 + B_2 x_0 + B_1 y_0 + C_1 (y_0^2 - x_0^2) + 2 C_2 x_0 y_0 + \\ + (B_2 - 2 C_1 x_0 + 2 C_2 y_0) x' + (B_1 + 2 C_1 y_0 + 2 C_2 x_0) y' + \\ + C_1 (y'^2 - x'^2) + 2 C_2 x' y'$$

$$\Delta_y = A_2 + B_2 y_0 - B_1 x_0 + C_2 (y_0^2 - x_0^2) - 2 C_1 x_0 y_0 + \\ + (B_2 - 2 C_1 x_0 + 2 C_2 y_0) y' - (B_1 + 2 C_1 y_0 + 2 C_2 x_0) x' + \\ + C_2 (y'^2 - x'^2) - 2 C_1 x' y'.$$

Stellen wij nu hierin de coëfficiënten van x' en y' gelijk nul, dan vinden wij door oplossing:

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \frac{C_1 B_2 - C_2 B_1}{2 (C_1^2 + C_2^2)} \\ y_0 &= \frac{-C_2 B_2 - C_1 B_1}{2 (C_1^2 + C_2^2)} \end{aligned} \right\} \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

Stellen wij nu nog:

$$\left. \begin{aligned} & A_1 + B_2 x_0 + B_1 y_0 + C_1 (y_0^2 - x_0^2) + 2 C_2 x_0 y_0 = \\ & = A_1 + C_1 \frac{B_2^2 - B_1^2}{4 (C_1^2 + C_2^2)} - C_2 \frac{2 B_1 B_2}{4 (C_1^2 + C_2^2)} = A_1' \\ & A_2 + B_2 y_0 - B_1 x_0 + C_2 (y_0^2 - x_0^2) - 2 C_1 x_0 y_0 = \\ & = A_2 - C_2 \frac{B_2^2 - B_1^2}{4 (C_1^2 + C_2^2)} - C_1 \frac{2 B_1 B_2}{4 (C_1^2 + C_2^2)} = A_2' \end{aligned} \right\}, \ldots (19)$$

dan gaan de formules voor de correctiën Δ_x en Δ_y over in:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_x &= A_1' + C_1 (y'^2 - x'^2) + 2 C_2 x' y' \\ \Delta_y &= A_2' + C_2 (y'^2 - x'^2) - 2 C_1 x' y' \end{aligned} \right\} \ldots \quad (20)$$

Stelt men verder:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= - C \sin 2\gamma \\ C_2 &= + C \cos 2\gamma \end{aligned} \right\} \ldots\ldots\ldots, \ldots \quad (21)$$

en

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= + B \sin \beta \\ B_2 &= - B \cos \beta \end{aligned} \right\} \ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

dan gaan de formules voor de berekening van x_0, y_0, A_1' en A_2' over in:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \frac{B}{2\,C} \sin (2\,\gamma - \beta) \\ y_0 &= \frac{B}{2\,C} \cos (2\,\gamma - \beta) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (23)$$

$$\left.\begin{aligned} A_1' &= A_1 - \frac{B^2}{4\,C} \sin (2\,\gamma - 2\,\beta) \\ A_2' &= A_2 - \frac{B^2}{4\,C} \cos (2\,\gamma - 2\,\beta) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (24)$$

die voor de berekening veel gemakkelijker zijn.

§ 10. Beschouwen wij wederom het geval dat het driehoeksnet aangesloten is aan de zijde AB fig. 6 en dat de coördinaten van C nog de correctiën:

$$\Delta_{xc} = s \sin \sigma \qquad \Delta_{yc} = s \cos \sigma \quad \ldots\ldots (25)$$

moeten ondergaan.

Stellen wij de lengten van de drie zijden van den aansluitingsdriehoek, in het net van lagere orde, door a, b en c en de hoeken door A, B en C voor; stellen wij verder den hoek, dien de lijn AB met de y-as maakt, gelijk φ en nemen wij den oorsprong van het coördinatenstelsel $x'y'$ in het punt M midden tusschen A en B aan, dan is voor A:

$$x' = -\tfrac{1}{2}\, c \sin \varphi$$

$$y' = -\tfrac{1}{2}\, c \cos \varphi$$

en dus:

$$y'^2 - x'^2 = \tfrac{1}{4}\, c^2 \cos 2\,\varphi$$

$$2\,x'y' = \tfrac{1}{4}\, c^2 \sin 2\,\varphi\,.$$

Voor B:

$$x' = \tfrac{1}{2}\, c \sin \varphi$$

$$y' = \tfrac{1}{2}\, c \cos \varphi\,,$$

en dus eveneens:

$$y'^2 - x'^2 = \tfrac{1}{4}\, c^2 \cos 2\,\varphi$$

$$2\,x'\,y' = \tfrac{1}{4}\, c^2 \sin 2\,\varphi$$

en voor C:

$$x' = \tfrac{1}{2}\, c \sin \varphi + a \sin (\varphi + 180^0 - B) = \tfrac{1}{2}\, c \sin \varphi - a \sin (\varphi - B)$$

$$y' = \tfrac{1}{2}\, c \cos \varphi + a \cos (\varphi + 180^0 - B) + \tfrac{1}{2}\, c \cos \varphi - a \cos (\varphi - B)$$

waaruit volgt:

$$y'^2 - x'^2 = \tfrac{1}{4}\, c^2 \cos 2\,\varphi - a\,c \cos (2\,\varphi - B) + a^2 \cos (2\,\varphi - 2B)$$

$$= \tfrac{1}{4}\, c^2 \cos 2\,\varphi - a \left\{ c \cos (2\varphi - B) - a \cos (2\,\varphi - 2B) \right\}$$

$$2\,x'\,y' = \tfrac{1}{4}\, c^2 \sin 2\,\varphi - a\,c \sin (2\,\varphi - B) + a^2 \sin (2\,\varphi - 2B)$$

$$= \tfrac{1}{4}\, c^2 \sin 2\,\varphi - a \left\{ c \sin (2\varphi - B) - a \sin (2\,\varphi - 2B) \right\}$$

of als wij de zijden a en c, die tusschen de haakjes { } voorkomen, uitdrukken in de zijde b, dan komt er na eene eenvoudige herleiding:

$$y'^2 - x'^2 = \tfrac{1}{4}\, c^2 \cos 2\,\varphi - a\,b \cos (2\,\varphi - B + A)$$

$$2\,x'\,y' = \tfrac{1}{4}\, c^2 \sin 2\,\varphi - a\,b \sin (2\,\varphi - B + A)\,.$$

Substituëren wij nu bovenstaande waarden voor de coördinaten van A en van B in de vergelijkingen (20) dan vinden wij:

$$0 = A_1 - \tfrac{1}{2} B_2 c \sin\varphi - \tfrac{1}{2} B_1 c \cos\varphi + \tfrac{1}{4} C_1 c^2 \cos 2\varphi + \tfrac{1}{4} C_2 c^2 \sin 2\varphi$$

$$0 = A_1 + \tfrac{1}{2} B_2 c \sin\varphi + \tfrac{1}{2} B_1 c \cos\varphi + \tfrac{1}{4} C_1 c^2 \cos 2\varphi + \tfrac{1}{4} C_2 c^2 \sin 2\varphi$$

$$0 = A_2 - \tfrac{1}{2} B_2 c \cos\varphi + \tfrac{1}{2} B_1 c \sin\varphi + \tfrac{1}{4} C_2 c^2 \cos 2\varphi - \tfrac{1}{4} C_1 c^2 \sin 2\varphi$$

$$0 = A_2 + \tfrac{1}{2} B_2 c \cos\varphi - \tfrac{1}{2} B_1 c \sin\varphi + \tfrac{1}{4} C_2 c^2 \cos 2\varphi - \tfrac{1}{4} C_1 c^2 \sin 2\varphi .$$

Door deze vergelijkingen twee aan twee van elkaar af te trekken vinden wij:

$$B_2 \sin\varphi + B_1 \cos\varphi = 0$$

$$B_2 \cos\varphi - B_1 \sin\varphi = 0$$

waaruit volgt:

$$B_1 = 0 \text{ en } B_2 = 0 .$$

Hieruit blijkt dus, dat het in de vorige paragraaf bedoelde punt, waarvan de coördinaten zijn x_0 en y_0, gelegen is in het punt M midden tusschen A en B. De twee constanten A_1 en A_3 gaan daardoor over in de constanten A'_1 en A'_2 van de formules (19) en hiervoor vinden wij uit de vorige vergelijkingen:

$$A'_1 = -\tfrac{1}{4} C_1 c^2 \cos 2\varphi - \tfrac{1}{4} C_2 c^2 \sin 2\varphi$$

$$A'_2 = -\tfrac{1}{4} C_2 c^2 \sin 2\varphi + \tfrac{1}{4} C_1 c^2 \sin 2\varphi$$

of, als wij voor C_1 en C_2 de uitdrukkingen volgens formule (21) nemen, namelijk:

$$C_1 = - C \sin 2\gamma$$

$$C_2 = + C \cos 2\gamma ,$$

dan gaan A_1' en A_2' over in:

$$\left.\begin{aligned} A_1' &= -\tfrac{1}{4}\, C c^2 \sin(2\varphi - 2\gamma) \\ A_2' &= -\tfrac{1}{4}\, C c^2 \cos(2\varphi - 2\gamma) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (26)$$

Passen wij nu de formules (20) toe op het punt C en nemen voor A'_1, A'_2, C_1 en C_2 bovenstaande waarden (26) en (21) dan vinden wij:

$$\Delta_{xc} = s \sin\sigma = -\tfrac{1}{4}\, C c^2 \sin(2\varphi - 2\gamma) + \tfrac{1}{4}\, C c^2 \sin(2\varphi - 2\gamma) - \\ - C ab \sin(2\varphi - B + A - 2\gamma) = - C ab \sin(2\varphi - B + A - 2\gamma)$$

$$\Delta_{yc} = s \cos\sigma = -\tfrac{1}{4}\, C c^2 \cos(2\varphi - 2\gamma) + \tfrac{1}{4}\, C c^2 \sin(2\varphi - 2\gamma) - \\ - C ab \cos(2\varphi - B + A - 2\gamma) = - C ab \cos(2\varphi - B + A - 2\gamma)$$

waaruit volgt:

$$s = C ab$$

en:

$$\sigma = 180^0 + 2\varphi - 2\gamma - B + A$$

zoodat wij dus ten slotte voor onze constanten vinden de volgende eenvoudige uitdrukkingen:

$$C = \frac{s}{ab} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (27)$$

$$\gamma = 90^0 + \varphi - \frac{\sigma + B - A}{2} \quad \ldots\ldots (28)$$

$$\left.\begin{aligned} A'_1 &= -\tfrac{1}{4}\, C c^2 \sin(2\varphi - 2\gamma) = \frac{s c^2}{4 ab} \sin(\sigma + B - A) \\ A'_2 &= -\tfrac{1}{4}\, C c^2 \cos(2\varphi - 2\gamma) = \frac{s c^2}{4 ab} \cos(\sigma + B - A) \end{aligned}\right\} \quad \ldots (29)$$

§ 11. Voor de berekening van de correctiën voor de coördinaten hebben wij de formules (20) gevonden; deze kunnen nog vereenvoudigd worden. Stellen wij namelijk de voerstraal MR van een willekeurig punt R fig. 8 door ϱ en de hoek, dien zij met de y-as maakt, door θ voor, dan is:

$$x' = \varrho \sin \theta \qquad y' = \varrho \cos \theta .$$

Substitueeren wij deze waarden in (20) en vervangen C_1 en C_2 door hunne waarden uit (21) dan vinden wij:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_x &= A_1' + C\varrho^2 \sin 2(\theta - \gamma) \\ \Delta_y &= A_2' + C\varrho^2 \cos 2(\theta - \gamma) \end{aligned} \right\} \quad \ldots\ldots \quad (30)$$

Deze formules zijn zeer geschikt voor de directe berekening van de correctiën, indien men eerst de waarden van ϱ en θ berekent uit:

$$\begin{aligned} \varrho \sin \theta &= x' = x - x_0 \\ \varrho \cos \theta &= y' = y - y_0 \end{aligned}$$

waarin x_0 en y_0 de gemiddelden zijn van de coördinaten van A en B.

Die formules geven ook aanleiding tot eene eenvoudige constructie van de correctiën op eene triangulatie-kaart, geconstrueerd met de voorloopige coördinaten. Het meest doelmatige is echter, van uit de kaart enkele afstanden op te meten en daaruit de correctiën te berekenen. Door eene kleine vervorming kan men die formules namelijk onder zoodanigen vorm brengen, dat die berekening zeer eenvoudig wordt.

Voor die formules kunnen wij namelijk schrijven:

$$\begin{aligned} \Delta_x &= A_1' + C\varrho^2 \sin(2\theta - 2\gamma) = A_1' + C\varrho^2 \cos(2\theta - 2\gamma - 90^0) = \\ &= A_1' + C^2 \varrho^2 \{\cos^2(\theta - \gamma - 45^0) - \sin^2(\theta - \gamma - 45^0)\} = \\ &= A_1' + C^2 \{\varrho^2 \sin^2(\theta - \gamma + 45^0) - \varrho^2 \sin^2(\theta - \gamma - 45^0)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_y &= A_2' + C\varrho^2 \cos(2\theta - 2\gamma) = A_2' + C\varrho^2 \{\cos^2(\theta - \gamma) - \sin^2(\theta - \gamma)\} = \\ &= A_2' + C\{\varrho^2 \sin^2(\theta - \gamma - 90^0) - \varrho^2 \sin^2(\theta - \gamma)\}. \end{aligned}$$

De in deze formules voorkomende grootheden: $\varrho \sin(\theta - \gamma + 45^0)$,

$\varrho \sin(\theta-\gamma)$, $\varrho \sin(\theta-\gamma-45^0)$ en $\varrho \sin(\theta-\gamma-90^0)$ zijn respectievelijk gelijk aan de afstanden van het punt R tot vier lijnen door M getrokken, die met de y-as de hoeken $\gamma-45^0$, γ, $\gamma+45^0$ en $\gamma+90^0$ maken.

Trekken wij nu op de triangulatie-kaart, die geteekend is op de schaal $1:m$, de vier lijnen U_1, V_2, V_1 en U_2 door het punt M onder de boven aangegeven hoeken en meten wij de afstanden u_1, v_2, v_1 en u_2 van het punt R tot aan die lijnen, dan is

$$\begin{aligned} \varrho \sin(\theta-\gamma+45^0) &= m\, u_1 \\ \varrho \sin(\theta-\gamma-45^0) &= m\, v_1 \\ \varrho \sin(\theta-\gamma-90^0) &= m\, u_2 \\ \varrho \sin(\theta-\gamma) &= m\, v_2 \end{aligned}$$

waardoor de formules voor de correctiën Δ_x en Δ_y overgaan in:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_x &= A_1' + C m^2 (u_1^2 - v_1^2) \\ \Delta_y &= A_2' + C m^2 (u_2^2 - v_2^2) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (31)$$

Voor de berekening volgens deze formules heeft men slechts eene kleine quadratentafel noodig. De vermenigvuldiging met den factor $C m^2 = \dfrac{s\, m^2}{a\, b}$ geschiedt het eenvoudigst als men vooraf een klein tabelletje opmaakt van de veelvouden van dien factor.

In de volgende paragraaf wordt een voorbeeld van deze berekening gegeven, waardoor de eenvoudigheid daarvan nader blijkt.

Men zou des noods kunnen volstaan met het meten van twee afstanden, hetzij U_1 en V_1, hetzij V_2 en U_2; men kan namelijk gemakkelijk de volgende twee formules aantoonen:

$$\Delta_x = A_1' + 2\, C m^2\, U_2\, V_2, \qquad \Delta_y = A_2' + 2\, C m^2\, U_1\, V_1$$

Deze zijn echter voor de berekening minder geschikt, vooral omdat men daarbij de teekens van de afstanden U_1 V_1 enz. moet in aanmerking nemen, hetgeen bij de vorige formules niet noodig is.

§ 12. In figuur 12 is hetzelfde voorbeeld genomen als in fig. 1. De triangulatie-kaart is geteekend op de schaal 1 à 50000 (dus $m = 50000$). De zijden en de hoeken van den aansluitingsdriehoek zijn:

$$a = 6768 \text{ meter} \qquad A = 51^0 15'$$
$$b = 8623 \quad » \qquad B = 83^0 32'$$
$$c = 6159 \quad » \qquad C = 45^0 13'.$$

De zijde $AB = c$ maakt met de y-as den hoek $\varphi = 19^0 15'$. De correctiën voor het punt C zijn $\Delta_{xc} = 1{,}15$ en $\Delta_{yc} = 0{,}97$ meter, waaruit volgt:

$$s = 1{,}5045 \qquad \sigma = 49^0 51'.$$

Hieruit volgt:

$$\sigma + B - A = 49^0 51' + 83^0 32' - 51^0 15' = 82^0 8'$$

$$\gamma = 90^0 + \varphi - \frac{\sigma + B - A}{2} = 90^0 + 19^0 15' - 41^0 4' = 68^0 11'$$

en als wij den *centimeter* als eenheid nemen, hetgeen voor het meten op de kaart gemakkelijker is dan den meter:

$$A_1' = \frac{s c^2}{4 ab} \sin(\sigma + B - A) = 24{,}22$$

$$A_2' = \frac{s c^2}{4 ab} \cos(\sigma + B - A) = 3{,}35$$

$$Cm^2 = \frac{s m^2}{ab} = 0{,}64447.$$

Van deze laatste waarde maken wij het volgende tabelletje van veelvouden op:

1.	0,644
2.	1,289
3.	1,933
4.	2,578
5.	3,222
6.	3,867
7.	4,511
8.	5,156
9.	5,800.

In figuur 12 zijn nu de vier bedoelde lijnen getrokken en door meting vinden wij daarin voor het punt R: $u_1 = 7,3$, $v_1 = 3,8$, $u_2 = 7,8$, $v_2 = 2,5$ en hiermede wordt de berekening van de correctiën voor dat punt, uitgedrukt in centimeters, nu als volgt:

$u_1^2 =$	53	$A_1' =$	24,2
$v_1^2 =$	14	$30\ Cm^2 =$	19,3
Verschil $=$	39	$9\ Cm^2 =$	5,8
			$49 = \Delta_x$

$u_2^2 =$	61	$A_2' =$	3,3
$v_2^2 =$	6	$50\ Cm^2 =$	32,2
Verschil $=$	55	$5\ Cm^2 =$	3,2
			$39 = \Delta_y$

De figuur 12 op de schaal van 1 à 50000 is ruimschoots voldoende voor de berekening van alle correctiën tot in centimeters nauwkeurig en dit is alles wat voor de praktijk noodig is. Teekent men de kaart op de schaal van 1 à 10000, dan kan men de correctiën gemakkelijk tot in millimeters vinden.

Het teekenen van de lijnen $U_1\ V_1\ U_2\ V_2$ kan gemakkelijk geschieden als men het stuk berekent, dat een van die lijnen van de zijden $A\,C$ of $B\,C$ afsnijdt. Dit stuk is onmiddellijk te vinden uit een driehoek, waarvan de basis ($^1/_2\ c.$) en de twee aanliggende hoeken bekend zijn.

§ 13. Gaan wij thans over tot het onderzoek van de vervormingen, die het net ondergaat tengevolge van de aansluiting. Voor de vergrooting en de verdraaiing, die de lijn $A_1\,A_2$ fig. 7 ondergaat, vinden wij volgens de formules (3) en (4), als wij daarin de waarden van $\Delta_{x_1}\ \Delta_{y_1}\ \Delta_{x_2}\ \Delta_{y_2}$ uit (20) overbrengen, en in aanmerking nemen dat:

$$\frac{\sin\psi}{l} = \frac{l\sin\psi}{l^2} = \frac{x_2' - x_1'}{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2}$$

$$\frac{\cos\psi}{l} = \frac{l\cos\psi}{l^2} = \frac{y_2' - y_1'}{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2}$$

is:

$$V = -C_1(x_2' + x_1') + C_2(y_2' + y_1') \quad \ldots . (32)$$

en

$$D = C_1(y_2' + y_1') + C_2(x_2' + x_1'), \quad \ldots . . (33$$

of als wij voor C_1 en C_2 de waarden uit (21) invoeren en den voerstraal MB, gaande naar het midden van $A_1 A_2$, door r en den hoek, dien hij met de y'-as maakt, door ω voorstellen:

$$V = 2\,C\,r\cos(\omega - 2\gamma) \quad \ldots \ldots . . (34)$$

$$D = 2\,C\,r\sin(\omega - 2\gamma) \ldots \ldots . . (35)$$

Uit deze formules blijkt dat de vergrooting en de verdraaiing, die een lijn ondergaat, onafhankelijk zijn van de richting dier lijn, maar alleen afhangen van de plaats van het middelpunt dier lijn. Die twee grootheden blijken verder evenredig te zijn met de afstanden tot twee lijnen door het punt M, die respectievelijk met de y-as de hoeken $2\gamma + 90^0$ en 2γ maken. Trekken wij dus de lijnen Mf en Mg respectievelijk onder de hoeken $y'Mf = 2\gamma$ en $y'Mg = 2\gamma + 90^0$ en laten uit B daarop de twee loodlijnen Bk en Bl neer, dan wordt de vergrooting van de lijn $A_1 A_2$ gemeten door Mk en de verdraaiing door Ml.

Voor de verandering, die de hoek $A_2 A_1 A_3$ fig. 8 ondergaat, vinden wij op dezelfde wijze als in § 3 uit form. (33):

$$\delta = D_3 - D_2 = C_1(y_3' - y_2') + C_2(x_3' - x_2') \ldots (36)$$

of, als wij de lengte van de lijn $A_2 A_3$ door l en den hoek, dien zij met de y-as maakt, door ψ voorstellen en voor C_1 en C_2 de waarden (21) invoeren:

$$\delta = C\,l\sin(\psi - 2\gamma) = C\,l\cos(\psi - 2\gamma - 90^0) \ldots (37)$$

Dat wil zeggen, dat de hoek $A_2 A_1 A_3$ van den driehoek $A_1 A_2 A_3$ eene verandering ondergaat, evenredig met de projectie $n_2 n_3$ van de overstaande zijde $A_2 A_3$ op de lijn Mg, die een hoek $2\gamma + 90^0$ met de y-as maakt. Doorloopen wij die overstaande zijde, van uit het hoekpunt gezien, in de

richting van de positieve y-as naar de positieve x-as en heeft die lijn eene positieve projectie op de lijn Mg, dan wordt de hoek grooter; heeft zij eene negatieve projectie op de lijn Mg, dan wordt de hoek kleiner.

Uit (37) blijkt verder dat, als men de zijden van den driehoek kleiner neemt, de correctiën van de hoeken ook kleiner worden, waardoor het in § 8 medegedeelde nader bevestigd wordt.

Hebben wij een centraal punt A_1 fig. 9 waaromheen eene reeks driehoeken liggen, die samen een convexen veelhoek vormen en trekken wij uit de uiterste punten loodlijnen op Mg, dus uit A_2 en A_5, dan wordt het eene gedeelte der hoeken om A_1 grooter (n.l. de hoeken 2, 3 en 4), terwijl het andere gedeelte der hoeken (5, 6, 7 en 8) kleiner wordt.

§ 14. Beschouwen wij het regelmatige net in fig. 10 voorgesteld, dan hebben de zijden van de kleine driehoeken, die denzelfden stand hebben, als de groote driehoek, eene n malen kleinere projectie dan de overeenkomstige zijden van den grooten driehoek; de hoeken daarvan ondergaan dus eene n malen kleinere verandering dan de overeenkomstige hoeken van den aansluitingsdriehoek. Heeft dus de aansluitingsdriehoek voor de som van de vierkanten van de correctiën der hoeken eene waarde S, dan is de som van de vierkanten van de correctiën der hoeken voor een kleinen driehoek $\frac{S}{n^2}$. De driehoeken, die den omgekeerden stand van den driehoek $A\,B\,C$ hebben, hebben voor de projecties der zijden dezelfde waarden, maar met het omgekeerde teeken; de hoeken van die driehoeken ondergaan dus dezelfde correctiën, maar met omgekeerd teeken; de som van de vierkanten van de correctiën van die hoeken is dus ook $\frac{S}{n^2}$ en voor de som van de correctiën van de hoeken van alle driehoeken vinden wij dus:

$$n^2 \cdot \frac{S}{n^2} = S$$

dus onafhankelijk van het aantal driehoeken.

Wij zien dus hieruit dat bij deze methode de aansluiting van het driehoeksnet van fig. 10 verkregen wordt met eene som van de vierkanten van de correctiën der hoeken, die n^2 malen kleiner is dan bij de vroeger beschreven methode van de parallelle verschuiving.

Er is echter meer. Bij het eenvoudige net, dat hier bedoeld wordt, wordt de aansluiting verkregen door aan de hoeken zoo kleine wijzigingen aan te brengen, dat de som van de vierkanten van die wijzigingen een minimum is.

Om dit te bewijzen zal het voldoende zijn aan te toonen, dat, als men na de aansluiting, aan een willekeurig punt, met uitzondering natuurlijk van de 3 aansluitingspunten, eene kleine verplaatsing geeft, de bedoelde som daardoor steeds grooter wordt. Is nu δ de verandering, die een van de hoeken ondergaat tengevolge van de aansluiting van het net volgens de beschreven methode, en $p\,\Delta_x + q\,\Delta_y$ de verandering, die diezelfde hoek ondergaat tengevolge van eene kleine verplaatsing van een willekeurig punt, dan gaat de som van de vierkanten dier veranderingen over in:

$$\Sigma(\delta+p\Delta_x+q\Delta_y)^2 = \Sigma\,\delta^2+2\Delta_x\Sigma p\,\delta+2\Delta_y\Sigma\,q\,\delta+\Sigma\,(p\Delta_x+q\Delta_y)^2$$

Zal $\Sigma\,\delta^2$ nu werkelijk een minimum zijn, dan moeten $\Sigma\,p\,\delta$ en $\Sigma\,q\,\delta$ gelijk nul zijn.

Kiezen wij nu in de eerste plaats een willekeurig punt in het inwendige van het net en geven wij daaraan de verplaatsingen Δ_x en Δ_y, dan zullen daardoor alleen veranderen de hoeken van de zes driehoeken om dat punt gelegen, die in fig. 11 afzonderlijk zijn voorgesteld, zoodat het dus alleen noodig is voor de 18 daarin voorkomende hoeken de produkten $p\,\delta$ en $q\,\delta$ op te maken.

Nemen wij daarbij de y-as evenwijdig aan de lijn $A\,B$ van den aansluitingsdriehoek en stellen wij de projecties van de aan $A\,C$ en $B\,C$ evenwijdige zijden van de kleine driehoekjes, op die as respectievelijk door a en b voor en de hoogte van een dergelijk driehoekje door h, dan geeft onderstaande staat voor iederen hoek de grootheden δ, p en q en de producten $p\,\delta$ en $q\,\delta$.

		δ	p	q	$p\delta$	$q\delta$
I.	1.	$-C_1 b + C_2 h$	$-\frac{a}{a^2+h^2}+\frac{1}{a+b}$	$\frac{h}{a^2+h^2}$	$C_1\frac{ab}{a^2+h^2}-C_1\frac{b}{a+b}-C_2\frac{ah}{a^2+h^2}+C_2\frac{h}{a+b}$	$-C_1\frac{bh}{a^2+h^2}+C_2\frac{h^2}{a^2+h^2}$
	2.	$-C_1 a - C_2 h$	$-\frac{1}{a+b}$	0	$C_1\frac{a}{a+b}+C_2\frac{h}{a+b}$	0
	3.	$C_1(a+b)$	$\frac{a}{a^2+h^2}$	$\frac{-h}{a^2+h^2}$	$C_1\frac{a(a+b)}{a^2+h^2}$	$-C_1\frac{h(a+b)}{a^2+h^2}$
II.	1.	$C_1 b - C_2 h$	$-\frac{a}{a^2+h^2}$	$\frac{h}{a^2+h^2}$	$-C_1\frac{ab}{a^2+h^2}+C_2\frac{ah}{a^2+h^2}$	$C_1\frac{bh}{a^2+h^2}-C_2\frac{h^2}{a^2+h^2}$
	2.	$C_1 a + C_2 h$	$-\frac{b}{b^2+h^2}$	$-\frac{h}{b^2+h^2}$	$-C_1\frac{ab}{b^2+h^2}-C_2\frac{bh}{b^2+h^2}$	$-C_1\frac{ah}{b^2+h^2}-C_2\frac{h^2}{b^2+h^2}$
	3.	$-C_1(a+b)$	$\frac{a}{a^2+h^2}+\frac{b}{b^2+h^2}$	$-\frac{h}{a^2+h^2}+\frac{h}{b^2+h^2}$	$-C_1\frac{a(a+b)}{a^2+h^2}-C_1\frac{b(a+b)}{b^2+h^2}$	$C_1\frac{h(a+b)}{a^2+h^2}-C_1\frac{h(a+b)}{b^2+h^2}$
III.	1.	$-C_1 b + C_2 h$	$-\frac{1}{a+b}$	0	$C_1\frac{b}{a+b}-C_2\frac{h}{a+b}$	0
	2.	$-C_1 a - C_2 h$	$-\frac{b}{b^2+h^2}+\frac{1}{a+b}$	$-\frac{h}{b^2+h^2}$	$C_1\frac{ab}{b^2+h^2}-C_1\frac{a}{a+b}+C_2\frac{bh}{b^2+h^2}-C_2\frac{h}{a+b}$	$C_1\frac{ah}{b^2+h^2}+C_2\frac{h^2}{b^2+h^2}$
	3.	$C_1(a+b)$	$+\frac{b}{b^2+h^2}$	$+\frac{h}{b^2+h^2}$	$C_1\frac{b(a+b)}{b^2+h^2}$	$C_1\frac{h(a+b)}{b^2+h^2}$

		δ	p	q	$p\delta$	$q\delta$
IV.	1.	$C_1 b - C_2 h$	$\frac{a}{a^2+h^2} - \frac{1}{a+b}$	$-\frac{h}{a^2+h^2}$	$C_1\frac{ab}{a^2+h^2} - C_1\frac{b}{a+b} - C_2\frac{ah}{a^2+h^2} + C_2\frac{h}{a+b}$	$-C_1\frac{bh}{a^2+h^2} + C_2\frac{h^2}{a^2+h^2}$
	2.	$C_1 a + C_2 h$	$+\frac{1}{a+b}$	0	$C_1\frac{a}{a+b} + C_2\frac{h}{a+b}$	0
	3.	$-C_1(a+b)$	$-\frac{a}{a^2+h^2}$	$\frac{h}{a^2+h^2}$	$C_1\frac{a(a+b)}{a^2+h^2}$	$-C_1\frac{h(a+b)}{a^2+h^2}$
V.	1.	$-C_1 b + C_2 h$	$\frac{a}{a^2+h^2}$	$-\frac{h}{a^2+h^2}$	$-C_1\frac{ab}{a^2+h^2} + C_2\frac{ah}{a^2+h^2}$	$+C_1\frac{bh}{a^2+h^2} - C_2\frac{h^2}{a^2+h^2}$
	2.	$-C_1 a - C_2 h$	$\frac{b}{b^2+h^2}$	$\frac{h}{b^2+h^2}$	$-C_1\frac{ab}{b^2+h^2} - C_2\frac{bh}{b^2+h^2}$	$-C_1\frac{ah}{b^2+h^2} - C_2\frac{h^2}{b^2+h^2}$
	3.	$C_1(a+b)$	$-\frac{a}{a^2+h^2} - \frac{b}{b^2+h^2}$	$\frac{h}{a^2+h^2} - \frac{h}{b^2+h^2}$	$-C_1\frac{a(a+b)}{a^2+h^2} - C_1\frac{b(a+b)}{b^2+h^2}$	$C_1\frac{h(a+b)}{a^2+h^2} - C_1\frac{h(a+b)}{b^2+h^2}$
VI.	1.	$C_1 b - C_2 h$	$\frac{1}{a+b}$	0	$C_1\frac{b}{a+b} - C_2\frac{h}{a+b}$	0
	2.	$C_1 a + C_2 h$	$\frac{b}{b^2+h^2} - \frac{1}{a+b}$	$\frac{h}{b^2+h^2}$	$C_1\frac{ab}{b^2+h^2} + C_2\frac{bh}{b^2+h^2} - C_1\frac{a}{a+b} - C_2\frac{h}{a+b}$	$C_1\frac{ah}{b^2+h^2} + C_2\frac{h^2}{b^2+h^2}$
	3.	$-C_1(a+b)$	$-\frac{b}{b^2+h^2}$	$-\frac{h}{b^2+h^2}$	$C_1\frac{b(a+b)}{b^2+h^2}$	$C_1\frac{h(a+b)}{b^2+h^2}$

Telt men nu de twee laatste kolommen samen, dan vindt men, dat werkelijk $\Sigma p \delta$ en $\Sigma q \delta$ gelijk nul zijn en dus eene kleine verplaatsing van een der punten, in het binnenste van het net gelegen, de som van de vierkanten van de veranderingen steeds doet toenemen.

Er blijven nu nog over de driehoekspunten, gelegen op de lijnen AB, BC en CA van den aansluitingsdriehoek; eene verplaatsing van een dier punten brengt slechts veranderingen teweeg in de hoeken van de drie driehoeken, die daar omheen gelegen zijn. Deze drie driehoeken verkeeren juist onder dezelfde omstandigheden respectievelijk als de driehoeken I, II, III—III, IV, V en V, VI, I van fig. 11. Maakt men nu uit den vorigen staat de sommen $\Sigma p \delta$ en $\Sigma q \delta$ voor deze drie groepen van drie driehoeken op, dan vindt men telkens de waarde *nul*, zoodat ook eene verplaatsing van de punten op den omtrek van den aansluitingsdriehoek de som van de vierkanten van de veranderingen van de hoeken steeds doet toenemen.

Uit het bovenstaande blijkt dus, dat onze methode voor het regelmatige net van fig. 10 de som van de vierkanten van de veranderingen der hoeken werkelijk tot een minimum maakt; voor een minder regelmatig net zal dit in het algemeen niet plaats hebben, maar het is toch duidelijk dat voor een net, dat van fig. 10 niet al te veel afwijkt, die som toch nabij het minimum zal komen en dat dus in dit opzicht onze methode eene deugdelijke mag genoemd worden.

§ 15. Er blijft thans nog over de hulpmiddelen aan te geven, om langs eenvoudigen weg de veranderingen te bepalen, die de verschillende elementen van het net ondergaan, tengevolge van de aansluiting.

De betrekkelijke vergrooting is volgens form. (29):

$$V = -C_1(x_2'+x_1')+C_2(y_2'+y_1') = (-C_1x_2'+C_2y_2')+(-C_1x_1'+C_2y_1').$$

Stellen wij nu door ϱ_1 den voerstraal van het punt A_1 fig. 8 en door θ_1 den hoek, dien zij met de y-as maakt, voor en door ϱ_2 en θ_2 dezelfde grootheden voor het punt A_2, dan gaat bovenstaande uitdrukking over in:

$$V = C\,\varrho_2 \cos(\theta_2 - 2\gamma) + C\,\varrho_1 \cos(\theta_1 - 2\gamma).$$

Dat wil zeggen: de vergrooting wordt gemeten door de *som* van de projectiën van de voerstralen van de twee uiteinden op de lijn Mf van fig. 8, die met de y-as den hoek 2γ maakt.

Brengt men dus langs die lijn (zie fig. 13) eene schaalverdeeling aan, waarvan de eenheid is:

$$\frac{1}{m\,C\,100000} = \frac{a\,b}{m\,s\,100000},$$

dan kan men, door daarop uit de twee uiteinden der lijn loodlijnen neer te laten, die twee projectiën onmiddellijk aflezen in 100000ste deelen van de lengte. Haar som geeft de gevraagde vergrooting.

De correctie voor de logarithme is gelijk aan de relatieve vergrooting, vermenigvuldigd met den modulus $M = 0{,}4342945$. Brengt men dus langs diezelfde lijn eene tweede schaal aan met de eenheid:

$$\frac{1}{m\,M\,C\,100000} = \frac{a\,b}{m\,s\,43429},$$

dan kan men daarop bij de voetpunten van dezelfde loodlijnen aflezen. De som van de twee aflezingen geeft de correctie in eenheden van de 5de decimaal.

De verdraaiing, die de lijn ondergaat, wordt volgens form. (30) gegeven door:

$$D = C_1(y_2' + y_1') + C_2(x_2' + x_1') = (C_1 y_2' + C_2 x_2') + (C_1 y_1' + C_2 x_1').$$

Voert men hierin de voerstralen ϱ_1 en ϱ_2 en de hoeken θ_1 en θ_2 in, dan vindt men:

$$D = C\,\varrho_2 \sin(\theta_2 - 2\gamma) + C\,\varrho_1 \sin(\theta_1 - 2\gamma) =$$
$$= C\,\varrho_2 \cos(\theta_2 - 2\gamma - 90^0) + C\,\varrho_1 \cos(\theta_1 - 2\gamma - 90^0).$$

Dat wil zeggen: de verdraaiing wordt gemeten door de som van de projectiën der voerstralen op de lijn Mg fig. 8, die met de y-as den hoek $2\gamma + 90^0$ maakt.

Brengt men daarop eene schaalverdeeling aan (zie fig. 13) met de eenheid:

$$\frac{1}{m\,C\,206264} = \frac{a\,b}{m\,s\,206264}$$

en leest men bij de voetpunten der loodlijnen, uit de twee uiteinden der lijn daarop neergelaten, af, dan is de *som* der aflezingen de verdraaiing in secunden.

De verandering van een hoek $A_2 A_1 A_3$ fig. (8) wordt volgens form. (33) gegeven door:

$$\delta = C_1(y_3' - y_2') + C_2(x_3' - x_2') = (C_1 y_3' + C_2 x_3') - (C_1 y_2' + C_2 x_2'),$$

waaruit volgt, dat die correctie gevonden wordt uit het *verschil* der aflezingen op bovengenoemde schaal bij de voetpunten der loodlijnen, uit de uiteinden van de overstaande zijde neergelaten.

In § 5 form. (12) hebben wij gevonden voor de correctie van de *log. sin.* van een hoek de formule:

$$\Delta \log \sin A_1 = \Delta \log I - \Delta \log a_2 - \Delta \log a_3.$$

Daar nu de inhoud I van den driehoek gevonden wordt uit:

$$2\,I = y_2'\,x_3' - y_3'\,x_2' + y_3'\,x_1' - y_1'\,x_3' + y_2'\,x_3' - y_2'\,x_1'$$

zoo is:

$$\Delta\,2\,I = \Delta_{x_1}(y_3' - y_2') + \Delta_{x_2}(y_1' - y_3') + \Delta_{x_3}(y_2' - y_1') - \\ - \Delta_{y_1}(x_3' - x_2') - \Delta_{y_2}(x_1' - x_3') - \Delta_{y_3}(x_2' - x_1').$$

Door hierin voor Δ_{x_1}, Δ_{x_2}, Δ_{x_3}, Δ_{y_1}, Δ_{y_2} en Δ_{y_3} de waarden te substituëeren volgens form. (20), vinden wij na herleiding:

$$\Delta\,2\,I = C_1\{y_1'^2 y_3' - y_1'^2 y_2' + y_2'^2 y_1' - y_2'^2 y_3' + y_3'^2 y_2' - y_3'^2 y_1' - \\ - x_1'^2 y_3' + x_1'^2 y_2' - x_2'^2 y_1' + x_2'^2 y_3' - x_3'^2 y_2' + x_3'^2 y_1' + \\ + 2\,x_1'\,y_1'\,x_3' - 2\,x_1'\,y_1'\,x_2' + 2\,x_2'\,y_2'\,x_1' - 2\,x_2' y_2' x_3' + \\ + 2 x_3' y_3' x_2' - 2 x_3' y_3' x_1'\}$$

$$+ C_2\{x_1'^2 x_3' - x_1'^2 x_2' + x_2'^2 x_1' - x_2'^2 x_3' + x_3'^2 x_2' - x_3'^2 x_1' - \\ - y_1'^2 x_3' + y_1'^2 x_2' - y_2'^2 x_1' + y_2'^2 x_3' - y_3'^2 x_2' + y_3'^2 x_1' + \\ + 2\,x_1'\,y_1'\,y_3' - 2\,x_1'\,y_1'\,y_2' + 2\,x_2'\,y_2'\,y_1' - 2\,x_2'\,y_2'\,y_3' + \\ + 2\,x_3'\,y_3'\,y_2' - 2\,x_3'\,y_3'\,y_1'\}.$$

Stellen wij de coördinaten van het gemeenschappelijk snijpunt van de loodlijnen, uit de drie hoekpunten van den driehoek op de overstaande zijden neergelaten, door X en Y voor, dan is:

$$X.2I = -y_1'^2 y_3' + y_1'^2 y_2' - y_2'^2 y_1' + y_2'^2 y_3' - y_3'^2 y_2' + y_3'^2 y_1' - \\ - x_1' y_1' x_3' + x_1' y_1' x_2' - x_2' y_2' x_1' + x_2' y_2' x_3' - x_3' y_3' x_2' + \\ + x_3' y_3' x_1'$$

$$Y.2I = +x_1'^2 x_3' - x_1'^2 x_2' + x_2'^2 x_1' - x_2'^2 x_3' + x_3'^2 x_2' - x_3'^2 x_1' + \\ + x_1' y_1' y_3' - x_1' y_1' y_2' + x_2' y_2' y_1' - x_2' y_2' y_3' + x_3' y_3' y_2' - \\ - x_3' y_3' y_1'.$$

Verder is:

$$(x_1' + x_2' + x_3') 2I = x_1'^2 y_3' - x_1'^2 y_2' + x_2'^2 y_1' - x_2'^2 y_3' + x_3'^2 y_2' - \\ - x_3'^2 y_1' - x_1' y_1' x_3' + x_1' y_1' x_2' - x_2' y_2' x_1' + \\ + x_2' y_2' x_3' - x_3' y_3' x_2' + x_3' y_3' x_1'$$

$$(y_1' + y_2' + y_3') 2I = -y_1'^2 x_3' + y_1'^2 x_2' - y_2'^2 x_1' + y_2'^2 x_3' - \\ - y_3'^2 x_2' + y_3'^2 x_1' + x_1' y_1' y_3' - x_1' y_1' y_2' + \\ + x_2' y_2' y_1' - x_2' y_2' y_3' + x_3' y_3' y_2' - x_3' y_3' y_1'.$$

Met behulp van deze uitdrukkingen gaat bovenstaande formule voor $\Delta\, 2I$, als wij tevens door $2I$ deelen, over in:

$$\frac{\Delta I}{I} = -C_1 (X + x_1' + x_2' + x_3') + C_2 (Y + y_1' + y_2' + y_3')$$

waaruit blijkt, dat de relatieve vergrooting van den inhoud van den driehoek gemeten wordt door de projectie op de lijn Mf fig. 8 van den voerstraal van het punt, dat gelegen is op de lijn, die het zwaartepunt van den driehoek met het snijpunt der loodlijnen vereenigt en wel op een $^1/_4$ van den afstand van beide punten, gerekend van het zwaartepunt af *). Die vergrooting kan men in 100000ste deelen gemakkelijk bepalen, door bij elkaar te tellen de aflezingen op de schaal voor de vergrooting bij de voetpunten van de lood-

*) Dit punt ligt midden tusschen het snijpunt der drie loodlijnen en het middenpunt van den omgeschreven cirkel.

lijnen uit de drie hoekpunten en uit het snijpunt van de drie hoogten daarop neergelaten. Doet men de aflezing op de schaal voor de correctiën der logarithmen, dan vindt men de correctie voor de logarithme van den inhoud.

Daar nu

$$\Delta \log I = M \frac{\Delta I}{I}$$

$$\Delta \log a_2 = M \frac{\Delta a_2}{a_2} = M\{-C_1(x_3' + x_1') + C_2(y_3' + y_1')\}$$

$$\Delta \log a_3 = M \frac{\Delta a_3}{a_3} = M\{-C_1(x_1' + x_2') + C_2(y_1' + y_2')\}$$

is, zoo gaat bovenstaande formule voor $\Delta \lg \sin A_1$ over in:

$$\Delta \lg \sin A_1 = M\{-C_1(X - x_1') + C_2(Y - y_1')\} =$$
$$= M(-C_1 X + C_2 Y) - M(-C_1 x_1' + C_2 y_1')$$

waaruit volgt, dat de correctie van den logarithme sinus van een hoek gemeten wordt door de projectie op de lijn Mf fig. 8 van het stuk van de loodlijn, uit het hoekpunt op de overstaande zijde neergelaten, begrepen tusschen dat hoekpunt en het gemeenschappelijk snijpunt der drie loodlijnen. Men kan die correctie, in eenheden van de vijfde decimaal, dus onmiddellijk vinden, door het verschil te nemen van de aflezingen, op de schaal voor de correctiën der logarithmen, bij de voetpunten der loodlijnen neergelaten uit het hoekpunt, en uit het snijpunt der drie loodlijnen.

§ 16. Als voorbeeld hebben wij in fig. 13 hetzelfde net als in fig. 1 en fig. 12 voorgesteld op de schaal $\frac{1}{m} = \frac{1}{50000}$.
Door het punt M, midden tusschen A en B gelegen, zijn de twee lijnen Mf en Mg getrokken onder de hoeken:

$$2\gamma = 2 \times 68^0 11' = 136^0 22'$$

en

$$2\gamma + 90^0 = 136^0 22' + 90^0 = 226^0 22'$$

met de y-as en daarop de drie schalen aangebracht respectievelijk met de eenheden:

$$\frac{ab}{ms\,100000} = 0{,}007758 = 7{,}758\,mM$$

$$\frac{ab}{ms\,43429} = 0{,}017864 = 17{,}864\,mM$$

$$\frac{ab}{ms\,206264} = 0{,}003762 = 3{,}762\,mM.$$

Uit de drie hoekpunten van den driehoek RSV zijn daarop loodlijnen neergelaten en bij de voetpunten de volgende aflezingen gedaan, respectievelijk op de schalen voor de vergrooting, voor de correctiën der logarithmen en voor de correctiën der hoeken:

R	+ 6,80	+ 2,93	— 16″,8
S	+ 4,45	+ 1,93	— 9″,3
V	+ 9,03	+ 3,93	— 11″,2.

Eindelijk is uit het snijpunt van de drie hoogten van den driehoek eene loodlijn neergelaten op de schaal voor de correctiën der logarithmen en bij het voetpunt daarvan afgelezen:

3,06.

Uit deze aflezingen volgen nu de onderstaande waarden voor de verschillende correctiën, waarbij tevens gevoegd zijn de waarden, zooals die door directe berekening volgen:

			Volgens fig. 13.	Door berekening.
Vergrootingen in	SV	4,45 + 9,03 =	13,48	+ 13,5
100000ste deelen	VR	9,03 + 6,80 =	15,83	+ 15,8
der lengten *)	RS	6,80 + 4,45 =	11,25	+ 11,2

*) De schaal voor de vergrooting kan men des verkiezende weg laten; meestal heeft men de relatieve vergrooting niet noodig, maar alleen de correctie van de logarithme. Men kan trouwens die vergrooting ook vinden

		δ	p	q	$p\delta$	$q\delta$
I.	1.	$-C_1 b+C_2 h$	$-\frac{a}{a^2+h^2}+\frac{1}{a+b}$	$\frac{h}{a^2+h^2}$	$C_1\frac{ab}{a^2+h^2}-C_1\frac{b}{a+b}-C_2\frac{ah}{a^2+h^2}+C_2\frac{h}{a+b}$	$-C_1\frac{bh}{a^2+h^2}+C_2\frac{h^2}{a^2+h^2}$
	2.	$-C_1 a-C_2 h$	$-\frac{1}{a+b}$	0	$C_1\frac{a}{a+b}+C_2\frac{h}{a+b}$	0
	3.	$C_1(a+b)$	$\frac{a}{a^2+h^2}$	$\frac{-h}{a^2+h^2}$	$C_1\frac{a(a+b)}{a^2+h^2}$	$-C_1\frac{h(a+b)}{a^2+h^2}$
II.	1.	$C_1 b-C_2 h$	$-\frac{a}{a^2+h^2}$	$\frac{h}{a^2+h^2}$	$-C_1\frac{ab}{a^2+h^2}+C_2\frac{ah}{a^2+h^2}$	$C_1\frac{bh}{a^2+h^2}-C_2\frac{h^2}{a^2+h^2}$
	2.	$C_1 a+C_2 h$	$-\frac{b}{b^2+h^2}$	$-\frac{h}{b^2+h^2}$	$-C_1\frac{ab}{b^2+h^2}-C_2\frac{bh}{b^2+h^2}$	$-C_1\frac{ah}{b^2+h^2}-C_2\frac{h^2}{b^2+h^2}$
	3.	$-C_1(a+b)$	$\frac{a}{a^2+h^2}+\frac{b}{b^2+h^2}$	$-\frac{h}{a^2+h^2}+\frac{h}{b^2+h^2}$	$-C_1\frac{a(a+b)}{a^2+h^2}-C_1\frac{b(a+b)}{b^2+h^2}$	$C_1\frac{h(a+b)}{a^2+h^2}-C_1\frac{h(a+b)}{b^2+h^2}$
III.	1.	$-C_1 b+C_2 h$	$-\frac{1}{a+b}$	0	$C_1\frac{b}{a+b}-C_2\frac{h}{a+b}$	0
	2.	$-C_1 a-C_2 h$	$-\frac{b}{b^2+h^2}+\frac{1}{a+b}$	$-\frac{h}{b^2+h^2}$	$C_1\frac{ab}{b^2+h^2}-C_1\frac{a}{a+b}+C_2\frac{bh}{b^2+h^2}-C_2\frac{h}{a+b}$	$C_1\frac{ah}{b^2+h^2}+C_2\frac{h^2}{b^2+h^2}$
	3.	$C_1(a+b)$	$+\frac{b}{b^2+h^2}$	$+\frac{h}{b^2+h^2}$	$C_1\frac{b(a+b)}{b^2+h^2}$	$C_1\frac{h(a+b)}{b^2+h^2}$

		δ	p	q	$p\delta$	$q\delta$
IV.	1.	$C_1 b - C_2 h$	$\frac{a}{a^2+h^2} - \frac{1}{a+b}$	$-\frac{h}{a^2+h^2}$	$C_1\frac{ab}{a^2+h^2} - C_1\frac{b}{a+b} - C_2\frac{ah}{a^2+h^2} + C_2\frac{h}{a+b}$	$-C_1\frac{bh}{a^2+h^2} + C_2\frac{h^2}{a^2+h^2}$
	2.	$C_1 a + C_2 h$	$+\frac{1}{a+b}$	0	$C_1\frac{a}{a+b} + C_2\frac{h}{a+b}$	0
	3.	$-C_1(a+b)$	$-\frac{a}{a^2+h^2}$	$\frac{h}{a^2+h^2}$	$C_1\frac{a(a+b)}{a^2+h^2}$	$-C_1\frac{h(a+b)}{a^2+h^2}$
V.	1.	$-C_1 b + C_2 h$	$\frac{a}{a^2+h^2}$	$-\frac{h}{a^2+h^2}$	$-C_1\frac{ab}{a^2+h^2} + C_2\frac{ah}{a^2+h^2}$	$+C_1\frac{bh}{a^2+h^2} - C_2\frac{h^2}{a^2+h^2}$
	2.	$-C_1 a - C_2 h$	$\frac{b}{b^2+h^2}$	$\frac{h}{b^2+h^2}$	$-C_1\frac{ab}{b^2+h^2} - C_2\frac{bh}{b^2+h^2}$	$-C_1\frac{ah}{b^2+h^2} - C_2\frac{h^2}{b^2+h^2}$
	3.	$C_1(a+b)$	$-\frac{a}{a^2+h^2} - \frac{b}{b^2+h^2}$	$\frac{h}{a^2+h^2} - \frac{h}{b^2+h^2}$	$-C_1\frac{a(a+b)}{a^2+h^2} - C_1\frac{b(a+b)}{b^2+h^2}$	$C_1\frac{h(a+b)}{a^2+h^2} - C_1\frac{h(a+b)}{b^2+h^2}$
VI.	1.	$C_1 b - C_2 h$	$\frac{1}{a+b}$	0	$C_1\frac{b}{a+b} - C_2\frac{h}{a+b}$	0
	2.	$C_1 a + C_2 h$	$\frac{b}{b^2+h^2} - \frac{1}{a+b}$	$\frac{h}{b^2+h^2}$	$C_1\frac{ab}{b^2+h^2} + C_2\frac{bh}{b^2+h^2} - C_1\frac{a}{a+b} - C_2\frac{h}{a+b}$	$C_1\frac{ah}{b^2+h^2} + C_2\frac{h^2}{b^2+h^2}$
	3.	$-C_1(a+b)$	$-\frac{b}{b^2+h^2}$	$-\frac{h}{b^2+h^2}$	$C_1\frac{b(a+b)}{b^2+h^2}$	$C_1\frac{h(a+b)}{b^2+h^2}$

Substitueert men de waarden van B en β in (24) en neemt men de waarden van A_1' en A_2' uit (29) over, dan vindt men:

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \frac{s\,c^2}{4\,a\,b}\sin(\sigma+B-A)+\frac{s}{ab}R^2\sin(2\,\Omega-2\,\gamma)= \\ &= \tfrac{1}{4}\,C\,c^2\sin\psi - C\,R^2\sin(2\,\Omega-2\,\varphi+\psi) \\ A_2 &= \frac{s\,c^2}{4\,a\,b}\cos(\sigma+B-A)+\frac{s}{ab}R^2\cos(2\,\Omega-2\,\gamma)= \\ &= \tfrac{1}{4}\,C\,c^2\cos\psi - C\,R^2\cos(2\,\Omega-2\,\varphi+\psi) \end{aligned}\right\} \ldots (40)$$

§ 17. Is het driehoeksnet niet aangesloten aan een van de zijden van den aansluitingsdriehoek in het net van hoogere orde, maar moeten ook aan de coördinaten van de punten A en B de correctiën $\Delta_{xa} = X_a - x_a$, $\Delta_{ya} = Y_a - y_a$, $\Delta_{xb} = X_b - x_b$ en $\Delta_{yb} = Y_b - y_b$ worden aangebracht, dan blijven alle beschouwingen doorgaan; alleen het punt, waarvoor B_1 en $B_2 = 0$ worden, komt op eene andere plaats en A_1', A_2', C en γ verkrijgen andere waarden.

Neemt men den oorsprong van het coördinatenstelsel in een willekeurig punt, dan zijn de waarden van A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 en C_2 gelijk aan de sommen van de drie waarden, die men verkrijgt, in de drie onderstellingen, dat alleen het punt A, alleen het punt B en alleen het punt C eene verplaatsing behoeft te ondergaan. Berekent men die waarden volgens (38), (39) en (40), dan geven hunne sommen de waarden van A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 en C_2, en met behulp van (21)—(24) vindt men dan de waarden van C, γ, x_0, y_0, A_1' en A_2'.

Zoowel voor de nauwkeurigheid, als voor het gemak van deze berekening, is het wenschelijk den oorsprong van het coördinatenstelsel niet al te ver buiten den driehoek te nemen.

De eenvoudigste formules verkrijgt men, door den oorsprong te nemen in het middelpunt van den omgeschreven cirkel.

De straal r van dien cirkel vindt men uit *):

*) In deze paragraaf komen de letters B en C in tweeërlei beteekenis voor; daaruit kan echter geen verwarring ontstaan, aangezien zij op de eene plaats een hoek op de andere een coëfficiënt voorstellen.

$$r = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{b}{2 \sin B} = \frac{c}{2 \sin C} \quad \ldots\ldots (41)$$

en de coördinaten van het middelpunt uit:

$$\left.\begin{array}{ll} X = \frac{x_a + x_b}{2} + r \cos C \cos \varphi_c & Y = \frac{y_a + y_b}{2} - r \cos C \sin \varphi_c \\ X = \frac{x_b + x_c}{2} + r \cos A \cos \varphi_a & Y = \frac{y_b + y_c}{2} - r \cos A \sin \varphi_a \\ \text{of:} & \\ X = \frac{x_c + x_a}{2} + r \cos B \cos \varphi_c & Y = \frac{y_c + y_a}{2} - r \cos B \sin \varphi_b \end{array}\right\} \ldots (42)$$

waarin φ_c, φ_a en φ_b de hoeken voorstellen, die de lijnen $AB = c$, $BC = a$ en $CA = b$ met de y-as maken.

In de formules (39) en (40), die gelden voor de verplaatsing van het punt C, wordt dan:

$$R = r \cos C = \tfrac{1}{2} c \operatorname{cotg} C \quad \text{en} \quad \Omega = \varphi_c + 270^0$$

waardoor zij overgaan in:

$$B_1 = 2 C r \cos C \sin(\varphi_c + 270^0 + \psi - 2\varphi_c) = -2 C r \cos C \cos(\varphi_c - \psi)$$

$$B_2 = 2 C r \cos C \cos(\varphi_c + 270^0 + \psi - 2\varphi_c) = -2 C r \cos C \sin(\varphi_c - \psi)$$

$$A_1 = \tfrac{1}{4} C c^2 \sin \psi - \tfrac{1}{4} C c^2 \operatorname{ctg}^2 C \sin(2\varphi_c + 540^0 - 2\varphi_c + \psi) = C r^2 \sin \psi$$

$$A_2 = \tfrac{1}{4} C c^2 \cos \psi - \tfrac{1}{4} C c^2 \operatorname{ctg}^2 C \cos(2\varphi_c + 540^0 - 2\varphi_c + \psi) = C r^2 \cos \psi$$

Nemen wij nu aan dat alle drie de punten eene verplaatsing moeten ondergaan en stellen wij:

$$\left.\begin{array}{ll} \Delta_{xa} = s_a \sin \sigma_a & \Delta_{ya} = s_a \cos \sigma_a \\ \Delta_{xb} = s_b \sin \sigma_b & \Delta_{yb} = s_b \cos \sigma_b \\ \Delta_{xc} = s_c \sin \sigma_c & \Delta_{yc} = s_c \cos \sigma_c \end{array}\right\} \ldots\ldots (43)$$

en verder:

$$\left.\begin{array}{ll} \sigma_a - B + C = \psi_a & \dfrac{s_a}{bc} = C_a \\ \sigma_b - C + A = \psi_b & \dfrac{s_b}{ca} = C_b \\ \sigma_c - A + B = \psi_c & \dfrac{s_c}{ab} = C_c \end{array}\right\}, \quad \ldots\ldots (44)$$

dan vinden wij het volgende stel formules:

$$\left.\begin{array}{l} C \sin 2\gamma = - C_a \sin(2\varphi_a - \psi_a) - C_b \sin(2\varphi_b - \psi_b) - \\ \qquad\qquad - C_c \sin(2\varphi_c - \psi_c) \\ C \cos 2\gamma = - C_a \cos(2\varphi_a - \psi_a) - C_b \cos(2\varphi_b - \psi_b) - \\ \qquad\qquad - C_c \cos(2\varphi_c - \psi_c) \end{array}\right\} \ldots (45)$$

$$\left.\begin{array}{l} B \sin\beta = -2r \{ C_a \cos A \cos(\psi_c - \varphi_c) + C_b \cos B \cos(\psi_b - \varphi_b) + \\ \qquad\qquad + C_c \cos C \cos(\psi_c - \varphi_c) \} \\ B \cos\beta = -2r \{ C_a \cos A \sin(\psi_c - \varphi_c) + C_b \cos B \sin(\psi_b - \varphi_b) + \\ \qquad\qquad + C_c \cos C \sin(\psi_c - \varphi_c) \} \end{array}\right\} \ldots (46)$$

$$\left.\begin{array}{l} A_1 = r^2 \{ C_a \sin\psi_a + C_b \sin\psi_b + C_c \sin\psi_c \} \\ A_2 = r^2 \{ C_a \cos\psi_a + C_b \cos\psi_b + C_c \cos\psi_c \} \end{array}\right\} \ldots\ldots (47)$$

Heeft men uit deze formules C, γ, B, β, A_1 en A_2 berekend, dan volgen x_0, y_0, A_1' en A_2' uit:

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = X + \dfrac{B}{2C} \sin(2\gamma - \beta) \\ y_0 = Y + \dfrac{B}{2C} \cos(2\gamma - \beta) \end{array}\right\} \ldots\ldots (48)$$

$$\left.\begin{array}{l} A_1' = A_1 - \dfrac{B^2}{4C} \sin(2\gamma - 2\beta) \\ A_2' = A_2 - \dfrac{B^2}{4C} \cos(2\gamma - 2\beta) \end{array}\right\} \ldots\ldots (49)$$

In de formules (48) zijn X en Y de coördinaten van het middelpunt van den omgeschreven cirkel (zie form. 42); x_0 en y_0 zijn de coördinaten ten opzichte van een willekeurig punt als oorsprong. De waarden A_1 en A_2 formule (47) gelden voor hetzelfde middelpunt; A'_1 en A'_2 voor het punt x_0 y_0, waarvoor B_1 en B_2 nul worden.

§ 18. Vergelijken wij thans de beide methoden met elkander.

Bij de methode van de parallelle verschuiving is de bepaling van de correctiën voor de coördinaten zeer eenvoudig. Bij de methode van de conforme overbrenging is de bepaling van die correctiën iets, doch niet veel omslachtiger. Meestal heeft men echter niet alleen de correctiën voor de coördinaten noodig, maar wil men ook de correctiën kennen, die de zijden en hare logarithmen, die de hoeken en de logarithmen hunner sinussen en die de richtingen der zijden ondergaan. Al deze correctiën worden bij de nieuwe methode langs eenvoudiger weg gevonden dan bij de oude. Bij de nieuwe methode worden zij in de kaart zelve gevonden, bij de andere in eene hulpfiguur. Daarbij is het noodig in die hulpfiguur lijnen te trekken, evenwijdig aan de zijden van het net, en dit kan vooral bij korte zijden aanleiding geven tot fouten.

Behalve dit is het aantal aflezingen, dat men in de figuur moet doen, bij de methode der parallelle verschuiving grooter dan bij de nieuwe methode. Bij de eerste moet men voor iedere zijde 3 aflezingen doen, dus bij het net fig. 1. $3 \times 49 = 147$; bij de nieuwe methode voor ieder hoekpunt 3 en voor iederen driehoek 1; dus voor hetzelfde net $3 \times 23 + 27 = 96$; hun aantal verhoudt zich dus hier als 3 tot 2. Wil men de relatieve vergrootingen der zijden niet hebben, maar alleen de correctiën van hare logarithmen, dan heeft men bij de eerste methode 49, bij de tweede 23 aflezingen minder, dus in het geheel bij de eerste $2 \times 49 = 98$, bij de tweede $2 \times 23 + 27 = 73$.

Vergelijken wij de veranderingen, die het net door de aansluiting volgens de twee methoden ondergaat, dan blijkt het, dat bij de methode van de parallelle verschuiving de hoe-

ken, waar het vooral op aankomt, omdat het deze elementen zijn, die door directe waarneming gevonden worden, veel grootere correctiën ondergaan dan bij de nieuwe methode. Bij het regelmatige net van fig. 10 zijn die correctiën juist n-maal zoo groot. De som van de vierkanten van die correctiën is bij de eerste methode $n^2 S$, bij de tweede slechts S. Tevens is bij de laatste methode deze som zoo klein als slechts mogelijk is.

Ten einde ook bij een minder regelmatig net de veranderingen met elkander te kunnen vergelijken, hebben wij het net, dat hiervoor herhaalde malen als voorbeeld gediend heeft en dat in fig. 1, 12 en 13 is voorgesteld, ook volgens de methode der kleinste vierkanten berekend.

De drie hier achter gevoegde tabellen bevatten de uitkomsten dier berekeningen. De eerste bevat de voorloopige coördinaten der hoekpunten en de correctiën daarvan. De tweede de lengten der zijden en hare hoeken met de y-as, benevens de relatieve vergrootingen en de verdraaiingen der zijden. De derde bevat de hoeken met de correctiën daarvan.

De lengten der zijden, de hoeken met de y-as en de hoeken van de driehoeken zijn gegeven tot in meters resp. minuten, hetgeen voor het overzicht voldoende is; op de nauwkeurige waarden daarvan komt het hier natuurlijk niet aan. Het blijkt daaruit, dat de lengten der zijden varieeren tusschen 694 en 2353 meter en de hoeken tusschen 17° 16′ en 121° 15′. De grootste van de driehoeken heeft een inhoud van 206, de kleinste van 33 hectaren.

Uit tabel III blijkt nu, dat bij de methode der parallelle verschuiving de correctiën voor de hoeken opklimmen tot 45″,2 bij de methode der kleinste vierkanten slechts tot 10″,5 en bij de nieuwe methode tot 12″,5.

De som van de vierkanten van de correctiën der hoeken is volgens de methode der kleinste vierkanten 1813. Volgens de methode der parallelle verschuiving 57881 of 32-maal zoo veel. Volgens de nieuwe methode is zij 2788 *) of slechts ruim *anderhalf* maal het kleinst mogelijk bedrag.

*) Bij de aansluiting ondergaan de hoeken van den aansluitingsdriehoek

Ten einde den aard der vervormingen, die het net ondergaat, te leeren kennen, dient men vooral te letten op de teekens van de vergrootingen en de verdraaiingen der zijden, en dan blijkt uit tabel II dat, bij de methode der kleinste vierkanten, de vergrootingen positief zijn voor het grootste gedeelte van het net. Alleen voor de lijnen in de buurt van het punt *B* zijn de vergrootingen negatief. Juist hetzelfde heeft plaats bij de nieuwe methode; daarin zijn de vergrootingen negatief voor alle zijden, waarvan het midden gelegen is tusschen de lijn gM en het punt *B* fig. 13. De verdraaiingen der zijden zijn bij de methode der kleinste vierkanten alleen positief bij de zijden in de buurt van het punt *A*. Bij onze nieuwe methode heeft volkomen hetzelfde plaats; alle zijden waarvan het midden gelegen is tusschen de lijn Mf en het punt *A* ondergaan eene positieve draaiing. De methode der parallelle verschuiving stemt, wat de vervormingen betreft, in het geheel niet overeen met de methode der kleinste vierkanten; de vergrootingen en verdraaiingen alleen afhankelijk zijnde van de richtingen der zijden, zoo verdeelen de positieve en negatieve teekens dier grootheden zich over het geheele net.

Ook wat de teekens van de correctiën der hoeken betreft, stemt de nieuwe methode beter dan de methode der parallelle verschuiving met de methode der kleinste vierkanten overeen. Neemt men al de hoeken om één punt, dan hebben wij vroeger reeds gezien, dat bij de parallelle verschuiving die hoeken in vier groepen verdeeld worden; in twee daarvan zijn de teekens positief in de twee andere negatief. Bij de nieuwe methode hebben wij gezien, dat die hoeken slechts in twee groepen verdeeld worden. De uitkomsten in tabel III bevestigen dit, en gaat men daarin na de correctiën volgens de methode der kleinste vierkanten, dan vindt men dat deze, wat het teeken betreft, ook slechts in twee groepen verdeeld worden.

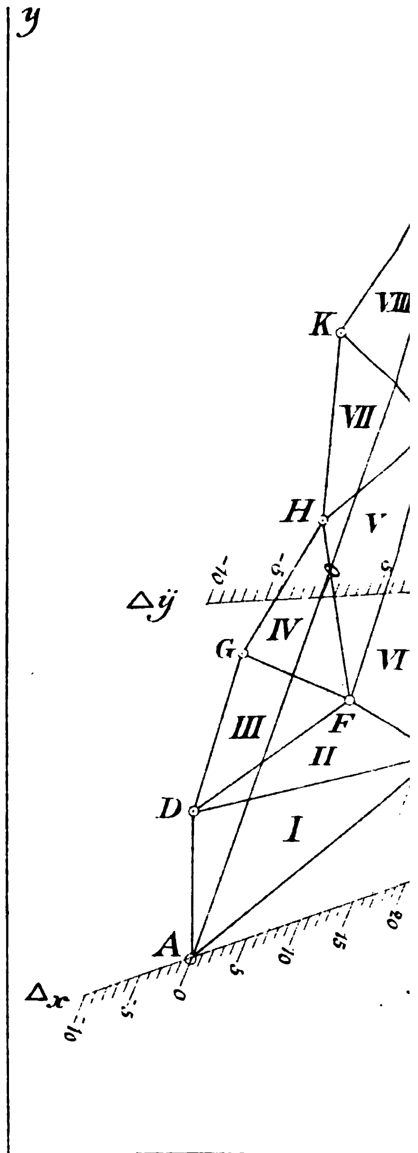
Een enkel voorbeeld moge dit nader toelichten. Kiezen

---

de veranderingen: — 12″,69, + 41″,84 en — 29″,15. De som van de vierkanten hiervan is 2762. De som van de vierkanten van de correctiën der hoeken volgens de nieuwe methode komt dus ook bij dit zeer onregelmatige net op weinig na hiermede overeen (zie: § 14).

TABEL II.

Zijden.	Lengten der zijden.	Vergrootingen in 100000ste deelen.			Hoeken met de IJ as.	Verdraaiingen der zijden.		
		C.O.	Kl. V.	P.V.		C. O.	Kl V.	P. V.
AD	987	+ 5,4	— 2,3	— 4,6	1°23′	+ 25″,4	+ 15″,0	— 10″,
AE	2147	+ 7,6	+ 5,2	+ 11,5	50°17′	+ 17″,8	+ 18″,5	— 0″,
DE	1673	+ 5,8	+ 7,3	+ 16,8	76°40′	+ 14″,0	+ 10″,2	— 17″,
DF	1292	+ 4,1	+ 4,6	+ 12,7	53°55′	+ 14″,9	+ 6″,4	— 1″,
FE	694	+ 6,3	+ 12,3	+ 6,4	122°44′	+ 7″,2	+ 3″,3	— 42″,
DG	1106	+ 2,2	+ 3,9	— 0,9	16°32′	+ 16″,6	+ 5″,9	— 1″,
GF	788	+ 2,7	+ 4,9	+ 10,3	112°18′	+ 9″,8	+ 4″,4	— 40″,
HF	1241	+ 2,1	+ 3,9	— 5,5	171° 9′	+ 4″,7	+ 1″,9	— 18″,
GH	1072	+ 0,0	+ 3,1	+ 4,0	30° 8′	+ 6″,1	+ 3″6	+ 2″,
FI	1967	+ 2,0	+ 4,1	— 0,7	17°15′	— 1″,0	— 0″,4	— 0″,
HI	1012	— 0,6	+ 3,1	+ 11,4	49°54′	— 4″,8	— 2″,3	— 0″,
HK	1294	— 3,0	+ 1,2	— 3,9	4°53′	— 4″,6	— 3″,2	— 8″,
KI	920	— 2,8	+ 1,9	+ 2,1	133°48′	— 9″,9	— 7″,4	— 41″,
IL	1223	— 0,2	+ 0,9	+ 11,4	49°55′	— 16″,6	— 16″,4	— 0″,
KB	1870	— 6,2	— 5,8	+ 5,4	33°55′	— 19″,4	— 8″,9	+ 3″,2
IB	2222	— 3,8	— 3,8	— 2,8	9°50′	— 19″,6	— 14″,0	— 4″,9
BL	1508	— 3,6	— 5,9	— 4,7	158°22′	— 26″,1	— 20″,9	— 28″,6
BN	1596	— 4,1	— 5,7	+ 15,2	95°30′	— 34″,7	— 29″,1	— 32″,1
LN	1620	— 0,5	— 2,5	+ 7,7	39°36′	— 31″,7	— 25″,3	+ 2″,8
NO	1266	+ 1,4	— 2,7	— 4,9	178°34′	— 35″,7	— 30″,7	— 12″,7
NP	824	+ 1,1	— 6,8	+ 0,1	139°33′	— 40″,0	— 37″,8	— 39″,8
OP	813	+ 3,5	+ 1,6	+ 7,1	38°15′	— 35″,5	— 37″,9	+ 3″,0
PQ	1064	+ 5,8	+ 4,8	+ 8,6	117° 4′	— 41″,6	— 42″,4	— 42″,2
OQ	1459	+ 6,1	+ 10,4	+ 16,7	83°56′	— 37″,4	— 38″,0	— 23″,4
QR	1346	+ 11,0	+ 4,4	— 4,9	179° 7′	— 38″,6	— 40″,0	— 12″,3


y
K
VIII
VII
H
V
Δy
-10
-5
5
IV
G
VI
F
III
II
D
I
A
Δx
-10
-5
0
5
10
15
20



TABEL II. (VERVOLG).

Zijden.	Lengten der zijden.	Vergrootingen in 100000ste deelen.			Hoeken met de IJ as.	Verdraaiingen der zijden.		
		C.O.	Kl. V.	P.V.		C. O.	Kl. V.	P. V.
OR	1894	+ 8,7	+ 7,7	+ 4,1	129° 0′	— 32″,5	— 32″,2	— 42″,7
SO	1549	+ 6,4	+ 6,5	— 3,6	6°24′	— 24″,9	— 27″,3	— 7″,1
LO	1064	+ 1,9	+ 0,6	+ 16,0	90°55′	— 27″,2	— 25″,8	— 28″,8
LS	1794	+ 4,5	+ 5,1	— 3,0	150°12′	— 20″,9	— 20″,6	— 34″,3
IS	1982	+ 4,3	+ 5,0	+ 10,1	112°50′	— 14″,4	— 14″,7	— 41″,0
IE	2254	+ 3,8	+ 5,9	— 4,8	179°59′	— 1″,9	— 4″,2	— 28″,1
ES	2353	+ 8,5	+ 9,3	+ 11,7	50°54′	— 6″,1	— 9″,7	— 0″,4
ET	1371	+ 10,7	+ 11,4	+ 15,1	96° 9′	+ 1″,7	— 9″,1	— 32″,5
TS	1696	+ 11,2	+ 9,3	— 1,1	5°51′	— 10″,8	— 13″,1	— 1″,5
TU	1318	+ 15,8	+ 13,7	+ 16,1	90°33′	— 8″,1	— 13″,9	— 28″,5
SU	1853	+ 13,5	+ 10,5	— 3,6	152°33′	— 15″,8	— 19″,2	— 32″,8
UV	896	+ 18,1	+ 15,8	+ 10,0	45°44′	— 17″,9	— 20″,5	+ 1″,5
SV	1810	+ 13,5	+ 10,7	+ 5,8	124°16′	— 20″,6	— 24″,6	— 42″,9
SR	1681	+ 11,2	+ 9,4	+ 16,9	78° 3′	— 26″,2	— 28″,7	— 18″,7
VR	1375	+ 15,8	+ 12,5	— 3,6	6°13′	— 28″,2	— 29″,3	— 7″,2
VW	1693	+ 18,1	+ 14,5	+ 10,3	46°47′	— 31″,6	— 29″,8	+ 1″,1
RW	1105	+ 15,8	+ 13,9	+ 13,9	100°49′	— 37″,2	— 34″,8	— 35″,5
RIJ	1686	+ 15,2	+ 15,3	+ 16,3	70° 8′	— 42″,0	— 41″,4	— 12″,4
QIJ	1782	+ 12,7	+ 13,1	+ 9,1	115°42′	— 46″,8	— 47″,7	— 41″,8
WIJ	927	+ 17,6	+ 19,3	+ 5,0	32°39′	— 45″,4	— 41″,3	+ 3″,2
WZ	847	+ 19,8	+ 22,6	+ 15,4	94°37′	— 43″,6	— 43″,1	— 31″,4
IJZ	916	+ 19,2	+ 20,0	— 4,6	157°54′	— 48″,4	— 47″,6	— 29″,0
IJC	1682	+ 21,2	+ 25,5	+ 6,6	122°20′	— 52″,4	— 55″,8	— 42″,9
ZC	1078	+ 23,4	+ 30,5	+ 15,7	92°42′	— 50″,6	— 50″,0	— 30″,1



TABEL II. (VERVOLG).

Zijden.	Lengten der zijden.	Vergrootingen in 100000ste deelen.			Hoeken met de IJ as.	Verdraaiingen der zijden.		
		C.O.	Kl. V.	P.V.		C. O.	Kl. V.	P. V.
OR	1894	+ 8,7	+ 7,7	+ 4,1	129° 0′	— 32″,5	— 32″,2	— 42″,7
SO	1549	+ 6,4	+ 6,5	— 3,6	6°24′	— 24″,9	— 27″,3	— 7″,1
LO	1064	+ 1,9	+ 0,6	+ 16,0	90°55′	— 27″,2	— 25″,8	— 28″,8
LS	1794	+ 4,5	+ 5,1	— 3,0	150°12′	— 20″,9	— 20″,6	— 34″,3
IS	1982	+ 4,3	+ 5,0	+ 10,1	112°50′	— 14″,4	— 14″,7	— 41″,0
IE	2254	+ 3,8	+ 5,9	— 4,8	179°59′	— 1″,9	— 4″,2	— 28″,1
ES	2353	+ 8,5	+ 9,3	+ 11,7	50°54′	— 6″,1	— 9″,7	— 0″,4
ET	1371	+ 10,7	+ 11,4	+ 15,1	96° 9′	+ 1″,7	— 9″,1	— 32″,5
TS	1696	+ 11,2	+ 9,3	— 1,1	5°51′	— 10″,8	— 13″,1	— 1″,5
TU	1318	+ 15,8	+ 13,7	+ 16,1	90°33′	— 8″,1	— 13″,9	— 28″,5
SU	1853	+ 13,5	+ 10,5	— 3,6	152°33′	— 15″,8	— 19″,2	— 32″,8
UV	896	+ 18,1	+ 15,8	+ 10,0	45°44′	— 17″,9	— 20″,5	+ 1″,5
SV	1810	+ 13,5	+ 10,7	+ 5,8	124°16′	— 20″,6	— 24″,6	— 42″,9
SR	1681	+ 11,2	+ 9,4	+ 16,9	78° 3′	— 26″,2	— 28″,7	— 18″,7
VR	1375	+ 15,8	+ 12,5	— 3,6	6°13′	— 28″,2	— 29″,3	— 7″,2
VW	1693	+ 18,1	+ 14,5	+ 10,3	46°47′	— 31″,6	— 29″,8	+ 1″,1
RW	1105	+ 15,8	+ 13,9	+ 13,9	100°49′	— 37″,2	— 34″,8	— 35″,5
RIJ	1686	+ 15,2	+ 15,3	+ 16,3	70° 8′	— 42″,0	— 41″,4	— 12″,4
QIJ	1782	+ 12,7	+ 13,1	+ 9,1	115°42′	— 46″,8	— 47″,7	— 41″,8
WIJ	927	+ 17,6	+ 19,3	+ 5,0	32°39′	— 45″,4	— 41″,3	+ 3″,2
WZ	847	+ 19,8	+ 22,6	+ 15,4	94°37′	— 43″,6	— 43″,1	— 31″,4
IJZ	916	+ 19,2	+ 20,0	— 4,6	157°54′	— 48″,4	— 47″,6	— 29″,0
IJC	1682	+ 21,2	+ 25,5	+ 6,6	122°20′	— 52″,4	— 55″,8	— 42″,9
ZC	1078	+ 23,4	+ 30,5	+ 15,7	92°42′	— 50″,6	— 50″,0	— 30″,1

TABEL III.

Driehoeken.	Hoekpunten.	Hoeken.	Correctiën der hoeken.		
			C. O.	Kl. V.	P. V.
I	A	48° 54′	— 7″,7	+ 3″,5	+ 10″,4
	D	104° 43′	+ 11″,4	+ 4″,8	+ 6″,9
	E	26° 23′	— 3″,7	— 8″,3	— 17″,4
II	D	22° 45′	— 0″,9	+ 3″,9	— 15″,7
	E	46° 4′	— 6″,8	— 7″,0	— 25″,3
	F	111° 11′	+ 7″,7	+ 3″,1	+ 41″,0
III	D	37° 23′	— 1″,7	+ 0″,5	— 0″,7
	F	58° 23′	— 5″,1	— 2″,0	— 39″,0
	G	84° 14′	+ 6″,8	+ 1″,5	+ 39″,7
IV	F	58° 51′	— 5″,5	— 2″,5	+ 22″,3
	G	82° 10′	+ 3″,8	+ 0″,8	— 43″,8
	H	38° 59′	+ 1″,7	+ 1″,7	+ 21″,5
V	F	26° 6′	— 5″,4	— 2″,2	+ 17″,7
	H	121° 15′	+ 9″,1	+ 4″,1	— 18″,6
	I	32° 39′	— 3″,8	— 1″,9	+ 0″,9
VI	E	57° 15′	— 9″,1	— 7″,4	+ 31″,2
	F	105° 29′	+ 8″,3	+ 3″,6	— 42″,0
	I	17° 16′	+ 0″,9	+ 3″,8	+ 10″,8
VII	H	45° 1′	— 0″,2	+ 0″,9	+ 8″,1
	I	83° 54′	— 5″,2	— 5″,1	— 41″,7
	K	51° 5′	+ 5″,4	+ 4″,2	+ 33″,6

TABEL III. (Vervolg.)

Driehoeken.	Hoekpunten.	Hoeken.	Correctiën der hoeken.		
			C. O.	Kl. V.	P. V.
VIII	B	24° 5′	+ 0″,2	+ 5″,1	+ 8″,1
	I	56° 2′	— 9″,7	— 6″,6	+ 36″,9
	K	99° 53′	+ 9″,5	+ 1″,5	— 45″,0
IX	B	31° 28′	+ 6″,5	+ 6″,9	+ 23″,8
	I	40° 5′	+ 3″,0	— 2″,3	+ 4″,8
	L	108° 27′	— 9″,5	— 4″,5	— 28″,6
X	B	62° 52′	+ 8″,5	+ 8″,2	+ 3″,4
	L	61° 14′	— 5″,5	— 4″,4	+ 31″,5
	N	55° 54′	— 3″,0	— 3″,9	— 34″,9
XI	L	51° 19′	+ 4″,5	— 0″,5	— 31″,6
	N	41° 2′	+ 4″,0	+ 5″,4	+ 15″,6
	O	87° 39′	— 8″,5	— 4″,9	+ 16″,1
XII	N	39° 1′	+ 4″,3	+ 7″,1	+ 27″,1
	O	39° 41′	+ 0″,2	— 7″,2	+ 15″,7
	P	101° 18′	— 4″,5	+ 0″,1	— 42″,9
XIII	O	45° 41′	— 1″,9	— 0″,1	— 26″,4
	P	101° 11′	+ 6″,1	+ 4″,5	+ 45″,2
	Q	33° 8′	— 4″,3	— 4″,4	— 18″,8
XIV	O	45° 4′	+ 4″,9	+ 5″,8	— 19″,3
	Q	84° 49′	+ 1″,3	+ 2″,0	— 11″,1
	R	50° 7′	— 6″,1	— 7″,8	+ 30″,4

TABEL III. (Vervolg.)

Driehoeken.	Hoekpunten.	Hoeken.	Correctiën der hoeken.		
			C. O.	Kl. V.	P. V.
XV	O	57° 24′	+ 7″,6	+ 4″,9	+ 35″,6
	R	50° 57′	— 6″,3	— 3″,5	— 24″,0
	S	71° 39′	— 1″,3	— 1″,4	— 11″,6
XVI	L	59° 17′	+ 6″,3	+ 5″,2	— 5″,5
	O	84° 31′	— 2″,3	+ 1″,5	— 21″,7
	S	36° 12′	— 4″,0	— 6″,7	+ 27″,2
XVII	I	62° 55′	+ 2″,3	+ 1″,7	— 41″,0
	L	79° 43′	+ 4″,2	+ 4″,2	+ 34″,3
	S	37° 22′	— 6″,9	— 5″,9	+ 6″,7
XVIII	E	50° 55′	— 4″,2	— 5″,5	+ 11″,2
	T	67° 9′	+ 12″,5	+ 10″,5	+ 29″,4
	S	61° 56′	— 8″,3	— 5″,0	— 40″,6
XIX	E	45° 15′	+ 7″,8	+ 0″,5	— 32″,1
	S	35° 3′	+ 4″,7	+ 3″,5	+ 1″,1
	T	99° 42′	— 12″,5	— 4″,0	+ 31″,0
XX	S	43° 18′	+ 5″,0	+ 6″,1	+ 31″,2
	T	74° 42′	+ 2″,7	— 0″,8	— 27″,0
	U	62° 0′	— 7″,8	— 5″,2	— 4″,3
XXI	S	28° 17′	+ 4″,8	+ 5″,4	+ 10″,2
	U	73° 11′	— 2″,0	— 1″,3	+ 34″,2
	V	78° 32′	— 2″,7	— 4″,1	— 44″,4

TABEL III. (Vervolg.)

Driehoeken.	Hoekpunten.	Hoeken.	Correctiën der hoeken. C. O.	Kl. V.	P. V.
XXII	R	71° 50′	+ 2″,0	+ 0″,6	— 11″,5
	S	46° 13′	+ 5″,6	+ 4″,1	— 24″,3
	V	61° 57′	— 7″,6	— 4″,7	+ 35″,8
XXIII	R	85° 24′	+ 9″,0	+ 5″,5	+ 28″,3
	V	40° 34′	— 3″,4	— 0″,6	+ 8″,3
	W	54° 2′	— 5″,6	— 4″,9	— 36″,6
XXIV	R	30° 41′	+ 4″,8	+ 6″,6	— 23″,0
	W	111° 50′	— 8″,2	— 6″,5	+ 38″,6
	IJ	37° 29′	+ 3″,4	— 0″,1	— 15″,6
XXV	Q	63° 25′	+ 8″,2	+ 7″,7	+ 29″,5
	R	71° 1′	— 3″,3	— 1″,4	— 0″,1
	IJ	45° 34′	— 4″,9	— 6″,3	— 29″,4
XXVI	W	61° 58′	+ 1″,8	— 1″,8	— 34″,6
	IJ	54° 45′	+ 3″,0	+ 6″,3	+ 32″,1
	Z	63° 17′	— 4″,8	— 4″,5	+ 2″,5
XXVII	C	29° 38′	— 1″,8	— 5″,8	— 12″,8
	IJ	35° 34′	+ 4″,0	+ 8″,2	+ 13″,9
	Z	114° 48′	— 2″,2	— 2″,4	— 1″,1

Sommen van de vierkanten van de correctiën der hoeken:

Conforme overbrenging	2788
Kleinste vierkanten	1813
Parallelle verschuiving	57881

KOPIJ VAN EENE BEREKENING

VAN DEN

UITSLAG DER GEDANE WEGINGEN EN ONDERLINGE VERGELIJKINGEN

VAN DEN PLATINA STANDAARD VAN HET NED. POND, EN VAN TWEE KOPEREN STANDAARDS, MET HET PROTOTYPE VAN HET KILOGRAM TE PARIJS, IN HET JAAR 1838 TE PARIJS GEDAAN DOOR EENE DAARTOE BENOEMDE COMMISSIE, BESTAANDE UIT WIJLEN DE HEEREN LIPKENS, UYLENBROEK EN LOBATTO.

MEDEGEDEELD DOOR

F. J. STAMKART.

PLATINA STANDAARD.

1838. 22 *October*. Barom. 765,5 mm., Therm. 16° C.

Vol. protot. bij 0° = 48615 cub. mm.		Cub. uitzetting platina van 0° tot 16° C. = 0.00041.
» plat. stand. — = 46938 »		
Verschil in vol. bij 0° = 1677 cub. mm.		
» bij 16° = 1677.7 »		

Volgens de tafel van v. d. TOORN is het gewigt van 1 cub. centim. lucht bij 765,5 mm. en 16° C. = 1,231 mgr. } Dus zal het gewigt van het vol. meerder verplaatste lucht bedragen 1,6777 × 1,231 = 2,065 mgr.

In de lucht zou alzoo moeten zijn; doch volgens	plat.	stand.	=	Prot.	+ 2,065	mgr.
het gemiddelde uit 10 wegingen is.	»	»	=	»	+ 2,11	»
Derhalve zal in het luchtledige . . . . zijn.	»	»	=	»	+ 0,045	»

---

23 *October*. Barom. 762 mm., Therm. 16° C.

Gewigt cub. centim. lucht bij 762 mm. en 16° = 1,225.

Gew. vol. meerder verpl. lucht = 1,6777 × 1,225 = 2,055 mgr.

In de lucht zou derhalve	plat.	stand.	=	Prot.	+ 2,055	mgr.;
doch volgens het gemiddelde uit 20 wegingen is.	»	»	=	»	+ 2,23	»
Dus zal in het luchtledige zijn.	»	»	=	»	+ 0,175	»

---

24 *October*. Barom. 758,5 mm., Therm. 15° C.

Gewigt cub. centim. lucht bij 758,5 en 15° = 1,225 mm.

Gewigt vol. meerder verpl. lucht = 16777 × 1,225 = 2,055 mgr.

In de lucht zou derhalve	plat.	stand.	=	Prot.	+ 2,055	mgr.;
doch volgens het gemiddelde uit 20 wegingen . .	»	»	=	»	+ 2,21	»
Dus in het luchtledige . .	»	»	=	»	+ 0,155	»

---

6 *November*. Barom. 756 mm., Therm. 13° C.

Gewigt cub. centim. lucht bij 756 mm. en 13° C. = 1,229 mm.

Gewigt vol. meerder verpl. lucht = 1,6777 × 1,229 = 2,062 mgr.

In de lucht zou dus plat. stand. = Prot. + 2,062 mgr.;
maar volgens het gemid-
delde uit 20 wegingen is » » = » + 2,23 »
Dus in het luchtledige » » = » + 0,168 »

Volgens het gemiddelde uit de 70 wegingen, komt er:

Plat. Stand. = Prot. + 0,136 mgr. [NB. moet zijn 0,149].

KOPEREN KILOGRAM B.

8 *November*. Barom. 754 mm., Therm. 14° C.

Vol. kilogr. B } bij 0° = 122379 cub. mm.
» prot. } bij 0° = 48615 » »

Verschil in vol. bij 0° = 73764 » »
Verschil in vol. bij 14° = 73843 » »

Uitzetting van 0 tot 14° C.

Vol. kil. B = 122379 × 0,000789 = 96,53
» prot. = 48615 × 0,00036 = 17,49
Verschil in uitzetting = 79 cub. mm.

Gew. cub. cent. lucht bij 754 mm. en 14° = 1,222 mgr.

Gew. vol. meerder verpl. lucht = 73,843 × 1,222 = 90,24 mgr.

In de lucht zou dus kil. B = Prot. — 90,24 mgr.; doch
volgens het gemiddel-
de uit 20 wegingen. . » » = » — 90,03 »
Dus in het luchtledige » » = » + 0,21 »

KOPEREN KILOGRAM C.

9 *November*. Barom. 748 mm., Therm. 14° C.

Vol. kilogr. C } bij 0° = 121677 cub. mm
» prot. } bij 0° = 48615 » »

Verschil in vol. bij 0° = 73062 » »
Verschil in vol. bij 14° = 73140 » »

Uitzetting van 0 tot 14° C.

Vol. kil. C = 121677 × 0,000789 = 95,98
» prot. = 48615 × 0,00036 = 17,58
Verschil in uitzetting = 78 cub. mm.

Gewigt 1 cub. centim. lucht bij 748 mm. en 14° = 1,212 mgr.

Gew. vol. meerder verpl. lucht = 73,14 × 1,212 = 88,65 mgr.

In de lucht zou dus kil.	C	=	Prot.	—	88,65	mgr.
Gem. uit 20 wegingen	»	» =	»	—	89,87	»
Dus in het luchtledige	»	» =	»	—	1,22	»

Ergo Kil. B = Kil. C + 1,43 mgr.

VERGELIJKING VAN HET KOPEREN KILOGR. B MET DEN PLATINA STANDAARD [TE LEIDEN].

1839. 20 *Januarij*. Barom. 761,5 mm., Therm. 5° C.

Vol. kil. B bij 0°	=	122379	cub.	mm.
» plat. stand. »	=	46938	»	»
Verschil in vol. »	=	75441	»	»
Verschil in vol. bij 5°	=	75469	»	»

Uitzetting van 0 tot 5° C.

Vol. kilogr. B = 122379 × 0,000282 = 34,47
» plat. stand. = 46938 × 0,000128 = 6,03
Verschil in uitzetting = 28 cub. mm.

Gew. 1 cub. centim. lucht bij 761,5 mm. en 5° = 1,277 mgr.

Gewigt vol. meerder verpl. lucht = 75,469 × 1,277 = 96,37 mgr.

In de lucht zou dus kil.	B	=	Plat.	Stand.	—	96,37	mgr.
Gem. uit 11 wegingen	»	» =	»	»	—	95,63	»
Dus in het luchtledige	»	» =	»	»	+	0,74	»

[VERVOLG VERGELIJKING KILOGR. B MET DEN PLATINA STAND.].

1839. 23 *Januarij*. Barom. 775,5 mm., Therm. 5° C.

Vol. kil. B. — Vol. plat. stand. bij 5° = 75469 cub. mm.

Gew. cub. centim. lucht bij 775,5 mm. en 5° = 1,299 mgr.	Gew. vol. meerder verpl. lucht = 75,469 × 1,299 = 98,03 mgr.

In de lucht zou dus kil.	B	=	Plat.	Stand.	— 98,03	mgr.
Gem. uit 10 wegingen	»	=	»	»	— 97,5	»
Dus in het luchtledige	»	=	»	»	+ 0,53	»

---

26 *Januarij*. Barom. 767,4 mm., Therm. 5° C.

Vol. kil. B. — Vol. plat. stand. bij 5° = 75469 cub. mm.

Gew. 1 cub. centim. lucht bij 767,4 mm. en 5° = 1,286 mgr.	Gew. vol. meerder verpl. lucht = 75,469 × 1,286 = 97,05 mgr.

In de lucht zou dus kil.	B	=	Plat.	Stand.	— 97,05	mgr.
Gem. uit 10 wegingen	»	=	»	»	— 96,73	»
Dus in het luchtledige	»	=	»	»	+ 0,32	»

Gemiddeld uit 31 wegingen:

Kil. B = Plat. Stand. + 0,53 mgr. [± 0,12].

VERGELIJKING VAN HET KOPEREN KILOGR. C MET DEN PLATINA STANDAARD.

20 *Januarij*. Barom. 762 mm., Therm. 5° C.

Vol. kilogr. C bij 0°	=	121677	cub.	mm.	verschil in uitzetting van 0 tot 5° C. evenals bij B = 28 cub. mm.
» plat. stand. »	=	46938	»	»	
Verschil vol. bij 0°	=	74739	»	»	
» vol. bij 5°	=	74767	»	»	

Gew. 1 cub. centim. lucht bij 762 mm. en 5⁰ = 1,277 mgr.	Gew. vol. meerder verpl. lucht = 74,767 × 1,277 = 95,48 mgr.

In de lucht zou dus	kil.	C	=	Plat. Stand.	— 95,48	mgr.
Gem. uit 10 wegingen	»	»	=	»	»	— 95,6	»
Dus in het luchtledige	»	»	=	»	»	— 0,12	»

---

23 *Januarij*. Barom. 775,5 mm., Therm. 5⁰ C.

Vol. kil. C. — Vol. plat. stand. bij 5° = 74767 cub. mm.

Gewigt 1 cub. centim. lucht bij 775,5 mm. en 5⁰ = 1,299 mgr.	Gew. vol. meerder verpl. lucht = 74,767 × 1,299 = 97,12 mgr.

In de lucht zou dus	kil.	C	=	Plat. Stand.	— 97,12	mgr.
Gem. uit 20 wegingen	»	»	=	»	»	— 98,6	»
Dus in het luchtledige	»	»	=	»	»	— 1,48	»

Gemiddeld uit 30 wegingen:

Kil. C = Plat. Stand. — 0,80 mgr. = Prot. — 0,66
[moet zijn — 1,02 en — 0,88]
en Kil. B = Plat. Stand. + 0,53 mgr. = Prot. + 0,67
dus Kil. B = Kil. C + 1,33 mgr. [moet zijn 1,55]
te Parijs » » = » » + 1,43.

Onderlinge vergelijking van de Kilogr. B en C.

26 *Januarij*. Barom. 767,4 mm., Therm. 5⁰ C.

Vol. kilogr. B bij 0° = 122379 cub. mm.
» C » = 121677 »

Verschil in vol. bij 0⁰ = 702 cub. mm.

De uitzetting voor 5⁰ is te gering om hier van invloed te zijn.

Gew. cub. centim. lucht bij 767,4 mm. en 5° = 1,286 mgr.	Gew. vol. meerder verpl. lucht = 0,702 × 1,286 = 0,9 mgr.

In de lucht zou dus	kil.	B	=	Kil.	C	— 0,9 mgr.
Gem. uit 9 wegingen	»	»	=	»	»	+ 0,37 »
Dus in het luchtledige	»	»	=	»	»	+ 1,27 »

---

11 *Februarij.* Barom. 776,7 mm., Therm. 6° C.

Vol. kil. B. — Vol. kil. C bij 0° = 702 cub. mm.

Gew. cub. centim. lucht bij 776,7 mm. en 6° C. = 1,296 mgr.	Gew. vol. meerder verpl. lucht = 0,702 × 1,296 = 0,91 mgr.

In de lucht zou dus	kilogr.	B	=	Kil.	C	— 0,91 mgr.
Gem. uit 10 wegingen	»	»	=	»	»	+ 0,25 »
Dus in het luchtledige	»	»	=	»	»	1,16 »

Gemiddeld uit 19 wegingen:

Kilogr. B = Kil. C + 1,21 mgr.

OVERZIGT.

	te Parijs.		*te Leiden.*
	mgr.		mgr.
	Kil. B = Prot. + 0,21		Kil. B = Prot. + 0,67
	» C = » — 1,22		» C = » — 0,66 [— 0,88]
dus	» B = Kil. C + 1,43	dus	» B = kil. C + 1,33 [+ 1,54]

Volgens onderlinge vergelijking: Kil. B = Kil. C + 1,21.

Dit opstel is door den Heer LOBATTO in de maand October 1856 ter inzage aangeboden aan de Commissie uit de Koninklijke Akademie van Wetenschappen, belast met het ma-

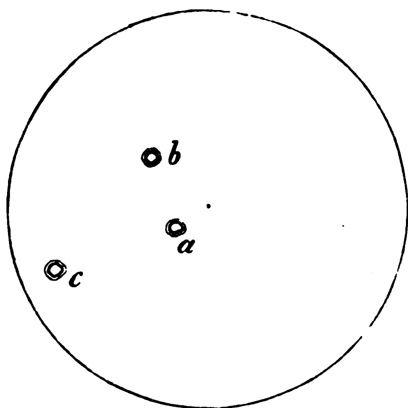
ken van kopijen van de Nederlandsche Standaards, bestaande uit de Heeren STAMKART, VAN REES, LOBATTO en OUDEMANS (de Heer VAN REES afwezig) en gekopiëerd door mij den 30sten October 1856 te Amsterdam.

F. J. STAMKART.

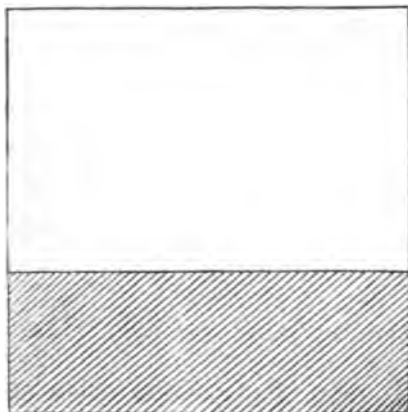
BESCHRIJVING VAN HET KILOGRAM UIT LEIDEN.

Kilogram B, cilindervormig; middell. 53,8 mm. } zeer nabij.
hoogte 53,8 »

Op het bovenvlak vertoonen zich 3 ongeveer ronde vlekken van eene lichtroodkoperachtige kleur, van 1,2 à 1,3 mm. middellijn.; *a* staat 5 à 6 mm. uit het midden; *c* 4½ mm. van den rand af en de onderlinge afstanden der vlekken zijn:



ab = 10,1, *ac* = 16,7, *bc* = 20,6 mm.



Op den omtrek vertoont zich eene donkere moet, ter hoogte zoo ver als het stuk in het fluweel van den bodem van het kistje staat, dat is ongeveer 17½ mm. diep.

Op deze moet kan men door een mikroskoop zeer kleine groenachtige vlekjes onderscheiden, meest in de diepten, die van de punt des bijtels zijn over-

gebleven; het schijnt dat deze plekjes kleinekoperverzuursels zijn, een gevolg van vochtigheid.

Op den bodem zijn voorts nog twee lichtgroene plekjes te zien op een onderlingen afstand van 12 mm.

Het kilogram C van het Ministerie vertoont dezelfde moet van onderen, maar geene vlekken boven of onder, en ik meen ook niet de kleine groene plekjes bemerkt te hebben.

Amsterdam 28 Julij 1857.

GEWIGTEN EN MATEN

TEN DIENSTE VAN HET

IJKWEZEN IN NEDERLANDSCH OOST-INDIË

ONDERZOCHT IN DE JAREN 1866—1868 DOOR DE COMMISSIE VOOR STANDAARDMETER EN -KILOGRAM.

DOOR

F. J. STAMKART.



De gewigten bestonden uit twee *stellen*, ieder van 2 stuks à 2 kilogram, en verder nog uit 26 stuks, van het kilogram tot het milligram, in het geheel 56 stuks.

De maten uit een ijzeren meter, een koperen comparateur voor lengtematen, en *vier* stuks koperen liters.

In Nederlandsch Oost-Indië bevindt zich een verguld koperen kilogram N°. 4, dat reeds in de jaren 1856—1857 door de genoemde Commissie was geverifiëerd, en door den Heer Dr. J. A. C. Oudemans, toen lid der Commissie, te zamen met den daarbij behoorenden glazen meter N°. 3, bij zijn vertrek naar Batavia is medegenomen *).

De gewigten, ten dienste van het ijkwezen in Oost-Indië, zijn beschouwd geworden als standaards van den 2^{den} rang,

*) In de vergadering der Akademie van 25 Junij 1859 is het berigt gelezen, dat de Heer Dr. J. A. C. Oudemans, dadelijk na aankomst in de Oost, het kilogram N°. 4 en de el N°. 3 aan het Oost-Indische gouvernement heeft ter hand gesteld.

Zijden.
AD
AE
DE
DF
FE
DG
GF
HF
GH
FI
HI
HK
KI
IL
KB
IB
BL
BN
LN
NO
NP
OP
PQ
OQ
QR

$I = Gl_2 - 32{,}22$ mgr. $\qquad I' = Gl_2 - 32{,}35$ mgr.

verschil reductie:

I en $Gl_2 = 30{,}73$ » $\qquad 30{,}73$ »

in het luchtledige:

$I = Gl_2 - 1{,}49$ mgr. $\qquad I' = Gl_2 - 1{,}62$ mgr.

maar:

$Gl_2 = \text{Plat.} + 6{,}97$ » $\qquad Gl_2 = \text{Plat.} + 6{,}97$ »

dus in het luchtledige:

$I = \text{Plat.} + 5{,}48$ mgr. $\qquad I' = \text{Plat.} + 5{,}35$ mgr.

Nu is, ook in het luchtledige, N⁰. 4 = Plat. + 1,26 mgr., dus komt:

$I = \text{N}^0.\ 4 + 4{,}22$ mgr. $\qquad I' = \text{N}^0.\ 4 + 4{,}09$ mgr.

Indien de volumina van I en I′ en N⁰. 4 gelijk waren, dan zoude ditzelfde verschil ook in de lucht plaats hebben. De reductiën zijn echter verschillend, en wel voor I en I′ grooter dan voor N⁰. 4.

Zij de gemiddelde barometerstand min $^3/_8$ dampdruk, aangenomen = 760 mm. en de temperatuur = 25⁰ C., dan wordt bij den overgang van het luchtledige tot in de lucht I en I′ *meer* opgeheven dan N⁰. 4: 5,48 mgr.

Dus zal men gemiddeld in de lucht hebben:

$I = \text{N}^0.\ 4 - 1{,}2$ mgr. $\qquad I' = \text{N}^0.\ 4 - 1{,}4$ mgr.

Indien het vergulde gewigt N⁰. 4 in den loop eener $\frac{1}{4}$ eeuw geene verandering in zwaarte heeft ondergaan (wat onbekend is) en indien de Oost-Indische gewigten in 14 à 15 jaar ook onveranderd zijn gebleven, dan hebben nog de laatst geschreven vergelijkingen plaats.

De onderdeelen van het kilogram, alsook de dubbele kilogrammen, zijn van de kilogrammen I en I′ afgeleid. Het aantal wegingen is hiertoe natuurlijk zeer groot geweest. Hierbij is aangenomen, dat alle koperen stukken *hetzelfde* soortelijk gewigt bezitten als de kilogram-stukken, iets dat gewis zeer na aan de waarheid zijn zal, en bovendien bij wegingen in de lucht van geen merkbaren invloed is. — De

veranderingen in de digtheden der lucht toch komen, streng genomen, daarbij alleen in aanmerking, in verband met het verschil van de digtheden der stukken. Ditzelfde geldt in hooger mate nog van de aluminiumgewigtjes onder het gram.

De volgende lijst bevat de uitkomst der wegingen en berekeningen. De letter H wijst een hectogram aan, D een decagram, g een gram; de cijfers 2 of 5 er bij, als H_5, H_2; D_5, D_2; g_5, g_2 duiden de stukken van 5 of 2 *hectogram*, *decagram* of *gram* aan. Waar twee stukken van *hetzelfde* gewigt aanwezig zijn, worden zij door een puntje (.) aan den voet van één daarvan onderscheiden *).

De cijfers achter elk stuk, in de tweede kolom, wijzen in milligrammen de gevonden gemiddelde fouten der stukken aan; + als zij iets te zwaar, — als zij iets te ligt zijn.

Gewigten in Oost-Indië I *en* I' *zonder en met accent.*

		mgr.			mgr.
Dubbele kilogrammen. . .	I_2	+ 1	Dubbele kilogrammen. . .	I_2'	— 1
	$.I_2$	0		$.I_2'$	0
Kilogram. . .	I	— 1	Kilogram. . .	I'	— 1
Hectogrammen	H_5	— 0,1	Hectogrammen	H_5'	— 0,1
	H_2	+ 0,1		H_2'	0
	H	0		H'	0
	.H	0		.H'	— 0,1
Decagrammen	D_5	+ 0,20	Decagrammen	D_5'	— 0,2
	D_2	+ 0,14		D_2'	+ 0,13
	D	+ 0,15		D'	+ 0,16
	.D	+ 0,17		.D'	+ 0,22
Grammen . .	g_5	+ 0,09	Grammen . .	g_5'	+ 0,06
	g_2	+ 0,04		g_2'	+ 0,09
	$.g_2$	+ 0,07		$.g_2'$	+ 0,08
	g	— 0,07		g'	+ 0,02

*) Eene noot is teruggevonden, met potlood geschreven, luidende: „Al

Milligramgewigten van aluminium.

Doos 1. mgr.	mgr.	Doos 2. mgr.	mgr.
1000	+ 0,02	1000	+ 0,01
500	+ 0,02	500	+ 0,01
200	— 0,02	200	+ 0,01
100	0	100	+ 0,01
100′	0	100′	+ 0,01
50	— 0,04	50	0
20	0	20	0
10	— 0,01	10	0
10′	0	10′	0
5	0	5	0
2	— 0,01	2	+ 0,01
2′	— 0,02	2′	+ 0,01
1	+ 0,01	1	+ 0,01

Lengtemaat en Comparateur.

De ijzeren meter, vergeleken met een standaard-el van den tweeden rang, is iets (ongeveer $^3/_{100}$ à $^4/_{100}$ mm.) te kort gevonden.

Hij zal dus de lengte van een meter bezitten bij de temperatuur van nabij 4° C.

De comparateur bestaat in hoofdzaak uit eene koperen pris-

„de gewigten van dit kistje zijn aan het ondervlak gemerkt met een „puntje (.). Van de stukken gewigt, die dubbel voorkomen, is daarenboven „een puntje (.) *boven op* gemerkt."

matische staaf, het boven- of liever boven-zijvlak in millimeters verdeeld, zooals de comparateuren der ijk-kantoren. Hij onderscheidt zich van deze voornamelijk daarin, dat de zoogenaamde vaste dook ook verschoven kan worden en op verschillende plaatsen aan de koperen staaf kan worden vastgeklemd; en ook daarin, dat de koperen staaf zich vrijelijk kan uitzetten en inkrimpen, zonder door het hout der doos, waarin zij zich bevindt, belemmerd te worden, en in nog eenige veranderingen.

De geheele lengte is vergeleken met een ijzeren meter, die bij 21° C. temperatuur 3 à 4 micron langer is bevonden dan de ijzeren meter, die door VAN SWINDEN is overgebracht, en dus in elk geval maar zeer weinig fout kan zijn.

Aangenomen uitzetting
van ijzer . . . . . . 12,20 micron per meter voor 1° C.
van koper. . . . . . 18,78 » » » » » »

---

17 Februari 1867, temp. 10°,8 C.; aanwijzing comparateur	1000,31 m.m
Uitzetting el voor 10°,8. . . .	0,13 »
Aanwijzing van 1 meter bij 10°,8 door den comparateur	1000,18 m.m.
21 Februari 1867, temp. 9°,7 C.; aanwijzing comparateur	1000,36 m.m.
Uitzetting el voor 9°,7.	0,12 »
Aanwijzing van 1 meter bij 9°,7 door den comparateur	1000,24 m.m.
23 Februari 1867, temp. 9°,8 C.; aanwijzing comparateur	1000,35 m.m.
Uitzetting el voor 9°,8.	0,12 »
Aanwijzing van 1 meter bij 9°,8 door den comparateur	1000,23 m.m.

Dit maal had de ijzeren el 2 dagen op den comparateur gelegen.

De beide laatste bepalingen verdienen eenig meer vertrouwen dan de eerste. Met de uitzetting van het koper = 18,78 micron komt voor de aanwijzing door den comparateur van 1 meter bij 10° C.

17	Februari	1000,195	m.m. (dit met ½ gewigt).
21	»	1000,213	»
23	»	1000,226	»
Gemiddeld bij 10°		1000,233	m.m.

0,233 m.m. komt, tegen 18,78 micron *) uitzetting van koper, per meter en per graad C., overeen met eene uitzetting voor 11,9 graden.

Dus is de lengte van den comparateur tot aanwijzing van 1000 m.m., of 1 meter, *goed* bij eene temperatuur van 10 + 11°,9, dat zeer nabij bij 22° C. is.

De verdeeling in decimeters, 1, 2, 3 .... 9 is vervolgens onderzocht, en is gevonden dat elk der aanwijzende strepen gemiddeld binnen + of — 1½ *hondersten* millimeter juist geplaatst zijn.

Eindelijk is ook nog de lengte van verschillende *millimeter*-verdeelingen onderling vergeleken, met behulp van een microscoop en micrometerschroef. Het resultaat is geweest dat twee verschillende millimeters tot 9 micron of ongeveer $^1/_{100}$ m.m. verschillen kunnen; dat dezelfde nauwkeurigheid ook aan de verdeeling van den nonius toekomt, en dat de absolute plaats van een willekeurig gekozen verdeelstreep hoogstens binnen $^1/_{50}$ m.m. als goed kan aangenomen worden.

Wanneer het werktuig gebezigd wordt om lengtematen, die bijna gelijk zijn, te *vergelijken*, dan kan, uit den aard der zaak, de fout niet zoo groot zijn.

---

*) De uitzetting 18,78 komt toevallig vrij goed overeen met het gemiddelde der kubieke uitzetting 57¼, die voor de litermaten gevonden is.

Koperen Litermaten.

Vier stuks: een hooge en een lage en nogmaals een hooge en een lage liter, zijn onderzocht, de beide laatsten gemerkt met een puntje *).

De gemiddelde temperatuur der waarnemingen is ongeveer 13^0 C. geweest; voor de hooge liters van omtent 6 à 7^0 tot 23^0, voor de lage liters van 2 tot 23^0 ongeveer.

Het gemiddelde resultaat uit 8 bepalingen is geweest: als i de inhoud van den liter voorstelt in kubieke m.m. en t de temperatuur in graden van den honderddeeligen thermometer, dan is:

zonder puntje { hooge liter $i = 100^3 - 181 + 56{,}73\,(t - 13)$ m.m.^{3}
lage liter $i = 100^3 - 280 + 56{,}11\,(t - 13)$ »

met puntje { hooge liter $i = 100^3 - 167 + 56{,}54\,(t - 13)$ »
lage liter $i = 100^3 - 372 + 60{,}41\,(t - 13)$ »

Hieruit volgt voor de inhouden der liters, bij:

	Hooge liter.	Lage liter.	Hooge liter.	Lage liter.	
4^0	0,999308	0,999215	0,999324	0,999084	cub. decim.
20^0	1,000216	1,000133	1,000229	1,000050	» »

De inhouden der liters bij 4^0 zijn eigenlijk de gewigten aan gedistilleerd water van 4^0 dat er in vervat is. Elke maat, die voor eene juiste vulling met water geschikt is, kan door waterweging onderzocht worden.

Nog zij opgemerkt, dat bovenstaande bepalingen, streng genomen, eigenlijk gelden bij het gebruik van *dezelfde* dekglazen, die er bijgevoegd en bij de verificatiën gebruikt zijn. Bij die verificatiën is, voor de densiteiten van het water bij verschillende temperaturen, gevolgd de tafel van Hallström.

---

*) Zooveel ik mij herinner slechts met een inktpuntje, onder aan de basis.

Ten slotte zij opgemerkt, dat de koperen balanzen, die mede door den heer Olland geleverd zijn, bij de verificatiën der gewigten gebruikt zijn en daarbij zeer goed voldaan hebben. Bij eene daarvan: de grootere, is eene aanwijzing betrekkelijk het gebruik medegegeven.

April 1881.

OVER DE WERKING

VAN

ZWAVELZUUR OP AZIJNZUURANHYDRIDE.

DOOR

A. P. N. FRANCHIMONT.

Bezig zijnde met de bereiding in groote hoeveelheid van het geacetyleerde lichaam uit cellulose, dat ik onlangs heb vermeld, ten einde er het splitsingsproduct van te leeren kennen, wilde ik tegelijkertijd de bijproducten bij de vorming nagaan. Ik dampte derhalve de waterige vloeistof, waarmede de oplossing van cellulose, in met zwavelzuur vermengd azijnzuuranhydride, was neergeslagen tot op een klein volumen in en stelde mij voor het zwavelzuur er uit te verwijderen door toevoeging van bariumacetaat. Tot mijne verwondering evenwel ontstond er geen neerslag van bariumsulfaat, maar na verdere indamping kreeg ik een, in kleine schubjes of plaatjes gekristalliseerd, bariumzout, dat, eenmaal afgescheiden, bijna niet meer in water oploste, zoodat het door afwasschen met kokend water zuiver werd verkregen. Na droging op 230° C. bepaalde ik het bariumgehalte, door verhitting met zwavelzuur. 0,4598 gr. gaven 0,389 gr. bariumsulfaat; het bariumgehalte bedraagt dus 49,74 pCt.

Vervolgens bevonden hebbende, dat de verbinding zwavel bevatte, werd het gehalte hiervan bepaald, door smelting met natriumnitraat en carbonaat en bepaling van het hierdoor gevormde zwavelzuur; 0,5067 gr. leverden 0,4268 gr. bariumsulfaat; het zwavelgehalte bedraagt dus 11,56 pCt.

Dit, zoowel als het bariumgehalte, komen juist overeen met dat van bariumsulfoacetaat (Ba 49,81 pCt., S. 11,63 pCt.), waarvoor ook de moeielijke oplosbaarheid pleitte.

Een andermaal werd het bovenvermelde zure vocht met loodcarbonaat verzadigd en zoo een zeer moeielijk oplosbaar loodzout verkregen, waaruit door zwavelwaterstof het zuur werd vrijgemaakt. De oplossing er van kleurde zich bij het indampen aan de lucht zeer bruin en scheidde, nadat zij ten slotte boven zwavelzuur in het luchtledige was geplaatst, eenige kristalletjes af, die zeer vervloeibaar waren. Deze eigenschappen stemmen overeen met hetgeen MELSENS *), de ontdekker van het sulfo-azijnzuur, er van vermeldt. Ten slotte werd uit het aldus verkregen vrije zuur, door middel van zilvercarbonaat, het zilverzout bereid, dat fraaie, harde kristallen vormt. Van dit zout, dat bij 100° gedroogd werd, waarbij het iets meer dan één molecuul water verloor, werd eene koolstof- en waterstofbepaling gemaakt, door verbranding met gesmolten loodchromaat; 3,0954 gr. gaven 0,1652 gr. water en 0,7729 koolzuurgas, waaruit volgt: voor de koolstof 6,80 pCt., voor de waterstof 0,59 pCt., terwijl het zilversulfoacetaat verlangt C 6,77 H 0,56. Bij de verhitting bleef er van 0,333 gr. 0,204 gr. terug; aannemende dat dit zilver is, wordt het zilvergehalte 61,26 pCt., terwijl de berekening vordert 61,01 pCt. MELSENS houdt het residu voor metallisch zilver; mij komt het echter voor, dat er zeer goed een spoor zilversulfaat bij kan zijn.

De vermelde waarneming leerde mij, dat het zwavelzuur in de bovengenoemde reactie eene andere rol speelt dan die van wateronttrekkend of waterbindend middel en ik werd er daardoor toe gebracht zijne werking op het azijnzuuranhydride eenigermate na te gaan, ten einde er achter te komen, welke rol het bij de acetyleering der cellulose vervult.

Voor zoover ik heb kunnen nagaan is er omtrent de werking dezer beide lichamen op elkander niets bekend.

---

*) *Mémoires de l'Académie Royale de Bruxelles.* T. XVI. (1844).

Wel vermeldt GERHARDT, omtrent de werking van rookend zwavelzuur, dat er koolzuurgas en een niet nader onderzocht zuur ontstaat, en OPPENHEIM vermoedt dat er, bij de werking van acetylchloride op zwavelzuur, behalve chloorwaterstof, acetylzwavelzuur geboren wordt. Het laatste geval is in zooverre analoog aan het hier beschrevene dat, terwijl OPPENHEIM van een gemengd zuuranhydride uitging, ik een eenvoudig anhydride bezigde.

Houdt men het vermoeden van OPPENHEIM voor juist, dan mag men verwachten, dat er hier, behalve azijnzuur, eveneens acetylzwavelzuur zal ontstaan en dit, dat hoogstwaarschijnlijk zeer gemakkelijk reageert op hydroxylbevattende lichamen, zou door alcoholen onder vorming van azijnzure aethers en zwavelzuur ontleed kunnen worden. Had er nu geene verdere werking plaats, dan zou men in het water, waarmede de producten der reactie behandeld worden, het zwavelzuur als zoodanig moeten terugvinden. Dit nu was bij de acetyleering der cellulose niet het geval, maar in de plaats er van vond ik het sulfo-azijnzuur.

Vermengt men azijnzuuranhydride en zwavelzuur in zoodanige gewichtshoeveelheden, dat er op één molecuul van het eene lichaam ook één molecuul van het andere voorhanden is, dan wordt het mengsel warm en krijgt men eene zeer dikke strooperige vloeistof, veel dikker dan zwavelzuur; de reuk van het azijnzuuranhydride, dat gemakkelijk door de prikkelende werking op de slijmvliezen van neus en oogen, zelfs in kleine hoeveelheden, te herkennen is, is geheel verdwenen en heeft plaats gemaakt voor dien van azijnzuur.

Heeft men de beide zelfstandigheden zeer langzaam en onder goede afkoeling met elkander gemengd en brengt men de dikke vloeistof daarna onmiddellijk in water, dan vindt men hierin al het aangewende zwavelzuur in vrijen toestand terug.

Heeft men het mengsel daarentegen eenigen tijd, b.v. een paar dagen, bij de gewone temperatuur laten staan, of heeft het zich bij de menging sterk verwarmd, dan is de vloeistof,

hoewel nog zeer dik, dunner dan de voorgaande en bij de verdunning met water vindt men hierin niet al het aangewende zwavelzuur in vrijen toestand.

Verhit men het even tot op 120°—130° C., dan bedraagt de hoeveelheid vrij zwavelzuur in de met water behandelde vloeistof nog veel minder. Ik vond b.v. in een dergelijk geval slechts $^1/_{10}$ van het gebruikte zwavelzuur, terwijl ik in het voorafgaande $^2/_3$ of meer had gevonden.

Distilleert men een mengsel van de beide lichamen in de genoemde verhouding, dan komt er azijnzuur over, doch de verkregen hoeveelheid is, zelfs al wordt de vloeistof tot op 160° C. gebracht, niet veel meer dan $^1/_5$ in gewicht van het gebezigde anhydride. Het residu levert, als het in water wordt opgelost, altijd nog vrij zwavelzuur.

Plaatst men het genoemde mengsel in het luchtledige, boven kalk en phosphorzuuranhydride, dan is er, zelfs na twee maanden, geen spoor van kristallisatie in waar te nemen.

Kiest men de gewichtsverhoudingen zóó, dat er op twee moleculen azijnzuuranhydride één molecuul zwavelzuur voorhanden is, dan is de warmteontwikkeling bij de menging veel sterker, zelfs zóó, dat de vloeistof begint te koken: zij kleurt zich bruin, de reuk naar het anhydride is eveneens volkomen verdwenen, en brengt men nu het product in water, dan bevat dit geen vrij zwavelzuur, maar sulfo-azijnzuur en azijnzuur. De hoeveelheid sulfo-azijnzuurbarium, die er uit verkregen werd, bewees dat al het zwavelzuur in sulfo-azijnzuur was omgezet.

Vermengt men de beide lichamen in de laatstgenoemde gewichtsverhouding langzaam en onder afkoeling, dan krijgt men eene kleurlooze dikke vloeistof, die nog sterk riekt naar het anhydride; brengt men er eenige druppels van in water, dan bevat dit eene aanzienlijke hoeveelheid vrij zwavelzuur. Verwarmt men het kleurlooze mengsel zacht, dan treedt er plotseling eene hevige werking in, de vloeistof begint te koken, kleurt zich en levert nu, wanneer zij in water gebracht wordt, geen vrij zwavelzuur, maar sulfo-azijnzuur.

Verwarmt men het mengsel van twee moleculen anhydride

en één molecuul zwavelzuur tot op 160° C. dan distilleert er azijnzuur over, in gewicht bijna de helft van het gebezigde anhydride. Het residu is niet oplosbaar in aether.

Hetzelfde heeft plaats als men het mengsel gedurende eenige dagen op 100° verhit en er een drogen luchtstroom doorzuigt. Distilleert men echter bij eene lage drukking, b.v. van 43 mm., dan komt er meer azijnzuur over; uit 10 gr. anhydride kreeg ik op deze wijze ongeveer acht gram azijnzuur. Het residu, dat donkerbruin gekleurd was, loste niet op in aether, wel in water en bevatte geen vrij zwavelzuur. (sulfo-azijnzuur is niet oplosbaar in aether)

Dat het sulfo-azijnzuur zich met azijnzuur verbindt, evenals het dit met water doet, is, hoewel niet zeker, volgens het gedrag bij verwarming, toch wel waarschijnlijk. In het luchtledige geplaatst boven kalk en phosphorzuuranhydride heeft het mengsel van sulfo-azijnzuur en azijnzuur, zelfs na twee maanden, nog den reuk van azijnzuur en vertoont nog geen spoor van kristallisatie.

Voegt men bij een mengsel van 40 gewichtsdeelen azijnzuuranhydride en 3 gewichtsdeelen zwavelzuur 10 gewichtsdeelen manniet, dan treedt er ook langzamerhand eene werking in, doch lang niet zoo snel en zoo heftig als bij het gebruik van cellulose; giet men, nadat zij afgeloopen is, het product in water uit, dan slaat de gevormde hexacetylmanniet neer (die uit aether omgekristalliseerd bij 120° C. smelt) en in de waterige vloeistof treft men nog vrij zwavelzuur aan.

Neemt men een mengsel van 6 gew.d. azijnzuuranhydride en 3 gew.d. zwavelzuur, dat zich tot kokens verwarmd heeft en waarin de reactie op vrij zwavelzuur verdwenen is, mengt dit met 34 gew.d. anhydride en voegt dan 10 gew.d. cellulose (Zweedsch filtreerpapier) toe, dan heeft er slechts eene zeer geringe warmte-ontwikkeling plaats en de werking schijnt weldra op te houden; verwarmt men nu zacht, dan gaat zij door en ten slotte wordt alles opgelost. Giet men deze oplossing in water, dan krijgt men een neerslag van geacetyleerde producten der cellulose en in het water bevindt zich geen vrij zwavelzuur, maar sulfo-azijnzuur.

Uit deze laatste proef volgt, dat sulfo-azijnzuur, hoewel minder snel en heftig, bij de acetyleering de rol kan vervullen, die het zwavelzuur speelt; schrijft men deze toe aan de vorming van acetylzwavelzuur, dan zou men hier een acetylsulfo-azijnzuur moeten aannemen.

Al de voorafgaande proefnemingen pleiten voor de aanvankelijke vorming van acetylzwavelzuur, bij de werking van zwavelzuur op azijnzuuranhydride, terwijl de vorming van sulfo-azijnzuur op rekening der temperatuursverhooging kan worden geschoven. Uit het verdwijnen van een gedeelte van het zwavelzuur, bij de mengsels van een gelijk aantal moleculen, zou men echter geneigd kunnen zijn te besluiten, dat de vorming van sulfo-azijnzuur reeds bij de gewone temperatuur begint en na eenigen tijd een zekere grens bereikt, eene andere als het mengsel aan temperatuursverhooging wordt blootgesteld; terwijl eindelijk het geheele verbruik van het zwavelzuur tot de sulfo-azijnzuurvorming eerst zou plaats hebben bij de aanwezigheid van twee moleculen anhydride op één molecuul zwavelzuur en voldoende temperatuursverhooging. Bij de proef met manniet b.v., waar de temperatuursverhooging niet zoo sterk was, is niet al het zwavelzuur tot sulfo-azijnzuur geworden, ofschoon er anhydride genoeg aanwezig was. Veel hangt natuurlijk af van de hoeveelheden waarmede men werkt; bij groote hoeveelheden zou de warmteontwikkeling misschien voldoende kunnen worden; dit was echter niet het geval bij het gebruik van 5 gr. manniet.

Zijn dus de vorming van het sulfo-azijnzuur en de omstandigheden, die er het best geschikt toe zijn, vastgesteld, de geheele gang der reactie is nog niet duidelijk, want de vorming van acetylzwavelzuur is niet zeker; evenals het zure acetylsulfaat $CH_3 CO SO_4 H$ (acetylzwavelzuur) zou ook het neutrale acetylsulfaat $CH_3 CO SO_4 CO CH_3$ kunnen geboren worden en dit zou voor de acetyleering van alcoholen even goed geschikt kunnen zijn.

Maar al wordt ook de vorming van acetylzwavelzuur aangenomen of aangetoond, dan toch blijft de vorming van het sulfo-azijnzuur nog duister. Eenigzins vergelijkbaar is zij

met de door HOFMAN en BUCKTON *) waargenomene, uit acetonitril en acetamide door sterk zwavelzuur, waarbij de eigenaardigheid is dat hier de sulfogroep ingevoerd wordt in eene groep methyl, verbonden aan een koolstofatoom, dat met stikstof verbonden is, terwijl dit bij het anhydride geheel aan zuurstof is gebonden. Het zou mij te ver van het onderwerp voeren om hier nog andere voorbeelden, waarin dezelfde invloed werkzaam is, aan te halen.

Terwijl dus de werking van zwavelzuur op azijnzuuranhydride, voor zoover als ik deze noodig had te kennen bij de bestudeering van het acetyleeren der cellulose, voldoende is opgehelderd, knoopen zich daaraan nog vele vraagstukken van groot belang vast. Ik neem de vrijheid er met weinige woorden op te wijzen en den gang aan te duiden, dien ik bij de bestudeering van dit onderwerp denk te nemen of te laten nemen.

Onze kennis nl. van het acetylzwavelzuur is nog zeer gering. Afgezonderd is het tot nog toe niet, daar het snel door water schijnt ontleed te worden en dus niet geschikt is voor de bereiding van zouten. Ik heb getracht er een aether van te krijgen, door verhitting van acetylchloride (en van azijnzuuranhydride) met kaliumaethylsulfaat, maar tot nog toe zonder het gewenschte resultaat. Het vermoeden van OPPENHEIM †), dat er bij de werking van acetylchloride op zwavelzuur, chloorwaterstof en acetylzwavelzuur zou ontstaan, komt mij, hoe waarschijnlijk ook, niet houdbaar voor. Ik liet nl. acetylchloride op zwavelzuur werken, nu eens in zoodanige verhouding, dat er van beiden een gelijk aantal moleculen aanwezig was, dan eens zóó, dat er twee of meer moleculen van het chloride zich op één molecuul zuur bevonden, verwarmde dan tot 100° en leidde er een drogen luchtstroom door om het chloorwaterstof te verwijderen. Werd het achterblijvende nu in water gebracht en hierin de hoeveelheid vrij zwavelzuur bepaald, dan was deze aanmerkelijk

*) *Annalen d. Chem. u. Pharm.* C. S. 141.

†) *Ber. d. d. Chem. Ges. zu Berlin.* III. S. 737.

minder dan voor acetylzwavelzuur gevorderd wordt. Vermengde ik het overschot met azijnzuuranhydride en verwarmde, dan was de reactie op vrij zwavelzuur verdwenen. Vermengde ik het onder afkoeling met azijnzuuranhydride en bracht ik er dan cellulose in, dan trad weldra onder temperatuursverhooging eene reactie in, zoodat alles oploste; bij uitgieting dezer oplossing in water was hierin weder vrij zwavelzuur.

Eene andere reactie, waarbij het ontstaan van acetylzwavelzuur vermoed wordt, is die van BAUMSTARK *); hij liet chloorzwavelzuur op azijnzuur werken. Onder ontwikkeling van chloorwaterstof, dat hij door een stroom koolzuurgas bij 100° verwijderde, ontstond er een lichaam dat, in water gebracht, azijnzuur en zwavelzuur leverde; verhitte hij tot 120°, dan distilleerde er azijnzuur, maar het residu bleef zich tegenover water op dezelfde wijze als te voren, gedragen; nadat hij het evenwel eenigen tijd op 160° had gehouden, verkreeg hij sulfo-azijnzuur en disulfometholzuur.

Uit een onderzoek van KÄMMERER en CARIUS †) eindelijk schijnt te volgen, dat er twee isomere acetylzwavelzuren bestaan. Althans zij beweren, bij de verhitting van acetylchloride met zilversulfaat en behandeling van het product met water, een zuur te hebben gekregen, als strooperige vloeistof, dat zich langzamerhand door koken met water in azijnzuur en zwavelzuur omzette. Zij hebben er zouten van gemaakt en de werking van phosphorpentachloride er op nagegaan, die volgens hen zeer verschilt van die op sulfoazijnzuur. Worden deze resultaten, die ik in de eerste plaats zal controleeren, bevestigd, dan zou er één door water zeer gemakkelijk en één minder gemakkelijk ontleedbaar acetylzwavelzuur bestaan. Zij hebben vermoedelijk het neutrale acetylsulfaat, dat gevormd moest zijn, door de behandeling met water zoodanig ontleed, dat er ééne groep acetyl is verwijderd, terwijl de andere verbonden is gebleven tot het

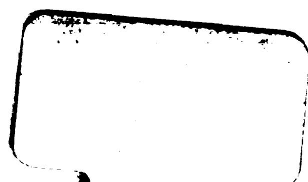
---

*) *Annal. d. Chem. u. Pharm.* CXL. S. 81.

†) *Annal. d. Chem. u. Pharm.* CXXXI. S. 165.

bestendigere acetylzwavelzuur. Bevestigt zich dit, dan zou hierdoor een bewijs te meer geleverd zijn voor een verschil in gedrag der beide groepen OH van het zwavelzuur en eenig licht kunnen geworpen worden op de verbinding der atomen in dit zuur, die nog altijd niet voldoende is opgehelderd.

Leiden, April 1881.




Widener Library
044 092 715 168